哈工大网盘计划简介

1.项目初衷

鉴于（1）哈工大各类 QQ 群内学习资料多且繁杂，而文件文字太多会导致文件被 tx 屏蔽或者降低 QQ 群信用星级；（2）校内诚信复印和纸张记忆垄断；（3）很多营销号在卖资料且售价很高；（4）学长学姐的自编材料很好，还想分享给下一届；等问题，网盘计划应运而生！哈尔滨工业大学网盘计划**旨在将窝工的各类学习资料进行归类整理，并且以网盘的形式发出来**，历时一年，现已小成，扫描了上百份校内复印店试题文档，归类整理了近 40 个 G 的学习资料给大家，已经花费上千元，现入不敷出，如果您希望网盘计划继续运营下去的话，可通过以下方式进行捐赠。

QQ支付

推荐使用微信支付

2.网盘计划成就（密码 1920）

哈工大网盘计划
密码1920

线代（密码1920)

群名称:哈工大网盘计划（预）
群　号:953062322

腾讯自动屏蔽以上链接，请用浏览器扫一扫

学号：

班级：

姓名：

遵守考试纪律 注意行为规范

哈尔滨工业大学（威海） 2019 / 2020 学年 夏 季学期

线性代数与空间解析几何 试题卷（A）

考试形式： 闭卷　　答题时间：120（分钟）　本卷面成绩占课程成绩 100 %

一、填空题（每题 3 分，共 36 分）

1. 设方阵 A 满足 $A^2-2A-2E=0$，则 $A^{-1}=$ $\frac{A-2}{2}E$

2. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为1, 1, 2, 则行列式 $|-2A|=$________

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & a & -2\\ b & 3 & -3\end{pmatrix}$ 的秩为 1，则 $a=$ 2，$b=$ -3

3-R(B)

4. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 a 的取值范围是________

$2\alpha_1$ α_1

α_2 $-3\alpha_2$

5. 设 α_1,α_2 是二维列向量，$|\alpha_1,\alpha_2|=4$，则 $|2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-3\alpha_2|=$ -28

$t+18+8-8+3$　R(B)≥1　α_1　α_2　$-7\alpha_1\alpha_2$

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，且 B 为非零矩阵满足 $AB=\mathbf{0}$，则 $t=$ -3

$R(AB)\geq R(A)+R(B)-3$

7. 基 $\alpha_1=(1,0)^T,\alpha_2=(1,-1)^T$ 到基 $\beta_1=(1,1)^T,\beta_2=(1,2)^T$ 的过渡矩阵是________

8. 设实对称矩阵 A 的两个不同特征值对应的特征向量分别是 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,a,2)^T$，则 $a=$（　　）

9. 设二次型 $2x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2x_1x_2+ax_2x_3$ 的秩是 2，则 $a=$____

10. 若 3×3 阶矩阵 A 的行列式是 $|A|=2$，则 $|A^*|=$ 4　　2^{n-1}

11. 单个向量 α 线性相关的充要条件是________

二、选择题 （每题 2 分，共 14 分）

1. n 阶方阵 A 且 $R(A)=n-1\,(n\geq 2)$，A^* 为其伴随阵，则 $R(A^*)=$（ C ）

(A) n　　(B) $n-1$　　(C) 1　　(D) 0

2. 设 A,B 为任意两个 n 阶方阵，则下列等式一定成立的是（ B ）

(A) $|A+B|=|A|+|B|$　　(B) $|AB|=|BA|$

(C) $(AB)^T=A^TB^T$　　(D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$均为$n$维向量，又$\alpha_1,\alpha_2,\beta$线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\beta$线性无关，则下列正确的是（　　）

(A) α_2,α_3线性相关　　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

(C) α_1可由α_2,α_3,β线性表示　　　(D) β可由α_1,α_2线性表示

4. 设A为n阶矩阵，则线性方程组$AX=b$有解的充要条件为（ D ）

(A) $R(A)<n$　　(B) $R(A)=n$　　(C) $|A|\neq 0$　　(D) $R(A,b)=R(A)$

5. 设A是方阵，如有矩阵关系式$AB=AC$，则必有（ D ）

(A) $A=0$　(B) $B\neq C$时$A=0$　(C) $A\neq 0$时$B=C$　(D) $|A|\neq 0$时$B=C$

6. 若矩阵$A_{4\times 5}$有一个4阶非零子式，则（ C ）

(A) 秩(A)≤2　　(B) 秩(A)≤3　　(C) 秩(A)=4　　(D) 秩(A)=5

7. 设A为$m\times n$矩阵，若齐次线性方程组$AX=0$只有零解，则对任意m维非零列向量b，非齐次线性方程组$AX=b$（　　）

(A) 必有唯一解　(B) 必无解　(C) 必有无穷多解　(D) 可能有解，可能无解

三、设向量组$\alpha_1=(1,1,2,2)^T,\alpha_2=(0,2,1,5)^T,\alpha_3=(2,0,3,-1)^T,\alpha_4=(1,3,3,7)^T$，求向量组的一个极大无关组和秩；把其余的向量用此极大无关线性表示。（15分）

四、问λ为何值时，线性方程组$\begin{cases}-x_1+\lambda x_2+2x_3=1\\ x_1-x_2+\lambda x_3=2\\ -5x_1+5x_2+4x_3=-1\end{cases}$有唯一解、无解、无穷多解，并求有无穷多解时方程组的通解。（15分）

五、求正交矩阵P将二次型$x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_{32}+4x_2x_3$化为标准型，并写出相应的标准型。（20分）

哈尔滨工业大学（威海）2019/2020 学年夏季学期
线性代数与空间解析几何试题卷 (A) 答案解析

填空题

1. $\frac{1}{2}A-E$　解析：原式可变形为 $A(A-2E)=E$。由题意，矩阵 A 可逆，因此两边同乘 A^{-1} 得 $A-2E=2A^{-1}$，即 $A^{-1}=\frac{1}{2}A-E$。

2. -16　解析：根据特征值的性质，n 矩阵的 n 个特征值的乘积等于该矩阵的行列式的值，因此 $|A|=1\times1\times2=2$。根据行列式性质 $|kA|=k^n|A|$，所求值为 $|-2A|=(-2)^3\times2=-16$。

3. $2; -3$　解析：矩阵的秩的定义为矩阵的非零子（行列）式的最高阶数。由于 $R(A)=1$，所以该矩阵的两个子式 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & a\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ b & 3\end{bmatrix}$ 均为 0，得 $a=2, b=-3$。

4. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　解析：因为矩阵 A 正定，所以 A 的各阶顺序主子式均为正，即 $2>0$, $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}>0$, $\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}>0$，得 $a>\frac{1}{2}$。

5. -28　观察到 $\begin{bmatrix}2\alpha_1+\alpha_2 & 3\alpha_1-\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$，两边取行列式得 $\begin{bmatrix}2\alpha_1+\alpha_2 & 3\alpha_1-\alpha_2\end{bmatrix}=4\times(-7)=-28$。

6. -3　解析：根据矩阵秩的性质 $R(AB)\geq R(A)+R(B)-n$，有 $R(A)+R(B)\leq 0+3=3$。又由于 $R(A)\geq 2$, $R(B)\geq 1$，故有 $R(A)=2, R(B)=1, R(AB)=3$。因此 $|A|=7t+21=0$，解得 $t=-3$。

7. $\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$　解析：由过渡矩阵的定义，有 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}P$。将增广矩阵化为行最简形：$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & -2\end{array}\right]$，因此过渡矩阵为 $P=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$。

8. -1　解析：根据实对称矩阵的性质，其不同特征值对应的特征向量相互正交，因此 $\alpha_1\cdot\alpha_2=a+1=0$，即 $a=-1$。

9. $\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$　解析：该二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & a/2\\ 0 & a/2 & 1\end{bmatrix}$，由于二次型的秩为2，所以 $|A|=1-\frac{a^2}{2}=0$，得 $a=\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$。

10. 4　解析：$|A^*|=\left||A|A^{-1}\right|=|A|^3|A^{-1}|=|A|^3/|A|=|A|^2=4$。

11. α为零向量　解析：因为向量 α 线性相关，所以存在非零常数 k 使得 $k\alpha=\vec{0}$，即 $\alpha=\vec{0}$。

选择题

1. C　解析：见第二章习题34。

2. B　解析：B项，等式两边均等于 $|A||B|$。

3. C　解析：因为 α_2,α_3,β 线性无关，所以 α_2,β 线性无关。而 α_1,α_2,β 线性相关，所以 α_1 可由 α_2,β 线性表示，所以 α_1 可由 α_2,α_3,β 线性表示。

4. D　解析：见5.2.2中的推论5.3。

5. D　解析：由已知，$A(B-C)=0$，根据矩阵秩的性质 $R(AB)\geq R(A)+R(B)-n$，有 $R(A)+R(B-C)\leq 0+n=n$。又由于 $|A|\neq 0$，所以 $R(A)=n$，得 $R(B-C)=0$，即 $B=C$。

6. C　解析：根据 A 的行数和列数可得 $R(A)\leq 4$。因为 A 有4阶非零子式，所以 $R(A)\geq 4$，综上 $R(A)=4$。

7. D　解析：因为 $AX=0$ 只有零解，所以矩阵 A 的各列线性无关。当 b 是 A 的各列的线性组合时，方程 $AX=b$ 有解，反之，则该方程无解。

解答题

三、对向量组构成的矩阵 $\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}$ 进行行化简：

$$\begin{bmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&3\\2&1&3&3\\2&5&-1&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&2&-2&2\\0&1&-1&1\\0&5&-5&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由此可知，该向量组的秩为 2，α_1,α_2 为一个极大无关组。根据行最简形矩阵第三、四列的系数可得，$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_4=\alpha_1+\alpha_2$。

四、化简该线性方程组对应的增广矩阵：

$$\begin{bmatrix}-1&\lambda&2&1\\1&-1&\lambda&2\\-5&5&4&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&\lambda&2&1\\1&-1&\lambda&2\\0&0&5\lambda+4&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&\lambda&2&1\\0&\lambda-1&\lambda+2&3\\0&0&5\lambda+4&9\end{bmatrix}$$

当 $\lambda=-\frac{4}{5}$ 时，系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩，所以方程组无解。

当 $\lambda=1$ 时，增广矩阵化简得 $\begin{bmatrix}1&-1&-2&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，即 $\begin{cases}x_1-x_2=1\\x_3=1\end{cases}$，故方程组的解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$（$k$ 为任意常数）。

当 $\lambda\neq-\frac{4}{5}$ 且 $\lambda\neq 1$ 时，系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，因此方程组有唯一解。

五、使用正交变换法。该二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，由于 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=$ $(\lambda-5)(\lambda+1)^2$，所以特征值为 $5,-1,-1$。

对于特征值 $\lambda_1=5$，下面解方程 $AX=\lambda X$，即 $(\lambda E-A)X=0$。化简其增广矩阵：$\begin{bmatrix}-4&2&2&0\\2&-4&2&0\\2&2&-4&0\end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$（$k$ 为任意常数），单位化得对应的特征向量为 $\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$。

对于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=-1$，同理有：$\begin{bmatrix}2&2&2&0\\2&2&2&0\\2&2&2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+$ $k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意常数）。记 $T_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$T_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，施密特正交化得 $\beta_1=T_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\beta_2=$ $T_2-\dfrac{\beta_1\cdot T_2}{\beta_1\cdot\beta_1}\beta_1=\begin{bmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{bmatrix}$，单位化得对应的特征向量为 $\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$。

因此存在正交变换 $X=PY$，将该二次型化为标准型，其中正交变换矩阵 $P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$，标准型为 $Y^T\begin{bmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}Y=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$。

学号：

班级：

姓名：

哈尔滨工业大学（威海） 2019/2020 学年 秋季学期

线性代数与空间解析几何 试题卷（期中）

考试形式（开、闭卷）：闭卷 答题时间：60 （分钟） 本卷面成绩占课程成绩 [illegible]%

题号	一	二	卷面成绩
分数			

请把选择题的答案写到下列表格，否则无效。

选择题	1	2	3	4	5

$\frac{1}{8}|A^*|$ $|A|^{n-1}$

一、填空题（每空 2 分，共 20 分） $\frac{A^*}{2}$ $\left|-\frac{1}{2}A^*\right|$

得分

1. 已知 3 阶矩阵 A 的行列式 $|A|=2$，则 $|A^*-3A^{-1}|=$ $-\frac{1}{2}$

2. 已知 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&3&4&4\\1&5&6&7\\1&1&2&2\end{vmatrix}=-6$，则 $A_{21}+A_{22}=$ -6，$A_{23}+A_{24}=$ 3

$AA^*=|A|E_n$ $|-A^{-1}|$

3. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}(2\ 1\ 0)$，则 $A^{10}=$ $\begin{bmatrix}2^{10}&2^9&0\\0&0&0\\2^{11}&2^{10}&0\end{bmatrix}$

3×1 1×3 $-2Y=-6$ $X=$ CDCD $\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}[2\ 1\ 0]$

4. 以点 $A(1,1,1)$, $B(2,2,3)$, $C(1,7,1)$, $D(1,1,2)$ 为顶点的四面体的体积为 1

5. n 阶方阵 A 满足：$AB=O$，$B\neq O$，则 $|A|=$ 0

6. 已知 $A^2-3A-3E=O$，则 $(A+E)^{-1}=$ $4E-A$

7. 已知 $|A|=1$, $|B|=2$, $|A+B^{-1}|=4$，则 $|A^{-1}+B|=$ 8

$\begin{vmatrix}0&1&1&2\\3&3&0&0\\0&4&4&5\\1&0&1&0\end{vmatrix}$

8. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$AX=B$，则 $X=$ $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

9. 点 $A(1,1,1)$ 在平面 $x-y-z=5$ 上的投影点为 $(3,-1,-1)$

$1,-1,-1$ $1-x=\lambda$ $1-y=-\lambda$ $R(A)+R(B)\le n$ $1-z=-\lambda$ $x=1-\lambda$ $y=\lambda+1$ $z=\lambda+1$ $\lambda=-2$ $-3\lambda=6$ $1-\lambda-\lambda-1-\lambda-1=5$

$(A+E)(A-4E)+E=0$

$\vec{AB}=(1,1,2)$ $\vec{AC}=(0,6,0)$ $\vec{BC}=(-1,5,-2)$ $\vec{AD}=(0,0,1)$

$\begin{vmatrix}0&6&0\\0&0&1\\1&1&2\end{vmatrix}$ $6-0$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{2}x=4$

$A(E+A^{-1}B^{-1})$

$|AB^{-1}(B+A^{-1})|$

二、选择题（每题 2 分，共 10 分）

得分	

1. 已知n阶矩阵A可逆，$A \xrightarrow[c_1+2c_2]{} B$，则（ C ）

(A) $A^* \xrightarrow{c_1+2c_2} B^*$　　(B) $A^* \xrightarrow[c_2+2c_1]{} B^*$

(C) $A^* \xrightarrow{c_1-2c_2} B^*$　　(D) $A^* \xrightarrow[c_2-2c_1]{} B^*$

2. 双曲线$\begin{cases} y^2-z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周，所生成的旋转曲面方程为（ ~~D~~ ）C

(A) $(x+y)^2-z^2=1$　　(B) $y^2-(x+z)^2=1$

(C) $x^2+y^2-z^2=1$　　(D) $y^2-x^2-z^2=1$

3. 设A，B均为2阶矩阵，$|A|=3$，$|B|=2$，则分块阵$\begin{pmatrix} O & B \\ A & O \end{pmatrix}$的伴随矩阵为（ D ）

$BB^*=|B|E_n$

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

$G^{-1}=\frac{G^*}{|G|}$

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$　$\begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

4. 已知A，B均为3阶矩阵，$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$，$AB=O$，则（ C ）

$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{matrix}$

$R(A)+R(B)\le 3$

(A) 当$a=-1$时，$r(B)=0$　　(B) 当$a=-1$时，$r(B)=1$

(C) 当$a\neq-1$时，$r(B)=0$　　(D) 当$a\neq-1$时，$r(B)=1$

5. 已知矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+4\alpha_3)$，$|A|=1$，

则$|B|=$________（ B ）

α_1 α_2 α_3　　α_1 α_2 α_3　　α_1 $2\alpha_2$　　α_1 $4\alpha_3$

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

一、(1) $-\frac{1}{2}$　(2) -6,3　(3) $2^9\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(4) 1　(5) 0　(6) 4E-A　(7)8　(8)$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　　8 − 4 − 2

(9)(3,-1,-1)

二、CCDCB

哈尔滨工业大学（威海）17/18 学年秋季学期

代数与几何（测试一）

考试形式：闭卷 答题时间 30（分钟）本卷面成占课程成绩 10%，每题 1 分，共 10 分。

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ =（ 1 ）

2. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x+2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & x+3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x+4 \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为（ 10 ）

3. 设 A 是二阶矩阵，若行列式 $|A|=2$，则 $|-2A|=$（ 8 ）

4. 设矩阵 A 满足 $A^2+A-E=0$，则 $A^{-1}=$（ $A+E$ ）

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$，则 A 的伴随矩阵 A^* 为（ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ）

6. 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 行与第 2 行交换得 B，再把 B 的第 1 行加到第 3 行得 C，则满足 PA=C 的可逆矩阵 P 为（ C ）

A、$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B、$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C、$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ D、$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. 设 AB 都是 n 阶方阵，下列命题正确的是（ B ）

A、若 A 或 B 可逆，则 AB 可逆　B、若 A 或 B 不可逆，则 AB 不可逆

C、若 A 与 B 都可逆，则 A+B 可逆　D、若 A 与 B 都不可逆，则 A+B 不可逆

8. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)=m<n$，E 为 m 阶单位阵，则（ B ）

（A）A 的任意一个 m 阶子式都不为 0（B）若 BA=0，则 B=0

（C）经初等行变换，可将 A 化为（E，O）的形式（D）以上都不对

9. 设 $A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 2+3a & 2+a & 2 \\ 3+5a & 3 & 3+a \end{pmatrix}$，已知 A 的秩为 2，则 a=（ 2 ）

10. 矩阵方程 $X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 的解 X=（ $\begin{matrix} -6 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}$ ）

测试一答案：1，10，8，A+E，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，C，B，B，2，$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

哈尔滨工业大学（威海）17/18 学年秋季学期

代数与几何（期中）试题

考试形式：闭卷 答题时间 60（分钟）本卷面成占课程成绩 30%，每题 2 分，共 30 分。

1. 行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$=（ $-(a-b)^2$ ）

$(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$\alpha_1\alpha_2 = -2$

2. 已知 α_1，α_2 为 2 维列向量，矩阵 A＝（$3\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1-\alpha_2$），B＝（α_1，α_2），若行列式|A|＝8，则|B|=（ -2 ）

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

3. 设 A 是二阶矩阵，A*是 A 的伴随矩阵，若行列式|A|＝2，则|-2A*|=（ 8 ）

$\begin{bmatrix} 0 & A & 1 & 0 \\ B & C & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. 设 A，B 是同阶可逆方阵，则矩阵$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}$的逆矩阵为（ $\begin{bmatrix} \cdot & B^{-1} \\ A^{-1} & \cdot \end{bmatrix}$ ）

$c = A^{-1}$ $d = A^{-1}$

5. 已知平面 x-2y-5z+4=0 与直线$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{n}$垂直，则 n=（ 5 ）

$-5 = 5n$

$-1, 2, n$

6. 直线$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$与平面 x-y+2z=10 的夹角为（ $\frac{\pi}{6}$ ）

2, 1, 1 (1, -1, 2)

7. 将曲线$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$绕 x 轴旋转一周所生成的曲面方程为（ $2x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ ）

8. 设矩阵 A=$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$的秩为 2，则 k=（ -2 ）

$\begin{matrix} k-1 & 0 & 1 \\ 1-k & k-1 & 0 \\ 1-k & 1-k & k \end{matrix}$

9. 设矩阵 A 满足 A^4＝0．则矩库 A+E，A-E，A^2+E，A^2-E 中可逆矩阵的个数为（ A ）

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 0

$A^4 - E = -E$

$(A^2+E)(A^2-E) = -E$

$\begin{matrix} k+2 & 1 & 1 \\ k+2 & k & 1 \\ k+2 & 1 & k \end{matrix}$

$\begin{matrix} k+2 & 1 & 1 \\ k+2 & k+1 & 1 \\ k+2 & k+1 & k \end{matrix}$

10. 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列加到第 2 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 则 A＝（ D ）

(A) ~~P_1P_2~~ (B) $P_1^{-1}P_2$ (C) ~~P_2P_1~~ (D) $P_2P_1^{-1}$

$\frac{1}{|A|}A^*$

$|PA|=B$ $|P|\cdot|A|=|B|$

$\begin{matrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{matrix}$

11. 设 A 为 n 阶矩阵，经过若干次的矩阵的初等行变换得到矩阵 B，则必有（ D ）

(A) $|A|=|B|$ (B) $|A|\neq|B|$（C）若$|A|>0$，则$|B|>0$（D）若$|A|=0$ 则$|B|=0$

$P_1^{-1}=\begin{matrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}$

$\begin{matrix}1&0&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{matrix}$

12. 设 AB 都是 3 阶方阵，r(A)=3，r(B)=2，则 $r\begin{pmatrix}A&E\\0&B\end{pmatrix}$=（ B ）

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 5 或 6

$PA=B$

13. 两直线 l1: $\begin{cases}x=1\\y=z\end{cases}$，l2: $\begin{cases}z=-2\\x+2y=0\end{cases}$ 的位置关系是（ B ）

（A）~~平行~~（B）异面（C）相交（D）~~垂直~~

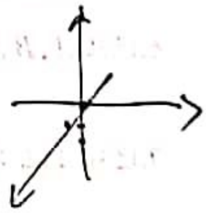
$\frac{x}{-2}=y=\frac{z+2}{0}$

$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ $(1,0,0)$ $(0,0,-2)$

14. 方程 $x^2+y^2=1$ 在空间中的图形为 C

（A）圆（B）球面（C）柱面（D）以上都不对

$(0,1,1)$ $(-2,1,0)$



15. 下列 4 个命题

（1）$x^2+y^2+z^2=1$ 是旋转面；（2）$x^2-y^2-z^2=0$ 是双叶双曲面

（3）$x^2+2y^2+3z^2=1$ 是椭球面；（4）$x^2-y^2=z$ 是双曲抛物面

正确命题的个数为（ C ） (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

期中测试答案：$-(a-b)^2$，-2，8，$\begin{pmatrix}-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}$，5，$\frac{\pi}{6}$，$2x^2-y^2-z^2=1$，-2，

ADDBBCC

姓名班级学号

哈尔滨工业大学（威海）2015/2016 年秋季学期土木工程系期中考试

代数与几何

考试形式：闭卷 试卷分值：100分 答题时间：120分钟

遵守考试纪律注意行为规范

一、填空题（每题4分，共40分）

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}=$ ~~48~~ 12　$4\times6\times2$　$4\times6\times2$

~~$(x-1)^2(x-2)=0$~~

2.

2.已知 $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x-2 & 6 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=0$,则 x= ~~1~~ $-1\ 1\ 3$

$x(x-2)(x-1)-3(x-1)$

$(x-1)[x^2-2x-3]$

3.已知 D= $\begin{vmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ \cancel{8} & \cancel{3} & \cancel{4} \end{vmatrix}$ $1\ 1\ 1$, A_{31}, A_{32}, A_{33} 是 D 中第四行各元素的代数余子式,则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=$ 0

$\vec a\times\vec b$

$\vec a\vec b+\vec c\vec a+|\vec a|^2=0$

$\vec a\vec b+\vec b\vec c+|\vec b|^2=0$

$\vec b\vec c+\vec c\vec a+|\vec c|^2=0$

4.已知 $\vec a,\vec b,\vec c$ 为单位向量，且满足 $\vec a+\vec b+\vec c=0$,则 $\vec a\cdot\vec b+\vec b\cdot\vec c+\vec c\cdot\vec a=$ $-\frac{3}{2}$

5.已知空间四点 $A(1,1,1), B(4,4,4), C(3,5,5), D(2,4,7)$,则四面体 $ABCD$ 的体积为______

6.已知 A,B,C 均为3阶方阵, $|A|=1, |B|=2, |C|=3$,则 $\left|2\left(A^TBC^{-1}\right)^3\right|=$ ~~[illegible]~~ $\frac{64}{27}$

7.已知 A,B 均为 n 阶方阵, $|A+B|=1, |A-B|=2$,则 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=$ 2　　$C^{-1}=\frac{C^*}{|C|}$　$\frac{1}{3}C^*$

8.已知 A,B 均为可逆矩阵, $|A|=1, |B|=2, |A^{-1}+B|=3$,则 $|A+B^{-1}|=$ $\frac{3}{2}$　　$AA^*=|A|E_n$

9.已知 A,B 均为非零矩阵, $R(B)=1, AB=0$,则 $R(A)\le$ ~~n-1~~　　$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

$\begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

10.已知 B= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,且 $AB=2A+B$,则 $(A-E)^{-1}=$ $\frac{BA^{-1}}{2}$　$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$|A(E+AB)|=3$　$\frac{B(E-2B^{-1})}{2}$

二、计算与证明题（共60分）

$\frac{BA^{-1}}{2}$

$|A|^2-|B|^2$　$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$　$A(E-2B^{-1})$　$\frac{2^3}{3^3}$　$|A|^3|B|^3|C^*|^3$ 8　$|C|^{3n-3}$

$(A-E)B=2A$

$|A^2-B^2|=2$

$A(B-2E)=B$　54 27　$\frac{BB-2E}{2}$ 3^6

$(A-E)\frac{BA^{-1}}{2}=E$

$(a-b)$ $\frac{-1}{b-a}$ $b-a^{(n-1)}$

$-\left(\frac{b-a+a(n-1)}{b-a}\right)\cdot(b-a)^{n-1}$

1.用克莱默法则解方程组 $\begin{cases}5x+6y=1\\ x+5y+6z=0\\ y+5z=1\end{cases}$（8 分）

$b-a$ $a-b$ $b-a$ $b-a$ $a-b$

$(b-a)^{n-1}\left[\frac{b}{a-b}-\frac{a}{b-a}(n-1)\right]$ $\frac{b+a(n-1)}{a-b}$ $-1+\frac{an}{a-b}$

$(b-a)^{n-2}(a-b-an)$ $[b+a(n-1)]$

2.计算下列行列式的值（10 分）

$$D_n=\begin{vmatrix} b & a & a & \dots & a\\ a & b & a & \dots & a\\ a & a & b & \dots & a\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a & a & a & \dots & b\end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} b-a & 0 & 0 & \cdots & a\\ 0 & b-a & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & a\\ \vdots & 0 & & & \\ a-b & 0 & \cdots & 0 & b\end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} b-a & 0 & \cdots & 0 & a\\ 0 & & & & \vdots\\ b & \cdots & & 0 & b+a\end{vmatrix}$

$\cancel{(a+b)(b-a)^{n-1}}$

3.解矩阵方程 $AX=B$,其中 $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$（10 分）

3×3 3×2

$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\\ E & F\end{bmatrix}$ $4A+C-2E=1$

$2x+2=3x-6$

$-\frac{y+3}{2}=$

$-2x-2=3y+9$

④过点 $M(-4,-5,3)$,且与直线 $L_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ 和 $L_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$ 都相交的直线方程.（10 分）

$x=-1+3t$ $\quad x=2+2t$

$y=-3-2t$ $\quad y=-1+3t$

$z=2-t$ $\quad z=-1-5t$

$\begin{cases}2x+3y+11=0\\ \cancel{2y+2=3x-6}\\ 3x-2y-8=0\end{cases}$

5.设 A 为 n 阶方阵,n 为奇数，$A^TA=E_n$, $|A|=1$,试证 $|E_n-A|=0$.（10 分）

$6x+9y+33=0$

$6x-4y+16=0$

$13y=-27$

$A^{-1}=A^T$ $\quad |E-A|$

$|(A^T-E)A|$

$|A^{-1}-E|$

6.证明以下结论（12 分）

设 A 为 n 阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵,试证: $R(A^*)=\begin{cases}n & 当R(A)=n\\ 1 & 当R(A)=n-1\\ 0 & 当R(A)<n-1\end{cases}$

哈工大威海 2015/2016 土木工程系

一、 填空题

1. 12

2. -1或1或3

3. 0

4. $-\frac{3}{2}$

5. 3

6. $\frac{64}{27}$

7. 2

8. $\frac{3}{2}$

9. n-1

10. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

二，计算题

1. 解：系数行列式 D=$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$，$D_3=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

   则$x=\frac{D_1}{D}=\frac{55}{65}=\frac{11}{13}$，$y=\frac{D_2}{D}=-\frac{7}{13}$，$z=\frac{D_3}{D}=\frac{4}{13}$

2. 解：$D_n=\begin{bmatrix} b & a & a\cdots & a \\ a & b & a\cdots & a \\ a & a & b\cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a & a & a\cdots & b \end{bmatrix}=[b+(n-1)a]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\cdots & 1 \\ a & b & a\cdots & a \\ a & a & b\cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a & a & a\cdots & b \end{bmatrix}$

$$=[b+(n-1)a]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\cdots & 1 \\ 0 & b-a & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & b-a\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots & b-a \end{bmatrix}=[b+(n-1)a](b-a)^{n-1}$$

3. 解：$X=A^{-1}B$

由初等变换法求逆矩阵$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

则$A^{-1}=\begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & -8 \\ -4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & -8 \\ -4 & -1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 15 & -3 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$

4. 解：构造平面法，得$\begin{cases} x+3z-5=0 \\ 7x-13y-5z-22=0 \end{cases}$

5. 证：设λ为 A 的特征值，则有$|\lambda E_n-A|=0=|\lambda AA^T-A|=|\lambda A|\left|A-\frac{1}{\lambda}E\right|$

由上式可知$\frac{1}{\lambda}$为 A 的特征值，由于 n 为奇数，A 由奇数个特征值，而$\frac{1}{\lambda}$,λ是成对出现的，故 1 必须为 A 的特征值，即$|E_n-A|=0$

6. 证：由$AA^*=|A|E$

(1) 当$R(A)=n$时，$|A|\neq 0, |AA^*|=|A|^n\neq 0$, 故$|A^*|\neq 0$，得$R(A^*)=n$

(2) 当 $R(A)=n-1$ 时，表示 A 至少有一个 $n-1$ 阶子式不为 0，则 A 至少有一个代数余子式 $A_{ij}\neq 0$，故 A^*中至少有一个元素不为 0，可知 $R(A^*)\neq 0$，根据 $R(A)+R(A^*)\leq n$知$R(A^*)\leq 1$，最终得 $R(A^*)=1$

(3) 当 $R(A)<n-1$ 时，说明 A 的所有 $n-1$ 阶子式都为 0，A^*中所有元素为 0，故$R(A^*)=0$

2015年小学期试题

《代数与几何》试题

$|A^*|=4^{n-1}=4^2$

一、填空题

1、设3阶方阵A的行列式$|A|=4$，则$|(A^*)^{-1}|=$ $\frac{1}{8}$。

2、设A,B为3阶矩阵,且$|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$,则$|A+B^{-1}|=$ 3　　$A^{-1}+B$

3、已知向量$a=(1,-2,3)$, $b=(2,1,0)$, $c=(6,-2,6)$，则混合积$[abc]=$ 0。

4、已知平面$x-2y-2z+4=0$与直线$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{n}$垂直，则$n=$ 2。

5、设3阶矩阵A的特征值为1，2，2，则$|4A^{-1}-E|=$ 3。

6、设3阶矩阵A的特征值互不相同，若行列式$|A|=0$，则A的秩为 2。
秩=非零特征值个数

7、设二次型$f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2)^2+(-x_1+ax_2)^2$正定,则a的取值范围是 $a\in R$ a
一切主子式>0

8. 从R^2的基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$到基$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$的过渡矩阵为$\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}$

二、选择题

1 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是 A　$(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3)$
$(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1)$

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.　　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.
　　　　　　　　　　无关　　　　　　　　$(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3)$
(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$.　　(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$.
$(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_1)$

2.设向量组I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则 A　$\alpha_1=$　β_3

(A) 若向量组I线性无关，则$r\le s$.　(B) 若向量组I线性相关，则$r>s$.

(C) 若向量组II线性无关，则$r\le s$.　(D) 若向量组II线性相关，则$r>s$

3.设A为m×n矩阵，B为n×m矩阵，E为m阶单位矩阵，若$AB=E$，则 A
m×m

(A) $r(A)=m,r(B)=m$.　(B) $r(A)=m,r(B)=n$.　(C) $r(A)=n,r(B)=m$.　(D) $r(A)=n,r(B)=n$.

4.设非齐次线性方程组$AX=\beta$的导出组为$AX=0$，则下列结论不成立的是（B）.

(A) 设u是$AX=0$的通解，η为$AX=\beta$的特解，则$\eta+u$是$AX=\beta$的通解 ✓

(B) 设ξ,η为$AX=\beta$的解，则$a\xi+b\eta$是$AX=0$的解

(C) 若$AX=\beta$有唯一解，则$AX=0$有唯一解

(D) 若$AX=\beta$有无穷多解，则$AX=0$有无穷多解

5.设m×n矩阵A的秩$R(A)=m<n$，E为m阶单位阵，则(D). C　　3.)不可能

(A) A的任意m个列向量线性无关　(B) A的任意一个m阶子式都不为0

(C) 若$BA=0$，则$B=0$　　　(D) 经初等行变换，可将A化为(E_m,O)的形式
m×n

6.设对方阵A施行初等变换得到方阵B，且$|A|\ne0$，则(D).

(A) 必有$|A|=|B|$　　(B) $|B|\ne|A|$　　(C) $|B|\ne0$

(D) |B|=0 或|B|≠0 依赖于所作的初等变换　一定线性无关　实对称阵 A

$(A-\lambda E)X=0$ ✓　7. 设 X，Y 是方阵 A 的两个属于不同特征值的特征向量，则(B)．　①线性无关

是λ下的特征向量　(A) $X^TY=0$　　(B) X 与 Y 线性无关　　②正交

同一个特征值下　(C) X+Y 也是 A 的特征向量　(D) kX 也是 A 的特征向量 $(k\neq 0)$　非零

特征向量间(线性组合)

$\lambda=0,3,3$

8.设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B

λ下: x_1 x_2

x_1+x_2 仍是

(A)合同且相似。(B)合同不相似。(C)不合同但相似。(D)既不合同也不相似。

$S\perp(4,5,6)$　　$S\perp n=(7,8,9)$

三. 求过点 M(-1, 2, 3)垂直于直线 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$，且平行于平面 7x+8y+9z+10=0 的直线方程。　$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$

$S=\lambda(S_1\times\vec{n_1})$

$=\lambda(-3,6,-3)=-3\lambda(1,-2,1)$

四. 设齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a+1$

$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 2

$a=1$　2　0
$a=2$　3　1

有公共解，求 a 的值及所有公共解。

$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\0&0&(a-1)(a-2)\end{pmatrix}$　x_3

$R=2$

$a^2-1=3(a-1)$

$a=1$　$\xi_1=k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$　　$a=2$　$\xi_2=k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$a=+1$，$a=2$

五. 设二次型

$a+1=2$　(x)　$-2k+k=3$　∴公共解　$k=-3$

$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，

$\boxed{\xi_2=\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}}$

中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12.

(1) 求 a,b 的值；

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

解；(1) $A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}$　$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1=a$

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=-4a-2b^2=-12$

$\therefore b=\pm 2$　$\because b>0$　$\therefore b=2.$

(2) $|A-\lambda E|=0$

$A=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&0\\2&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-\lambda-2-4)$

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-6x_3^2+4x_1x_3$

$=(x_1+2x_3)^2+2x_2^2-6x_3^2$

$=(2-\lambda)(\lambda^2+\lambda-6)=-(\lambda-2)^2(\lambda+3)$

$\lambda=2,2,-3.$

$\lambda=2$　$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&0\\2&0&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　x_2 x_3

~~$X=k_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$~~

$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$　$\xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=-3$　$A-\lambda E=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&5&0\\2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$　x_1　$n-r=1$

$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix}0&2/\sqrt{5}&1/\sqrt{5}\\1&0&0\\0&1/\sqrt{5}&-2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$

2012-2013 期中

一、填空题(每题 3 分，共 30 分)

1.设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&-1&-2\\4&3&3\end{pmatrix}$,则$[(-2A)^*]^{-1}=$____

2.设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵$A^*\neq 0$,若ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4是非齐次线性方程组$AX=\beta$的互不相同的解，则对应的齐次线性方程组$AX=0$的基础解系含有____个向量

3.当$\lambda=$____时，直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$与$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$相交

4. 设$\alpha_1=(1+t,1,1),\alpha_2=(1,1+t,1),\alpha_3=(1,1,t+1),\beta=(0,t,t^2)$，当$t$____时$\beta$可用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且唯一

5.$A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$，则 A对应特征值$\lambda=2$的一个特征向量$\alpha=$____

6.$D=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=$____

7.$\begin{pmatrix}1&c&0\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}^n=$____

8.$A=\begin{pmatrix}2&1&0&1\\3&-1&-2&3\\4&3&1&-2\\9&3&-1&2\\1&3&2&-1\end{pmatrix}$，则$r(A)=$____

9.设$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，且 A 相似于 Λ，则$a=$____,$b=$____

10.$\frac{x^2}{4}-y^2-z^2=-1$表示的曲面名称为____ 单叶双曲面

二、选择题(每题 3 分，共 30 分)

1.下列结论错误的是 ( )

(A)若 A 与 B 为 n 阶可逆矩阵，则 AB 可逆 (B)若 A 与 B 为 n 阶正交矩阵，则 AB 正交

(C)若 A 与 B 为 n 阶正交矩阵，则 AB 正定 (D)若 A 与 B 为 n 阶对称阵，则 AB 对称

2.假设 A 是 n 阶方阵，其秩$r<n$,则在 A 的 n 个行向量中， ( )

(A)必有 r 个行向量线性无关

(B)任意 r 个行向量线性无关

$(x_0+1)x+(y_0+1)y+\cdots$

$0 \quad 2+\frac{5}{8} \quad -1-\frac{25}{8} \quad 2+\frac{5}{8}$

$0 \quad -7 \quad 6$

(C)任意 r 个行向量都构成极大无关组

(D)任意一个行向量都可以由其他 r 个行向量线性表示

3.设A,B为方阵，分块对角阵$C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$,则$C^*=$(C) $C^{-1}|C|=C^*$

(A)$\begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix}$ (B)$\begin{pmatrix} |A|A^* & 0 \\ 0 & |B|B^* \end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix} |A||B|A^* & 0 \\ 0 & |A||B|B^* \end{pmatrix}$

4.设 A 是 n 阶矩阵，α是 n 维列向量，且$r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=r(A)$,则线性方程组(　　)

(A)$AX=\alpha$必有无穷解　　(B) $AX=\alpha$必有唯一解

(C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$=0 仅有零解　　(D) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$=0 必有非零解

$|A||B|$　　$\frac{21}{8}$

5.设数域 F 上三维列向量空间 V 上线性变换 φ 在基$\{e_1,e_2,e_3\}$下表示的

矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,则 φ 在基$\{e_3,e_2,e_1\}$下表示的矩阵是(　　)

(A)$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (B)$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

6.设二次型$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$，则(　　)

(A)$0<t<1$时，f 正定　　(B) $-2<t<1$时，f 正定

(C)$-1<t<1$时，f 正定　　(D)$-2<t<2$时，f 正定

7.设 A 是 3 阶方阵，1，-2，-1 为三个特征值，特征向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，若$P=(3\alpha_2,2\alpha_3,-\alpha_1)$,

则$P^{-1}(A^*+E)P$等于(　　)

(A) $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ (B)$\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix} -2 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$　　$-(B^{-1})^2$

8.设 A,B 均为 n 阶方阵，若 B 可逆矩阵且满足$A^2+AB+B^2=0$，则(A)　　$A(A+B)=-B^2$

(A) A可逆，$A+B$可逆　　(B) A可逆，$A+B$不可逆

$A(A+B)B=-A^2$

(C) A不可逆，$A+B$可逆　　(D) A不可逆，$A+B$不可逆

$-(A^{-1})^2(A+B)B=E$

9.设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 和 B(　　)

$B^{-1}=-(A^{-1})^2(A+B)$

(A)合同且相似　(B)合同且不相似　(C)不合同，但相似　(D)不合同也不相似

10.已知R^3的两组基$B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$,$B_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，

其中$\alpha_1=(1,1,1)^T;\alpha_2=(0,1,1)^T;\alpha_3=(0,0,1)^T$;

$\beta_1=(1,0,1)^T;\beta_2=(0,1,-1)^T;\beta_3=(1,2,0)^T$,则$B_1$，$B_2$的过渡矩阵 A 为 (　　)

(A) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & -2 & 2\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 1\\1 & -2 & 2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\-2 & 1 & 1\\1 & -2 & -2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

三、解答题(每题 8 分，共 40 分)

1.设 $A,B,AB-E$ 皆为 n 阶可逆矩阵，证明：(1)$A-B^{-1}$是可逆矩阵 (2)$(A-B^{-1})^{-1}$也可逆

2.已知向量组(Ⅰ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (Ⅱ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ (Ⅲ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$。

如果各向量组的秩分别为：$R(\text{Ⅰ})=R(\text{Ⅱ})=3, R(\text{Ⅲ})=4$

证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为 4

3.线性方程组$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3\end{cases}$。

试证：(1)若a_1,a_2,a_3,a_4两两不等，则此方程组无解。

(2)设$a_1=a_3=k, a_2=a_4=-k(k\neq 0)$，且已知$\beta_1$，$\beta_2$是方程组的两个解，其中，$\beta_1=(-1,1,1)^T, \beta_2=(1,1,-1)^T$。写出该方程组的通解。

4.$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+Cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$，秩$(f)=2$,求：

(1) C (2)用正交变换化$f(x_1,x_2,x_3)$为标准型。

6i-6k

i j k

1 1 1

6,0,-6

3 -3 3

3i+3j-3k-3k-3j+3i

5.已知平面π_1：$x-y-2z=2$；π_2：$x+2y+z=8$；π_3：$x+y+z=0$,求过π_1与π_2的交线且与平面π_3垂直的平面的方程。

1, 1, 1

1, -1, -2 1, 2, 1

3, -3, 3

6x-6z

~~x-y~~

i j k

1 -1 -2

1 2 1

3i-3j+3k

-i+2k-2j+k-j+4i

2012-2013 期中答案

一、填空题

1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$　　2. 1　　3. $\frac{5}{4}$　　4. $t \neq 0$ 且 $t \neq 3$　　5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. 81　　7. $\begin{pmatrix} 1 & nc & \frac{1}{2}n(n-1)C^2 \\ 0 & 1 & nC \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　8. 3　　9. 0,0　　10. 单叶双曲面

二、选择题

1-5 C和D ACDC　　6-10 BAAAB

三、解答题

1.(1)证明：∵AB-E 及 B 可逆 ∴|AB-E|≠0，|B|≠0

而$|AB-E|=|(A-B^{-1})B|=|A-B^{-1}|\cdot|B|\neq 0$

∴$|A-B^{-1}|\neq 0$　∴$A-B^{-1}$可逆

(2)$(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}=(A-B^{-1})^{-1}-(A-B^{-1})^{-1}(A-B^{-1})A^{-1}$

$=(A-B^{-1})^{-1}[E-(A-B^{-1})A^{-1}]=(A-B^{-1})^{-1}(E-E+B^{-1}A^{-1})$

$=(A-B^{-1})^{-1}(AB)^{-1}$

∵$A-B^{-1}$, 及 AB可逆　∴$(A-B^{-1})^{-1}$，$(AB)^{-1}$也可逆$(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$可逆

2.证明：∵$R(\text{I})=R(\text{II})$ ∴$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关

∴α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示。　设$\alpha_4=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$　①

令$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\alpha_5-\alpha_4)=0$

将①代入，得$(k_1-\lambda_1k_4)\alpha_1+(k_2-k_2\lambda_4)\alpha_2+(k_3-\lambda_3k_4)\alpha_3+k_4\alpha_5=0$

∵$R(\text{III})=4$　∴$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$线性无关

∴$\begin{cases} k_1-\lambda_1k_4=0 \\ k_2-k_2\lambda_4=0 \\ k_3-\lambda_3k_4=0 \\ k_4=0 \end{cases}$　∴$k_1=k_2=k_3=k_4=0$　∴$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性无关

∴$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为 4

3. (1)证明：设非齐次线性方程组的系数矩阵为$A=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \\ 1 & a_4 & a_4^2 \end{pmatrix}$　∴$r(A)\leq 3$

增广阵$B=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{pmatrix}$, |B|是范德蒙行列式。

$|B|=(a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_4-a_3)(a_4-a_2)(a_4-a_1)$

$\because a_1,a_2,a_3,a_4$两两不等 $\therefore |B|\neq 0$ $\therefore r(B)=4$ $\because r(A)=r(B)\therefore$无解

(2)$\because a_1=a_3=k, a_2=a_4=-k(k\neq 0)$ $\therefore$原方程组可化解为$\begin{cases} x_1+kx_2+k^2x_3=k^3 \\ x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3 \end{cases}$

此时$r(A')=r(B')=2$. 此方程组有解，且对应的齐次线性方程组的基础解系中含有一个解向量。$\therefore \xi=\beta_1-\beta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$为对应的齐次线性方程组的解

故原方程组的通解$X=\beta_1+C\xi=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$(C 为任意常数)

4. (1)二次型f的矩阵$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&C\end{pmatrix}$ $\because r(A)=2$ $\therefore |A|=0$ $\therefore C=3$

(2)$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda&-1&3\\-1&5-\lambda&-3\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{vmatrix}4-\lambda&4-\lambda&0\\-1&5-\lambda&-3\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}$

$\xrightarrow{c_1-c_2}\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\-1&6-\lambda&-3\\3&-6&3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$ $\therefore \lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$

通过求解得λ_1对应的特征向量，$X_1=(-1,1,2)^T$;

λ_2对应的特征向量，$X_2=(1,1,0)^T$;

λ_3对应的特征向量，$X_3=(1,-1,1)^T$

X_1,X_2,X_3单位化，得$e_1=\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}; e_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; e_3=\frac{-\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

令$C=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{3}&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$,则 C 为正交阵。通过正交变换 X=CY.

得标准型$f=4y_2^2+9y_3^2$

5. 解：设过π_1与π_2交线的平面束方程为$x-y-2z-2+(x+2y+z-8)=0$

即$(\lambda+1)x+(2\lambda-1)y+(\lambda-2)z-2-8\lambda=0$

法向量$\overrightarrow{n_1}=(\lambda+1,2\lambda-1,\lambda-2)$

平面π_3的$\overrightarrow{n_2}=(1,1,1)$，由题知$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$得 $\lambda=\frac{1}{2}$ $\therefore$平面方程$\frac{3}{2}x\cancel{-\frac{3}{2}y}-6=0$

1 1 0 0
0 3 4 5
1 1 2 2

$|(A^{-1})^*|$ $\quad A^*A=|A|E_n$ $\quad \frac{A^*}{|A|}=A^{-1}$ $\quad (A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}$

2017《代数与几何》试题

一、填空题

1. 行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&3&4&4\\1&4&6&7\\1&1&2&2\end{vmatrix}$，则$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=$________.

$A_{41}\ A_{42}\ A_{43}\ A_{44}$ $\quad 3$ $\quad \frac{1}{|A|}A$ $\quad \left|\left(\frac{A^*}{|A|}\right)^*\right|$

2. 设 3 阶方阵 A 的行列式|A|=4，则$|(A^*)^{-1}|=$__$\frac{1}{16}$__.

3. 设 A,B 为 3 阶矩阵,且|A|=3,|B|=2,$|A^{-1}+B|=2$,则$|A+B^{-1}|=$__3__

4. 设方阵A满足$A^2-2A-2E=0$，则$(A-2E)^{-1}=$__$\frac{A}{2}$__

5. 设 n 阶方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$,则$|A|=$__0__

$\left(\frac{1}{|A|}\right)^n|A|$ $\quad \left|\frac{A^*}{|A|}\right|\left(\frac{A^*}{|A|}\right)$ $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

6. 设A为 3 阶正交矩阵，$\alpha=(0,3,-4)$,则向量$A\alpha$的长度＝________

7. 设10×14矩阵A的秩为8，则$AX=0$的解向量组的秩为________

8. 设 3 阶矩阵 A 的特征值互不相同，若行列式|A|=0，则 A 的秩为______.

9. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，2，则$|4A^{-1}-E|=$______.

10. 设二次型$f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2)^2+(-x_1+ax_2)^2$正定，则 a 的取值范围是______

二、选择题

1. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$.　(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$.

$\left(\frac{1}{|A|}\right)^n|A|^{n-1}$ $\quad \frac{1}{|A|}|A|$

2. 6 阶方阵A的秩$R(A)=3$，A^*为其伴随阵，则$R(A^*)=$(A)

(A) 0　(B) $n-1$　(C) 1　(D) n

3. 若矩阵$A_{4\times5}$有一个 3 阶子式为 0，则 ~~B~~ A

(A) 秩(A)≤2 (B) 秩(A)≤3 (C) 秩(A)≤4 (D) 秩(A)≤5

4. 设 m×n 矩阵 A 的秩 R(A)=m<n，E 为 m 阶单位阵，则(　).

(A) A 的任意 m 个列向量线性无关　(B) A 的任意一个 m 阶子式都不为 0

(C) 若 BA=0，则 B=0　(D) 经初等行变换，可将 A 化为(E_m,O)的形式

5. 设对方阵 A 施行初等变换得到方阵 B，且|A|≠0，则(C).

(A) 必有|A|=|B|　(B) |B|≠|A|

(C) |B|≠0 (D) |B|=0 或|B|≠0 依赖于所作的初等变换

6. n元齐次线性方程组$AX=0$有非零解的充分必要条件是(　　)

(A) $R(A)\le n$ (B) $R(A)>n$ (C) $R(A)\ge n$ (D) $R(A)<n$

7. 设非齐次线性方程组 AX=β 的导出组为 AX=0，则下列结论不成立的是（）.

(A) 设 u 是 AX=0 的通解，η为 AX=β 的特解，则η+u 是 AX=β 的通解

(B) 设ξ,η为 AX=β 的解，则 aξ+bη 是 AX=0 的解

(C) 若 AX=β有唯一解，则 AX=0 有唯一解

(D) 若 AX=β有无穷多解，则 AX=0 有无穷多解

8.设 X，Y 是方阵 A 的两个属于不同特征值的特征向量，则(　).

(A) $X^T Y=0$　　(B) X 与 Y 线性无关

(C) X+Y 也是 A 的特征向量　(D) kX 也是 A 的特征向量

9. n阶方阵A具有n个不同特征值是A与对角矩阵相似的（）条件。

(A) 充分条件(B)必要条件(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要

10.设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B

(A)合同且相似。(B)合同不相似。(C)不合同但相似。(D)既不合同也不相似。

三、设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-1\\2x_1+kx_2-2x_3=0\\kx_1+2x_2+x_3=k\end{cases}$

（1）k 为何值时，方程组有唯一解、无解；

（2）k 为何值时，方程组有无穷多解？并求出其通解。

四、求正交矩阵P将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$化为标准型，并写出相应的标准型。

2017《代数与几何》试题答案

一 填空题

1. 18

2. 1/16

3. 3

4. $\frac{A}{2}$

5. 0

6. 5

7. 6

8. 2

9. 3

10. $a\neq -2$

二 选择题

1.A 2.A 3.A 4 C 5.C 6.D 7.B 8.B 9.A 10.$\boxed{B}$

三

解：(1) 系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & k & -2\\ k & 2 & 1\end{bmatrix}$，增广矩阵 $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & k & -2 & 0\\ k & 2 & 1 & k\end{bmatrix}$

初等变换得 $A\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2-k & 0\\ 0 & 0 & 1+k\end{bmatrix}$ $B\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & k & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1+k & 0\end{bmatrix}$

无解时 R(A)+1=R(B)

k=−1时，R(A)=R(B)=2 不符

k=2 时， R(A)=2 R(B)=3

唯一解 R(A)=R(B)=3

$k\neq -1$，2

(2) 当 R(A)=R(B)<3 时，方程有无穷多组解

k=−1 得其同解线性方程组为 $\begin{cases}x_1=0\\ x_2=2\end{cases}$

取特解$\alpha=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$，其导出组的基础解系为$\beta=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

得 X=$\alpha+k\beta=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ k为任意常数

四

解 二次型的矩阵 A=$\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}$

由矩阵 A 的特征多项式$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-4&-2&-2\\-2&\lambda-4&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-4&-\lambda&0\\-2&\lambda-4&0\\0&0&\lambda-2\end{bmatrix}$

$=(\lambda-2)(\lambda^2-10\lambda+16)$ 得$\lambda_1=2$，$\lambda_2=8$，$\lambda_3=2$

当$\lambda=2$时，$(2E-A)x=0$，由$\begin{bmatrix}-2&-2&0\\-2&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$得特征向量$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

当$\lambda=8$时，$(8E-A)x=0$,由$\begin{bmatrix}4&-8&0\\-2&4&0\\0&0&6\end{bmatrix}$得特征向量$\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

由于不同特征值对应的特征向量已经正交，只需要单位化，同一特征值对应的特征向量需要正交化。

令$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，则$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$

单位化$\gamma_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}$，$\gamma_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，$\gamma_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix}$，得 P=$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{3}&\frac{2}{\sqrt{5}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\0&\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}$

标准型为$f(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2+8y_2^2+2y_3^2$

-2

哈尔滨工业大学（威海）2014/2015学年秋季学期

代数与几何 试题卷（A）

(1,1,0) (0,-2,2)

$2\sqrt{2}$

i	j	k
1	1	-1
1	-1	1

考试形式：闭卷 答题时间：120（分钟）本卷面成绩占课程成绩60%

一、填空题（每题4分，共24分）得分 0,0,1

1. 点（1，2，3）在直线x=y=z上的投影的坐标是（ 2，2，2 ） $i-k-j+k-j-i$

(1,1,1)

2. 直线x=y=z和直线$\begin{cases}x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$的距离是（ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ）

$\frac{x}{0}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-2}$

-2j -2k

i	j	k
0	-2	-2
1	1	1

3. 设向量α=（1，2，3，4，5）^{T}，则$|\alpha\alpha^T-E_5|$=（ ）

4. 设n阶正交矩阵A是正定矩阵，则A=（ ）

$-2i-2j+2k+2i$

5. 向量α=（2，3，4）关于基α_1=（1，2，3），α_2=（2，3，1），α_3=（3，1，2）的坐标是（ ）

$-2j+2k$

6. 直线x−1=y=z绕z轴旋转一周所成的曲面的方程是（ ） (0,-2,2)

二、选择题（每题3分，共18分，答案须填到下面表格内，否则无效）

1. 将3阶方阵A的第2行加到第1行得矩阵B，再将矩阵B的第1列的−1倍加到第2列得矩阵C，记P=E（1，2（1）），则（ ）

(A)$C=P^{-1}AP$ (B)$C=PAP^{-1}$ (C)$C=P^TAP$ (D) $C=PAP^T$

2. 设A是n阶方阵，则A可逆的充要条件是（ ）

1）存在n阶方阵C，使CA=E。2）A的行向量组线性无关

3）线性方程组AX=B有唯一解、4）0不是A的一个特征值

正确的有（　　）

（A）4个.（B）3个（C）2个（D）1个

3．设A是m*n矩阵，B是n*m矩阵，则线性方程组ABX=0（　　）

（A）当n>m时只有零解.（B）当n>m时有非零解

（）当m>n时只有零解.（D）当m>n时有非零解

4．设实向量$\alpha=(a,a_2,a_3)^T$，$\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$，$\gamma=(C_1,C_2,C_3)^T$，则xoy面上3条直线$a_ix+b_iy+c_i=0$，（其中$a_i^2+b_i^2\neq 0$，i≠1，2，3）交于一点的充要条件是（　）

（A）α，β，γ线性相关

（B）α，β，γ线性无关

（C）α，β，γ线性相关，且α，β线性无关

（D）向量组α，β与向量组α，β，γ的秩相等

5．矩阵$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$的关系是（　　）

（A）等价而不合同，（B）合同而不相似

（C）相似而不合同.（D）合同且相似

6．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$的标准形是（　　）

(A)$2y_1^2+y_2^2+3y_3^2$（B）$-2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$（C）$2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$ (D)$2y_1^2-y_2^2$

三、设 n 阶方阵 A 的秩 R（A）＝r

证明：存在 m 阶方阵 B，使 R（B）＝n－r 且 AB＝BA＝0

四、设 3 阶实对称矩阵 A 的每一列元素之和都是 3，秩 R（A）＝1

求一个正交矩阵 P，使$P^{-1}AP$为对角矩阵

五、向量组α_1＝（1，1，1，1）^{T}，α_2＝（1，2，3，4）^{T},α_3＝（1，4，9，16）^{T}，

α_4＝（1，3，7，13）^{T}求向量组的及一个极大无关组，并用极大无关组表示该组中其余向量

六、设 3 阶实方阵 A＝（a_{ij}）$_{3*3}$，$a_{11} = -1$，$A^T = A^*$，$\beta = (1,0,0)^T$，求线性方程组 AX＝β的解

2014/2015秋答案

一、

1. (2，2，2)

2. $\frac{1}{\sqrt{6}}$

3. 54

4. E_n

5. $\left(\frac{7}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$

6. $X^2+y^2-2z^2-2z-1=0$

二、BADCDC

三、$R(A)=r$，则存在 n 阶可逆矩阵 P, Q, 使 $PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，于是$A=p^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$，可取$B=Q\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}p$，满足要求

四、由题意 $A(1,1,1)^T=3(1,1,1)^T$，

于是$\lambda_1=3$，$T_1(1,1,1)^T$，为A的特征值和特征向量，单位化得$P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$，由$R(A)=1$，知$\lambda_2=\lambda_3=0$，设$x=(x_1,x_2,x_3)^T$为对应的特征向量，因$T_1\perp x$，故$\chi_1+x_2+x_3=0$，得$T_2=(-1,1,0)^T$，$T_3=(-1,0,1)^T$，规范正交化得$P_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T$，$P_3=(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T$

令$p=(P_1,P_2,P_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，则 P 是正交矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

五、$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，该向量组秩为 3，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是向量组的一个极大无关组，$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

六、由$A^T=A^*$，知$A_{ij}=a_{ij}$，i，j=1,2,3

则$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=1+a_{12}^2+a_{13}^2>0$，故 AX=β有唯一解，$x=A^{-1}\beta$，又$A'A=A^*A=|A|E$，取$|A|=1$，故$A^{-1}=A'$，$a_{12}=a_{13}=0$，因此$x=A'\beta=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

哈尔滨工业大学（威海）2013/2014 学年秋季学期

代数与几何 试题卷（A）

考试形式：闭卷 答题时间：120（分钟）本卷面成绩占课程成绩 60%

一．填空题（每题 3 分，共 18 分）

1.直线$\begin{cases} y=z \\ x=0 \end{cases}$绕 y 轴旋转一周所形成的旋转曲面方程为（　　　　　　　）

2.从R^2的基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$到基$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$的过渡矩阵为（　　　　　　　）

3．设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$分别是矩阵 A 的 3 个互不相等的非特征值对应的特征向量，则向量组 $A\alpha_1$，$A(\alpha_1+\alpha_2)$，$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$ 的秩为（　　　　）

4．设 A 是 n 阶矩阵，ξ是 n 维非零列向量满足$A^2\xi=2\xi, A^3\xi=6\xi$，则 A 必有特征值（　　　）

5．已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+a(x_2+\chi_3)^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$，经正交变换 X ＝PY 可化为标准型$2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$，则 a=（　　　　　　）

6．设二次型$f(x_1,x_2)=(x,+2x_2)^2+[-x_1+ax_2]^2$正定，则 a 的取值范围是（　　　　　　　）

二、选择题（每题 2 分，共 16 分）

1．下列 4 个命题：（1）x＋y＋z 是柱面；（2）$x^2-y^2-z^2=0$是双叶双曲面；

（）$\chi^2+2y^2+3z^2=1$是椭球面；（4）$x^2-y^2=z$是双曲抛物面

正确命题的个数为（　　　　　　）

（A）1　（B）2　（C）3　(D)4

2.设$Ax=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$有基础解系$(1,0,2,-1)^T$，A 中去掉第 i 列（i＝1，2，3，4）的矩阵记为A_i，则下列方程组有非零解的是（　　　　　　）

(A)$A_1Y=0$　(B)$A_2Y=0$　(C)$A_3Y=0$　(D)$A_4Y=0$

3.设ξ_1,ξ_2,ξ_3是 AX=0 的基础解系，则下列向量组也是 AX=0 的基础解系的是（　　　　）

(A)$\alpha_1=-\xi_2-\xi_3,\alpha_2=\xi_1-\xi_3,\alpha_3=\xi_1+\xi_2$

(B)$\alpha_1=\xi_2+\xi_3,\alpha_2=\xi_1+\xi_3,\alpha_3=\xi_1+\xi_2$

(C)ξ_1,ξ_2,ξ_3的一个等价向量组

(C)ξ_1,ξ_2,ξ_3的一个等秩向量组

4. 设 A 是三阶非零矩阵，满足$A^2=0$，若线性非齐次方程组 AX=b 有解，则其线性无关解向量个数为（　　　　）

（A）1（B）2 (C) 3 (D) 4

5.设非齐次线性方程 Ax=b 的通解为$k_1(1,2,0,-2)^T+k_2(4,-1,-1,-1)^T+(1,0,-1,1)^T$，则满足$x_1=x_2,x_3=x_4$的解是（　　　　）

A)$(2,2,-1,-1)^T$　(B)$(2,2,1,1)^T$　(C)$(1,1,2,2)^T$　(D)$(-2,-2,-1,-1)^T$

6 设 A=$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$是实矩阵，则下列条件不是 A 相似于对角阵的充分条件的是（　　　　）

（A）$ad-bc<0$（B）b，c 同号（C）b=c（D）b,c 异号

7. 设 A，B 都是 n 阶实对称可逆矩阵，则（　　　　）

（A）A 与 B 相似（B）A 与 B 合同（C）A^2与B^2相似（のA^2与B^2合同

8. 设 A 是 3 阶实对称知，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是 A 的三个特征值，且满足$a\geq\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3\geq b$，则当$\mu$取何值时，$A-\mu E$一定是正定矩阵（　　　　）

（A）$\mu<b$　(B) $\mu>b$　(C) $\mu<a$　(D)$\mu>a$

三（7分）求下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ (2+a)x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + (3+a)x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + (4-a)x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

四、（6分）设$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 14 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$问是否存在 X 使得 AX=B,若存在，求所有的 X，若不存在，说明理由

五、（6分）设 X=(1,2,…n)，$A = x^Tx$，求 A 的所有特征值

六、（7分）设 A 是 3 阶实对称矩 r（A）=2，且满足 AB=2B，其中$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$，求正交矩 Q 和对角矩阵 Λ，使得$Q^TAQ = \Lambda$

2013/2014 学年秋答案

一、

1. $x^2+z^2=y^2$

2. $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

3. 3

4. 3

5. -2

6. $a\neq -2$

二、C B B B A D D A

三、 $a\neq 0$，$(0,0,0,1)^T$；a=0，$x=k_1(-1,1,0,0)^T+k_2(-1,0,1,0)^T+k_3(-1,0,0,1)^T+(1,0,0,0)^T$

四、 $(A,B)\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}0 & 6 & 1 & -1 & 1 & -6\\ 1 & -11 & 0 & 2 & -2 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$，*所以*$A\begin{pmatrix}7\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ $(Ab_3=X_3)$*无解*

故方程无解，X不存在

五、 $r(A)=1\Rightarrow AY=0$的解空间维数为n-1，又$A^T=A$，故 0 是 $n-1$ 重特征根，$tr(A)=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，得$\lambda=\sum_{i=1}^{n}i^2$是单根

六、$\lambda=2$: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\rightarrow$（正交化）$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\lambda=0$: $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta_3$，单位化得$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

2012年代几期末考试试题

一、填空题

1. 曲线$\begin{cases}2y^2-z=1\\ x=0\end{cases}$绕z轴旋转而成的旋转曲面方程为________。

2. 设向量组$a_1=(1,1,1)$，$a_2=(1,2,3)$，$a_3=(1,3,t)$,当t=________时，a_1,a_2,a_3线性相关。

3. 若n阶方阵A满足$|A|=0$，$A^*\neq 0$,则$A^*X=0$（A^*为A的伴随矩阵）的基础解系一定是由________个线性无关的解向量构成。

4. 设n维向量组a_1，a_2，a_3线性相关,则向量组a_1+a_2，a_2+a_3，a_3+a_1线性________。

5. R^2的基$\alpha_1=(1,1)^T$，$\alpha_2=(0,1)^T$到基$\beta_1=(1,-1)^T$，$\beta_2=(1,2)^T$的过渡矩阵为________。

6. 二阶方阵A与B相似，A的特征值为1,2，则$3A^2-2A+E$的全部特征值分别为________，$|B^2+2E|=$________。

7. 设矩阵A=$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，若A与B相似，则x=________，y=________。

8. 设f=$x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3=2x_2x_3$是正定二次型，则a的取值范围是________。

二、选择题

1.设A、B都n是阶矩阵，下列结论错误的是（　　）

（A）若A、B都是可逆矩阵，则AB也是可逆矩阵

（B）若A、B都是正交矩阵，则AB也是正交矩阵

（C）若A、B都是正定矩阵，则AB也是正定矩阵

（D）若A、B都是正交矩阵，则$A^{-1}B^{-1}$也是正交矩阵

2.设A是$m\times n$矩阵，AX=0是非齐次线性方程组AX=β的导出组，则（　　）

（A）若 AX=0 只有零解，则 AX= β 有唯一解

（B）若 AX=0 有非零解，则 AX= β 有无穷多解

（C）若 r（A）=n,则 AX= β 必有唯一解

（D）若 AX= β 有无穷多解，则 AX=0 必有非零解

3.若 n 阶方阵 A 与 B 相似，则（　　）

（A）λE-A=λE-B　　（B）A 与 B 有相同的特征值与特征向量

（C）A 与 B 相似于同一对角阵　　（D）对任意常数 t，tE-A 与 tE-B 相似

4.设 A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，则（　　）

（A）A 与 B 既合同又相似　　（B）A 与 B 合同但不相似

（C）A 与 B 相似但不合同　　（D）A 与 B 既不相似又不合同

5.若 n 阶方阵 A 正定，则下列结论不正确的是（　　）

（A）A 的所有元素全为正　　（B）A^{-1} 也是正定矩阵

（C）$|A|>0$　　（D）A 为满秩矩阵

三、已知线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = b \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$，当 a，b 为何值时，方程组（1）无解；（2）有唯一解；（3）有无穷多解。并在无穷多解时求其通解。（13 分）

四、设向量组 $\alpha_1=(1,2,3,0)^T$，$\alpha_2=(7,0,14,3)^T$，$\alpha_3=(2,-1,0,3)^T$，$\alpha_4=(5,1,6,2)^T$，$\alpha_5=(2,-1,4,1)^T$，

（1）求向量组的秩；（2）求向量组的一个极大无关组。（8 分）

五、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，

（1）用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准型，并求所作正交变换。

（2）方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面。（16 分）

六、设 A 为实对称阵，B 为正定阵，若 BA 的特征值都大于零，证明 A 为正定阵。（3 分）

2012年代几期末考试试题答案

一．　填空题

1. $2x^2+2y^2-z-1=0$

2. 5

3. n-1

4. 相关

5. $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

6. 2，9　18

7. 0，1

8. A>5

二．　选择题 1.C 2.D 3 D 4.B 5.A

三．解：系数矩阵 A=$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & b\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\rightarrow$

$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & a & 0 & b-1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

(1)　$R(A)+1=R(B)$时，方程组无解，得 $a=0$，$b\neq 1$

(2)　$R(A)=R(B)=3$ 时，方程组有唯一解，得 $a\neq 0$，b 为任意常数

(3)　$R(A)=R(B)<3$ 时，方程组有无穷解，得 $a=0$，$b=1$

由 A=$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,B=$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$得其同解方程组为$\begin{cases}x_1+x_3=1\\ x_2-x_3=0\end{cases}$

令$x_3=0$ 得其特解为 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$，*由于*$3-R(A)=1$,

令$x_3=1$，*得其导出组的基础解系为*$\beta=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

通解为 X=$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$，k 为任意常数

四．

解：（1）$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]=\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\2&0&-1&1&-1\\3&14&0&6&4\\0&3&3&2&1\end{bmatrix}$，化简可得$R(A)=4$

（2）故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$*为向量组的一个极大无关组*

五．

解：（1）二次型的矩阵 A=$\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\lambda-5&\lambda-5&\lambda-5\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$

知 A 的特征值为-5，-1，-1

对于$\lambda_1=5$解$\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$，得$T_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，单位化得$p_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix}$

对于$\lambda_2=\lambda_3=-1$，解$\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$，得$T_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$，$T_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

正交化得$\beta_1=T_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$，$\beta_2=T_3-\frac{(\beta_1,T_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

单位化得$P_2=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$，$P_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$，则正交矩阵 P=$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$

(2)旋转双叶双曲面

六．证：由 B 正定知 B=C^TC,*C为可逆阵*，BA=$C^TCA=C^TCAC^{-1}C$,可知CAC^{-1}

与BA合同，故CAC^{-1}*也为正定阵，由此得A为正定阵*

学号：______ 班级：______ 姓名：______

哈尔滨工业大学 2005 /2006 学年 秋季学期

空间解析几何和线性代数 试题卷

考试形式（开、闭卷）：闭答题时间：120（分钟） 本卷面成绩占课程成绩 80%

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	卷面总分	平时成绩	课程总成绩
分数											

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1.在空间直角坐标系中，点 A（2,4,3）到直线 x-1=y-2=z-3 的距离为______

2.若 n 阶方阵 A,B,C 满足 AB=CB,|A-C|≠0，则 B=______

3.已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\-1&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\b&2&0\\a&c&3\end{pmatrix}$,则 R(A)=______

4.已知 $PA=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\1&2&-3\end{pmatrix}$ 其中 P 是 3×3 可逆矩阵，则 X______是齐次线性方程组 AX=0 的通解

5.若 $\xi=(1,1)'$ 是方阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\a&0\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，则____,____是 A 的全部特征值

二．选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 A 是 m×n 矩阵，对于线性方程组 AX=β，下列结论正确的是（ ）

(A)若 R(A)<n,该方程组有无穷多解　　(B) 若 R(A)=m,该方程组有解

(C)若 R(A)=n,该方程组有唯一解　　(D) 若 m<n,该方程组无解

2. 设有 n 阶矩阵 A，n 维列向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$;（Ⅱ）$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$，则（ ）

(A)若(Ⅰ)相关，则(Ⅱ)相关　　(B) 若(Ⅱ)相关，则(Ⅰ)相关

(C)若 A 可逆，则(Ⅱ)无关　　(D) 若(Ⅱ)无关，则 A 可逆

3.xoy坐标面上的双曲线$\begin{cases}2x^2-9y^2=3\\z=0\end{cases}$绕x轴旋转一周，所生成的旋转曲面的方程为(　　)

(A) $2(x+z)^2-9y^2=3$　　(B) $2x^2-9(y+z)^2=3$

(C) $2x^2+2z^2-9y^2=3$　　(D) $2x^2-9y^2-9z^2=3$

4.已知1,1是2阶矩阵A的特征值，则必有　　()

(A) A与$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$相似　　(B) A$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$与相似

(C) 若A≠E_2,则A不能相似对角化　　(D) A可以相似对角化

5.已知实矩阵B=$(b_{ij})_{3\times3}$,实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3)^2+(b_{21}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3)^2+(b_{31}x_1+b_{32}x_2+b_{33}x_3)^2$$

(　　)

(A) f(x_1,x_2,x_3)正定的充要条件是|B|≠0　　(B) f(x_1,x_2,x_3)不正定

(C) f(x_1,x_2,x_3)正定的充要条件是B正定　　(D) f(x_1,x_2,x_3)正定

三、(本题5分)当a等于何值时，方程组$\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=a,\\x_1+ax_2+x_3=1,\\ax_1+x_2+x_3=a.\end{cases}$无解，有唯一解，有无穷解？当有无穷解时，写出通解。

四、(本题5分)求直线$\begin{cases}x-y+z+1=0\\-3x+y+z-9=0\end{cases}$在平面$x+y+z=1$上的投影直线的方程。

五、(本题 5 分)已知 A 与 B 相似，其中，B=. $\begin{pmatrix} 1 & 17 & 19 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

(1)求$|\,|A'A|\,|$；

(2)求一个与 A 相似的对角矩阵 D;

(3)求 E_3—A 的特征多项式

六、(本题 5 分)已知实二次型 $f(x,y,z)=-x^2-y^2-z^2+2xy+2xz+2yz$

(1)给出 f 的矩阵 A;

(2)试用正交变换化 f 为标准型，并求出所用的正交变换矩阵

(3)方程 $f(x,y,z)=1$ 表示空间直角坐标系中何种二次曲面

七、(本题 5 分)设 n 阶行列式|A|=1, β 是 n×1 矩阵，b 是常数，$\beta' A^{-1}\beta - \mathrm{b} + 1 = 0$,

$$P=\begin{bmatrix} A & 0 \\ -\beta' A' & |A| \end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix} A & 0 \\ \beta' & b \end{bmatrix}.$$

(1)求|PQ|.　　(2)求Q^{-1}的表达式

八、(本题 5 分)已知列向量组α_1,α_2线性无关，且α_1,α_2可由列向量β_1,β_2,β_3,线性表示，

试证：存在$i\in\{1,2,3\}$使得向量组$\alpha_1,\alpha_2,\beta_i$与向量组$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$等价。

2005-2011 年试卷答案在 2011 年试题之后

哈尔滨工业大学 2006 /2007 学年 秋季学期

空间解析几何和线性代数 试题卷

考试形式（开、闭卷）：闭答题时间：120（分钟） 本卷面成绩占课程成绩 80%

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	卷面总分	平时成绩	课程总成绩
分数											

一、填空题(每小题 2 分,共 10 分)

1. 若 4 阶方阵 A 的特征值为 0,1,2,3，且 A 与 B 相似,则行列式$|B^2+E|$=________

2. 过点(-1,2,3),垂直于直线$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$且平行于平面 7x+8y+9z+10=0 的直线方程为

____

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 3 维欧氏空间的标准正交基，则模$|\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3|$=________

4. 若 A 为 4 阶方阵，且 R(A)=3,则方程组$A^*X=0$的基础解系含____个线性无关的解向量。

5. yoz 坐标面上的抛物线$\begin{cases} z^2=y \\ x=0 \end{cases}$绕 y 轴旋转一周，所生成的旋转曲面的方程为____

____

二、选择题(每小题 2 分,共 10 分)

1.设 A 是 m×n 矩阵，则线性方程组 AX=b 有解的充分条件是 ( )

(A)R(A)=m　　(B)A 的行向量组线性相关

(C) R(A)=n　　(D) A 的列向量组线性相关

2.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$正定的充要条件为 ( )

(A)t>1　　(B) t>0

(C) t>-1　　(D) t>$\frac{1}{2}$

3.设 A=$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,B=$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,C=$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.则 A 与 B ( )

(A)A 与 C 相似且合同　(B) A 与 B 相似且合同

(C) B 与 C 相似且合同　(D) B 与 C 相似且合同

4.设 α,β 是 4 维非 0 列向量，A=E+$\alpha\beta^T$,则在 A 的特征值中，至少有　(　)

(A)1 个 1　(B)2 个 1

(C)3 个 1　(D)4 个 1

5.设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是 3 维向量，则下列命题正确的为　(　)

(A)如果α_1,α_2线性相关,α_3,α_4线性相关，则 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$线性相关

(B)如果$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_4,\alpha_2+\alpha_4,\alpha_3+\alpha_4$线性无关

(C)如果α_4不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

(D) 如果α_3不能由α_1,α_2线性表示，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

三、(本题 5 分)求过点(3,1,-1)且过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程。

四、(本题 5 分)设向量组：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\a-3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\a\\6\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$

(1) a为何值时，该向量组的秩等于 3.

(2)求该向量组的一个极大无关组.

(3)用所求极大无关组表示其他向量.

五、(本题 5 分)当a等于何值时，方程组$\begin{cases}ax_1-x_2-x_3=1\\-x_1+ax_2-x_3=-a\\-x_1-x_2+ax_3=a^2\end{cases}$无解，有唯一解，有无穷解？

当有无穷解时，写出通解。

六、(本题 5 分)已知实二次型 $f(x,y,z)=3x^2+3y^2+2xy+4xz-4yz$

(1)并写出 f 的矩阵；

(2)求正交变换 X=PY,将 f 化为标准型，并写出所用的正交矩阵 P

(3)方程 $f(x,y,z)$=1 表示空间直角坐标系中何种二次曲面

七、(本题 5 分)设n阶矩阵 A 正定，X 是任意 n 维非 0 列向量，证明：秩$\begin{pmatrix} A & X \\ X^T & 0 \end{pmatrix}=n+1.$

八、(本题 5 分)设 A,B 是n阶矩阵，$f(\lambda)=|\lambda E-B|$是B 的特征多项式.

证明：矩阵$f(A)$可逆的充分必要条件为 B 的特征值都不是 A 的特征值。

哈尔滨工业大学 2007 /2008 学年 秋季学期

空间解析几何和线性代数______试题卷

考试形式（开、闭卷）：闭答题时间：120（分钟） 本卷面成绩占课程成绩 80%

题号	一	二	三	四	五	六	卷面总分	平时成绩	课程总成绩
分数									

一、填空题(每题 3 分,共 30 分)

1. 已知$|A_3|=\frac{1}{2}$，A^*为A的伴随矩阵，则$|A^*-3A^{-1}|=$______________

2.设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3$

必线性____________关.

3.若 A 为 n 阶方阵，满足$A^2+3A+2E=0$，则$(A-E)^{-1}=$______________

4.若 A 为 m 阶方阵，若 B 为 n 阶方阵，则$\begin{vmatrix}0 & A\\ B & 0\end{vmatrix}=$______________

5.若 4 阶方阵 A 的伴随矩阵的秩数A^*的秩数为 1，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系必

含有__________个解向量。

6.若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为 3 维正交向量组，且$\alpha_i$的长度$|\alpha_i|$分别为 1,2,3，则行列式

$|\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_3|$的值为______________.

7.二次型$f(x_1,x_2)=3x_1^2+3x_2^2+2x_1x_2$在条件$x_1^2+x_2^2=1$下的最大值为___________

8.已知空间中四点 $A(1,1,1)$,$B(4,4,4)$,$C(3,5,5)$,$D(2,4,7)$,则四面体 $ABCD$ 的体积为___________

9.空间直线$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面的方程为__________________________

10.从R^2中基$\alpha_1=(1,0),\alpha_2=(1,-1)$到基$\beta_1=(1,1),\beta_2=(1,2)$的过度矩阵为___________

二、选择题(每题 3 分，共 21 分)

1.下列结论错误的为 （ ）

(A)若 A 与 B 均为 n 阶可逆矩阵，则 AB 可逆

(B)若 A 与 B 均为 n 阶正交矩阵，则 AB 正交

(C)若 A 与 B 均为 n 阶正定矩阵，则 AB 正定

(D)若 A 与 B 均为 n 阶对称矩阵，且 A 与 B 可换，则 AB 对称

2.设$A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&2&0\\2&6&0\\0&0&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&1&0\\0&4&1\\0&0&8\end{pmatrix}$则必有 (　　)

(A)A 合同于 B,且 A 相似于 B　　(B) B 合同于 C,且 B 相似于 C

(C)A 合同于 C,且 A 相似于 C　　(D) A 合同于 B,且 B 相似于 C

3.设矩阵 A 为$n(n\geq 2)$阶可逆矩阵，A 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到 B，A^*,B^*分别为 A,B 的伴随矩阵，则 (　　)

(A) A^*的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到B^*

(B) A^*的第 1 行的-2 倍加到第 2 行得到B^*

(C) A^*的第 2 行的 2 倍加到第 1 行得到B^*

(D) A^*的第 2 行的-2 倍加到第 1 行得到B^*

4.设 A,B 均为 n 阶方阵，则错误的为 (　　)

(A)AB 与 BA 的行列式相等　　(B)AB 与 BA 的迹相等

(C)AB 与 BA 的秩数相等　　(D)AB 与 BA 具有相同的特征值

5.已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，且$\alpha_4$不能$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则下列结论正确的 (　　)

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$必线性无关　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$必线性相关

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$必线性无关　　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$必线性相关

6.设 B 是 3 阶非零矩阵，且 B 的每一列都是方程组$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+tx_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$的解，设$r(B)=r$，

则 (　　)

(A)r=1　(B) r=2　(C) r=3　(D) r 与 t 相关

7.若 λ、μ 为 n 阶方阵 A 的两个不同的特征值，ξ_1,ξ_2为 A的对应于 λ 的线性无关的特征向

量，η 为 A 的对应于 μ 的特征向量，则ξ_1,ξ_2,μ必为(　　)向量组　　　　　　　　(　　)

(A)线性相关　(B)线性无关　(C)正交　　(D)标准正交

三、(本题满分 8 分)已知平面$\pi_1: x-y-z=2; \pi_2: x+y+z=1; \pi_3: x+y-z=0$,求过$\pi_1$与$\pi_2$的交线且与平面$\pi_3$垂直的平面方程。

四、(本题满分 10 分)求正交线性变换 $X=PY$ 把二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$化为标准型，并指出$f(x_1,x_2,x_3)=1$时所表示的空间图形的名称。

五、(本题满分 5 分)设 A 为 n 阶实对称阵，$AB+B^TA$为正定阵，B^T为B的转置，证明A可逆。

六、(本题满分 6 分)设 n 阶方阵 A 满足$A^2=E$。

(1)试证：A 的特征值只能为 1 或-1.

(2) A 能否相似对角化？若能，写出其相应的对角阵。

哈尔滨工业大学 2008 /2009 学年 秋季学期

空间解析几何和线性代数 试题卷

考试形式（开、闭卷）：闭答题时间：120（分钟） 本卷面成绩占课程成绩 80%

题号	一	二	三	四	五	六	卷面总分	平时成绩	课程总成绩
分数									

一、填空题(每空 2 分，共 18 分)

1. 已知 A,B 都是 n 阶方阵，A^*为A的伴随阵，且知$|A|=2$，$|B|=-3$，则$|2A^*B^{-1}|=$______

2.A 为 n 阶方阵，且$|A|\neq 0$，A^*为其伴随阵，E_n为n阶单位阵，现已知 A 有一特征根为 λ，

则$(A^*)^2+E_n$必有一特征根为______

3.点$M_0(1,1,1)$到平面π：$2x+2y-z+9=0$的距离为______

4.$B=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}$,$A$和 B 相似，则$|2A^2-A|=$______

5.在R^2中，有基底$(1,1)^T,(1,0)^T$到基底$(1,2)^T,(-1,0)^T$的过渡矩阵为______

6.球面$x^2+y^2+z^2=9$和平面$x-y=1$的交线在yoz面上的投影曲面的方程为

______

7.已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+Cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为 2，则必有

C=______,且此二次型对应的矩阵的特征值分别为______,当$f(x_1,x_2,x_3)=6$

时，它代表三维空间的曲面名称是______

二、选择题(每题 3 分，共 18 分)

1. n 维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m(m<n)$线性无关，则另一组 n 维列向量组$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$也是

线性无关的充分必要条件是 ( )

(A) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$可有另一向量组$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$线性表示。

(B) 向量组$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$可有另一向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$线性表示。

(C) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$和向量组$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$等价。

(D) 矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$和向量组$A=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m)$等价。

2. A,B 皆为 n 阶方阵且相似，则正确的结论是 ( )

(A)二者的特征矩阵相同。

(B)具有相同的特征值和特征向量。

(C)二者相似于同一个对角阵。

(D)对任意的实数 t,矩阵tE_n-A都和矩阵tE_n-B相似。

3.已知向量组X, Y, Z, W是线性无关的，则 ( )

(A)$X+Y, Y+Z, Z+W, W+X$也是线性无关的。

(B)$X-Y, Y-Z, Z-W, W-X$也是线性无关的。

(C)$X+Y, Y+Z, Z+W, W-X$也是线性无关的。

(D)$X+Y, Y+Z, Z-W, W-X$也是线性无关的。

4.非齐次线性方程组 AX=b 中未知量的个数为 n,方程个数为 m,系数阵 A 的秩为 r,则 ( )

(A) $r=m$时，方程组 AX=b 一定有解。

(B) $r=n$时，方程组 AX=b 有唯一解。

(C) $n=m$时，方程组 AX=b 有唯一解。

(D) $r<m$时，方程组 AX=b 有无穷个解。

5.设 A 为三阶非零方阵，且 A 的每一列都是方程组$\begin{cases}2x+2y+3z=0\\4x+5y+6z=0\\6x+6y+Cz=0\end{cases}$的解，C 的值待定，

则矩阵 A 的秩 ( )

(A)取决于 C 的值。 (B)只能是 1。

(C) 只能是 2。 (D)只能是 3。

6. A 为 n(n≥3)阶方阵，A^*为其伴随阵，则下列结论中错误的是 ( )

(A)若 A 为列满秩，则A^*亦然 (B)若 A 的秩为 n-1，则A^*的秩为 1

(C)A 若为退化的，则A^*亦然 (D)若 A 的秩为 1，则A^*的秩为 n-1

三、判断题(正确打 √，错误打×，每题 2 分，共 18 分)

1. A, B皆为 n 阶实正定阵，则$A+B, AB$亦然。 ( )

2. A, B皆为 n 阶实对称阵，具有相同的特征值，则二者既相似又合同。 ( )

3. A, B皆为 n 阶方阵，具有相同的特征值，而且这 n 个特征值还两两互异，

则 A 和 B 一定相似，但不一定合同。 ( )

4. n 阶方阵 A 的平方是零阵，则$E_n - A$一定为非退化阵。 ( )

5. A 为 n 阶实对称阵，且知$AB + B^T A$正定(B^T表示 B 的转置),则 A 比为非奇异阵. ( )

6. 实矩阵 A,B,C 的阶数分别为$m \times p, m \times n, n \times p$,三者满足$A = BC$,还知道 B 为列满秩阵，

那么矩阵 A 为列满秩阵的充分必要条件为 C 仍然是列满秩阵。 ( )

7. n 阶方阵 A 为幂幺阵，即$A^2 = E_n$,则 A 的特征值只能是+1 和-1，而且 A 必可相似对角

化。 ( )

8 A, B 皆为 n 阶方阵，且 A 为可逆阵，则 AB 必和 BA 相似。 ( )

9. A, B 皆为 n 阶非零方阵，但其乘积为零阵，则二者没有一个会是可逆的。 ( )

四、证明题(共 10 分)

1.已知A, B 皆为 n 阶实正定阵，请证明BAB也为正定阵。

2005-2011 年试卷答案在 2011 年试题之后

2.已知 A 为列满秩的$m \times n$阶实矩阵，请证明：$A^T A$也为正定阵。

五、计算题(共 6 分)

求直线L:$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-z=0 \end{cases}$在平面$\pi$：$x-y-z=1$上的 投影的方程。

六、计算题(共 10 分)

请用正交线性变换化如下二次型为标准型，要求给出所求的正交线性变换，其中

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

哈尔滨工业大学 2009 /2010 学年 秋季学期

空间解析几何和线性代数 试题卷

考试形式（开、闭卷）：闭答题时间：120（分钟） 本卷面成绩占课程成绩 80%

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	卷面总分	平时成绩	课程总成绩
分数											

填空	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案										

一、填空题（每空 3 分，共 30 分）

1、已知 A 是 3 阶方阵，A^* 为 A 的伴随阵，且知$|A|=4$，则$\left|(\frac{1}{4}A)^{-1}-\frac{1}{2}A^*\right|=$（ ）

2、已知 A 是 5 阶方阵，A^* 为 A 的伴随阵，当 A 的秩等于 3 时，$A^*X=0$ 的基础解系中有（ ）向量

3、直线 L：$\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2}$ 与平面 π：$x+4y-z+2=0$的2为（ ）

4、已知$\alpha_1=(2,1,1)^T$，$\alpha_2=(-1,2,7)^T$，$\alpha_3=(1,-1,-4)^T$，$\beta=(1,3,\ t)^T$，则当 t 取数值（ ）时，β 可以由α_1，α_2，α_3线性表示。

5、已知 2 是 n 阶方阵 A 的一个特征值，E 是 n 阶单位矩阵，则$\left|-6E+A+A^2\right|=$（ ）

6、$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ -8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$的值是（ ）

7、设$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$，当 a, b, c（其中 a, c 为正数）满足条件（ ）时，A 为正交阵。

8、设 m 行 n 列矩阵 A 行满秩，若有矩阵 B 满足 B A = 0，则 B =（ ）

9、设 5 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，E 是 5 阶单位矩阵，当 A 的秩 R（A）= 2 时，

A－E的秩是（　　　）

１０、二次曲面$2x^2+2y^2+z^2+2xy=1$表示的曲面的名称是（　　　　）

二、选择题（每题２分，共２０分）

１、设向量组α_1，α_2，α_3线性无关，则下列向量组线性相关的是（　　　）

（A）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$　　（B）$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-2\alpha_3$，$\alpha_3-3\alpha_1$

（C）α_1，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$　　（D）以上都不正确

２、设$A=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-2&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$则有（　　　）

（A）A与B相似且合同　　（B）B与C相似且合同

（C）A与C相似且合同　　（D）以上都不正确

３、设A为n阶方阵，且A不是零矩阵，有n阶方阵B使得AB=0，则下列正确的是（　　）

（A）|B|≠0　　（B）|A|=0

（C）|A|≠0　　（D）|B|=0

4、设X是n阶方阵A的特征向量，P是n阶可逆矩阵，下面正确的是（　　）

（A）PX是$P^{-1}AP$的特征向量　　（B）P^{-1}X是$P^{-1}AP$的特征向量

（C）PX是A的特征向量　　（D）以上都不正确

5、设A是3阶方阵，E是3阶单位矩阵，若2A-E、A-E和A-2E都是不可逆矩阵，A的行列式的值是（　　）

（A）-2　　（B）-1

（C）0　　（D）1

6、A、B都是同阶方阵，下面说法不正确的是（　　　）

（A）若A、B都是正定矩阵，则AB是正定矩阵

（B）若A、B都是正定矩阵，则$A^{-1}+B$是正定矩阵

（C）若A、B都是正定矩阵，则$A^{-1}B^*$是正定矩阵

（D）若A、B都是正定矩阵，则A^*、B^*是正定矩阵

７、设方程组$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1\\x_1-x_2+x_3=0\\x_1+x_2+\lambda x_3=-1\end{cases}$，当λ取什么值时方程组有解？选（　　　　）

（A）　λ＝0　　（B）λ＝-1

（C）λ≠－1　　（D）λ＝－2

8、已知α_1，α_2，α_3是三维向量组空间R^3的基，设$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，

$\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$也是基，则由$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$到$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$的过渡矩阵是（　　　　）

（A）$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$　　（D）都错

9、已知空间四点A（1,2,3）、B（2,4,1）、C（1，－3,5），D（4，－2,3），以A，B，C，D为顶点的四面体的体积是（　　　　）

（A）5／6　　（B）10／3

（C）5／3　　（D）5／2

10、设ξ_1，ξ_2，ξ_3，ξ_4是AX＝0的基础解系，则该方程组的基础解系还可以表示为（　　　　）

（A）ξ_1，ξ_2，ξ_3，ξ_4的一个等阶向量组　（B）$\xi_1+\xi_2$，$\xi_2+\xi_3$，$\xi_3+\xi_4$，$\xi_1+\xi_4$

（C）$\xi_1-\xi_2$，ξ_4，$\xi_3-\xi_2$，$\xi_2-\xi_3+\xi_4$　（D）ξ_1，$\xi_1+\xi_2$，$\xi_2+\xi_3$，$\xi_4-\xi_1$

三、解答题（5分）

在空间直角坐标系中，将XOY坐标面上的双曲线$4x^2-9y^2=36$绕X轴旋转一周，求所产生的旋转曲面方程，指出曲面的方程。

四、证明题（共10分）

1、设A是n阶反对称矩阵，E是n阶单位矩阵，证明：$E-A^2$是正定矩阵。（5分）

2、设 3 阶矩阵 A 满足 $A^2+A-2E=0$（E是3阶单位矩阵），且A≠E证明：

$[R(A-E)-1][R(A+2E)-1]=0$.（5分）

五、解答题（共１０分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_3x_1$，设A是该二次型的矩阵，且｜A｜＝5，求（1）a 的值，用正交变换Ｘ＝ＰＹ将二次型化为标准型，写出正交变换矩阵。

六、解答题（５分）

方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+bx_2+x_4=-1 \\ x_1+2bx_2+x_3=2 \end{cases}$，当 a， b 为何值时有唯一解？有无穷多解？无解？并写出有无穷多解时的通解。

工业大学 2010 /2011 学年 秋季学期

空间解析几何和线性代数 试题卷

考试形式（开、闭卷）：闭 答题时间：120（分钟） 本卷面成绩占课程成绩 80%

题号	一	二	三	四	五	六	卷面总分	平时成绩	课程总成绩
分数									

一、填空题(每题 3 分，共 18 分)

1. 若$A=\begin{vmatrix}1&5&4&3\\2&4&4&1\\3&3&3&0\\7&1&2&1\end{vmatrix}$,则$5A_{11}+A_{21}+3A_{31}+A_{41}=$____________

2. 原点关于平面$x+2y+3z+7=0$的对称点为__________

3. 若α，β均为五维非零列向量，且$A=\alpha\beta^T$,则$AX=0$ 基础解系中的解向量的个数为____

4. 在R^2中，从基底$(1,1)^T$，$(1,0)^T$到基底$(1,2)^T$,$(0,2)^T$的过渡矩阵为__________

5. 矩阵A与$\begin{vmatrix}1&4&3\\0&2&2\\0&0&3\end{vmatrix}$相似，并且$B=A^2-2A+3E$,则$|B|=$__________

6. 直线$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$绕 z 轴旋转所得曲面方程为__________

二、选择题(每题 3 分，共 18 分)

1. 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$均为四维列向量，且$|\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\beta_1|=m,|\alpha_1\quad\alpha_3\quad\alpha_2\quad\beta_2|=n$,

   则$|\alpha_3\quad\alpha_2\quad\alpha_1\quad\beta_1+\beta_2|$为 (　　)

   (A)$m+n$　　(B)$m-n$　　(C)$-m+n$　　(D)$-m-n$

2. α可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示但不能由$\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则 (　　)

   (A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性相关　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性无关

   (C) α_1必可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关　　(D) α_1必不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

3. 若A,B为同阶可逆矩阵，则下列叙述正确的是　（　　）

(A)$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$　　(B)$|A+B|=|A|+|B|$

(C)$(A+B)^T=A^T+B^T$　　(D) $(A+B)^*=A^*+B^*$

4. 矩阵$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$可逆，则方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=a_{13} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=a_{23} \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2=a_{33} \end{cases}$　（　　）

(A)解唯一　(B)解不唯一　(C)无解　(D)无法判断

5. 若$A=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}, B=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, C=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,则　（　　）

(A)A 与 B 相似,B 与 C 等价　　(B) A 与 B 合同,A 与 C 相似

(C)A 与 C 合同,B 与 C 等价　　(D) A 与 B 合同,B 与 C 相似

6. 下列正确的是　（　　）

(A)若矩阵 A 的特征值都是零，则|A|=0

(B)若X_1,X_2均为 A 的特向量，则$k_1X_1+k_2X_2(k_1,k_2$不全为零)也是 A 的特征向量

(C)n阶正交矩阵A的特征值比为±1

(D)$kE-A$与$kE-A^T$有相同的特征值

三、(本题 10 分)已知$L_1:\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$，$L_2: x=1+2t; y=-2-3t; z=5+4t$,

(1)判断直线L_1,L_2是否共面

(2)若共面，求出L_1,L_2所在平面的一般方程形式

2005-2011 年试卷答案在 2011 年试题之后

四、(本题 10 分)设 A 为3×5的行满秩实矩阵，若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为$AX=b$的线性无关的解向量，

证明：$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$是$AX=0$的基础解系。

五、(本题 10 分)若 A 为反对称实矩阵，证明:$E-A^2$为正定矩阵。

六、(本题 14 分)设$f=X^TBX$,其中$B=\begin{vmatrix}2&4&0\\2&2&0\\0&0&5\end{vmatrix}$,$X=(x_1\quad x_2\quad x_3)^T$

(1)写出二次型f的矩阵 A

(2)利用正交二次变换$X=PY$把二次型f化为标准型，请写出所用的正交变换即对应的标准型

(3)写出方程$f=1$所表示的空间曲面名称

哈尔滨工业大学 2005 /2006 学年 秋季代几答案

一、

$\sqrt{2}$　2　.0　3. $R(A)=\begin{cases}2, a=-1\\ 3, a\neq -1\end{cases}$　4. X=k$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,k 为任意常数　5　.0, 1

二、

1.B　2.A　3.D　4.C　5.A

三、解：$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}=-(a+2)(a-1)^2$

(1)当 a≠1 且 a≠-2 时，|A|≠0，此方程有唯一解；

(2)当 a=-2 时，R(A)=2,R(A|β)=3,此方程组无解

(3)当 a=1 时，R(A)=R(A|β)=1<3,此方程组有无穷多解。

此时，$(A\mid\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$，所以

$$X=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$,(k_1,k_2 为任意常数。)

是此方程组的通解

四、解：设通过该直线 L 并且与平面 π：x+y+z=1 垂直的平面 π_1 的方程为

$$\lambda_1(x-y+z+1)+\lambda_2(-3x+y+z-9)=0.$$

$$则(\lambda_1-3\lambda_2)+(-\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2)=0,得\lambda_1=\lambda_2$$

故 π_1 的方程为:x-z+4=0,所求投影的直线方程为 $\begin{cases}x+y+z-1=0\\ x-z+4=0\end{cases}$

五、解：(1)因为 A 与 B 相似，所以|A|=|B|,故 $|A'A|=|A|^2=|B|^2=(-2)^2=4$

(2)因 $|\lambda E_3-B|\begin{pmatrix}\lambda-1 & -17 & -19\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & -9 & \lambda+1\end{pmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$

所以 B 有 3 个互不相同的特征值-1,1,2。故 B 相似于

D=$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，从而 A 相似于对角阵 D=$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(3)因为 A 与 B 相似，所以 E_3-A 与 E_3-B 相似，从而

$$|\lambda E_3-(E_3-A)|=|\lambda E_3-(E_3-B)|=\begin{vmatrix}\lambda&17&19\\0&\lambda+1&0\\0&9&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)$$

六、解：(1)A=$\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

(2)1. $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&-1\\-1&\lambda+1&-1\\-1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)^2$,A 的特征值为-2,-2,1

2.对 λ=-2，解$(-2E_3-A)$X=0.得 A 的属于特征值-2 的特征向量$T_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

$T_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.标准正交化得：$P_1=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix}$,$P_2=\begin{pmatrix}-\sqrt{6}/6\\-\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/6\end{pmatrix}$

对 λ=1，解(E_3-A)X=0。得 A 的属于特征值 1 的特征向量$T_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，标准正交化得：

$P_1=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\end{pmatrix}$

(3)另 P=$(P_1P_2P_3)$,X=$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$,Y=$\begin{pmatrix}\overline{x}\\\overline{y}\\\overline{z}\end{pmatrix}$,则正交变换 PY 使得二次型 f 化为

f=$-2\overline{x}^2-2\overline{y}^2+\overline{z}^2$,f$(x,y,z)$=1,即$-2\overline{x}^2-2\overline{y}^2+\overline{z}^2$=1,空间直角坐标系中的旋转双曲面。

七、解：1.|P|=$\begin{vmatrix}A&\beta\\-\beta'A&|A|\end{vmatrix}$=$|A|^2=1$. |Q|=$\begin{vmatrix}A&\beta\\\beta'&b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&\beta\\0&b-\beta'A^{-1}\beta\end{vmatrix}$=$\begin{vmatrix}A&\beta\\0&1\end{vmatrix}$=|A|=1

|PQ|=|P||Q|=1

2.

$$(Q|E_{n+1})=\left(\begin{matrix}A&\beta\\\beta'&b\end{matrix}\middle|\begin{matrix}E_n&0\\0&1\end{matrix}\right)\to\left(\begin{matrix}A&\beta\\0&b-\beta'A^{-1}\beta\end{matrix}\middle|\begin{matrix}E_n&0\\-\beta'A^{-1}&1\end{matrix}\right)\to\left(\begin{matrix}A&0\\0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}E_n+\beta\beta'A^{-1}&-\beta\\-\beta'A^{-1}&1\end{matrix}\right)$$

$$\to\left(\begin{matrix}E_n&0\\0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}A^{-1}+A^{-1}\beta\beta'A^{-1}&-A^{-1}\beta\\-\beta'A^{-1}&1\end{matrix}\right),$$

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}+A^{-1}\beta\beta'A^{-1}&-A^{-1}\beta\\-\beta'A^{-1}&1\end{pmatrix}$$

八、解：因α_1可由β_1，β_2，β_3线性表示，可设$\alpha_1 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3$.

由α_1, α_2线性无关知$\alpha_1 \neq 0$，故k_1, k_2, k_3不全为0，设$k_1 \neq 0$.

于是β_1可由$\alpha_1, \beta_2, \beta_3$线性表示，从而$\beta_1, \beta_2, \beta_3$与$\alpha_1, \beta_2, \beta_3$等价。

因α_2可以$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性表示，从而可由$\alpha_1, \beta_2, \beta_3$线性表示。

记$\alpha_2 = l_1\alpha + l_2\beta_2 + l_3\beta_3$.由$\alpha_1, \alpha_2$线性无关知$l_2, l_3$不全为0，设$l_2 \neq 0$,

则β_2可由$\alpha_1, \alpha_2, \beta_3$线性表示，从而$\alpha_1, \beta_2, \beta_3$与$\alpha_1, \alpha_2, \beta_3$等价，

故$\beta_1, \beta_2, \beta_3$与$\alpha_1, \alpha_2, \beta_3$等价。

另解：记$(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$.

由α_1, α_2线性无关知，$2=R(\alpha_1, \alpha_2) \leq R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \leq 2$.不妨$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$,

于是$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix}$可逆，进而由$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix}$,

$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ 知向量组$\alpha_1, \alpha_2, \beta_3$与向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$等价。

哈尔滨工业大学 2006 /2007 学年 秋季代几答案

一、

1.100　2.$x+1 = \frac{y-2}{-2} = z-3$　3.3　4.3 个　5.$x^2+z^2=y$

二、ADBCC

三、解：$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 8i - 9j - 22k$

$8(x-3)-9(y-1)-22(z+2)=0$,8x-9y-22z-59=0

四、解：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & a & 2 \\ 2 & 2 & a-3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{a=3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) $a=3$时该向量组的秩为3.

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$是向量组的一个极大无关组

(3) $\alpha_3 = -\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2$

五、解：$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a-2)(a+1)^2$

(1)当 $a \neq -1$ 且 $a \neq 2$ 时，此方程有唯一解；

(2)当 ~~田~~：$a=2$时．$R(A)=2$　$R(A|\beta)=3$

(3)当 $a=-1$ 时，$R(A)=R(A|\beta)=1<3$,此方程组有无穷多解。

此时，$(A|\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$，所以

$X=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，($k_1,k_2$为任意常数是此方程组的通解)。

六、解：(1)$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

(2)1.$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & -2\\ -1 & \lambda-3 & 2\\ -2 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda+2)$

A 特征值为 4,4,-2

2.对$\lambda=4$，解(4E-A)X=0.得 A 的属于 4 的特征向量为$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$标准正交化得$P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\\ 0\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$.

对$\lambda=-2$，解(-2E-A)X=0.得 A 的属于-2 的特征向量为$\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$，标准正交化得$P_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$

3.令 $P=(P_1P_2P_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$为正交矩阵，则正交变换 X=PY 使二次型 f 化为标准型 $f=4x_1^2+4y_1^2-2z_1^2$

(3)方程 $f(x,y,z)=1$，即$4x_1^2+4y_1^2-2z_1^2=1$表示空间直角坐标系中的旋转单叶双曲面

七、证：$\begin{pmatrix}E & 0\\ -X^TA^{-1} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & X\\ -X^T & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & X\\ 0 & -X^TA^{-1}X\end{pmatrix}$，因为 A 正定，所以$A^{-1}$也正定，则

$\begin{vmatrix}A & X\\ -X^T & 0\end{vmatrix}=|A-X^TA^{-1}X|\neq 0$

八、证：设$\lambda_i(i=1\sim n)$是矩阵 B 的特征值，则

$f(\lambda)=|\lambda E-B|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$

$f(A)=\prod_{i=1}^{n}(A-\lambda_i E)$,

$|f(A)|=\prod_{i=1}^{n}|A-\lambda_i E|$

∴f(A)可逆<=> $|f(A)|\neq 0$ <=> $|\lambda_i E-A|\neq 0$ <=> $\lambda_i, i=1\sim n$都不是 A 的特征值

哈尔滨工业大学(威海)代几 2007/2008 秋季学期期末试题答案

一、(1) $-\frac{125}{4}$　(2) 相　(3) $-\frac{A+4E}{6}$　(4) $(-1)^{mn}|A||B|$　(5) 1

(6) 4, 12　(7) 4　(8) 3　(9) $x^2+y^2-5z^2=0$　(10) $\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$

二. (1) C　(2) A　(3) B　(4) C　(5) B　(6) D　(7) B

三: π_1与π_2的交线为 $\begin{cases}x-y-z=2\\x+y+z=1\end{cases}$ 平面束方程表示为 $x-y-z-2+\lambda(x+y+z-1)=0$

故: $(1+\lambda)x+(\lambda-1)y+(\lambda-1)z-\lambda-2=0$ 由题意: $\vec{n}=(1+\lambda,\lambda-1,\lambda-1)$

π_3的法向量 $\vec{n_3}$ $(1,1,-1)$. $\vec{n}\cdot\vec{n_3}=1+\lambda+\lambda-1-\lambda+1=0$ 得 $\lambda=-1$

故平面方程为: $2y+2z+1=0$

四. f的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ 令 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&1\\0&\lambda-1&0\\1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3-(\lambda-1)=0$

可知A的特征值分别为 0, 1, 2

对于$\lambda_1=0$. $-A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=1$. $E-A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda_3=2$　$2E-A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

施密特正交化得: 令 $\beta_1=\xi_1$　$\beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_1,\xi_2)}{(\xi_1,\xi_1)}\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$　$\beta_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

再令 $p_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$　$p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$　$p_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ 为正交矩阵

故经正交变换 $X=PY$, 原二次型f化为 $f=X^TAX=Y^T\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}Y=y_1^2+2y_2^2$

当 $f=1$ 时 $y_1^2+2y_2^2=1$. 即为椭圆柱面

五. 证明: 反证若A不可逆, 则 $|A|=0$ 即0为A的一个特征值

又 $|AB|=|A||B|=0$. 故 AB中的一个特征值为0

同理 B^TA 的特征值也包含 0. $|B^TA|=0$

故 $AB+B^TA$ 的特征值中包含 0

故 $AB+B^TA$ 不是正定矩阵, 与已知矛盾

故 A 可逆

二、(1) $\because A^2=E$ ．$A^2-E=0$ 设 A 的特征值为 λ ．则：$\lambda^2-1=0$，$\lambda=\pm1$

(2) 由(1)知 A 的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$．原题之改证 $(n-R(\lambda_1E-A))+(n-R(\lambda_2E-A))=n$

即改证 $R(E-A)+R(E+A)=n$

$(E-A)(E+A)=E^2-A^2=0$ 　　故 $R(E-A)+R(E+A)-n\le0$

$E-A+E+A=2E$ 　　故 $R(E-A)+R(E+A)\ge R(2E)=n$

故可得 $R(E-A)+R(E+A)=n$

故 A 可相似对角化

哈工大（威海）2008/2009 秋 代几 期末试题答案

一、(1) $-\frac{1}{3}\cdot2^{2n-1}$ (2) $\frac{|A|^2}{\lambda^2}+1$ (3) 4 (4) 15 (5) $\begin{pmatrix}2&0\\-1&-1\end{pmatrix}$ (6) 略 (7) 3；9，4，0；椭圆柱面

$\begin{cases}2y^2+z^2+2y-8=0\\x=0\end{cases}$

二、C．D．C．A **B** D

三、× × √ × √ × √ √ ×

四、(1) $BAB=C^TCDD^TC^TC=C^T(CD)(CD)^TC=[(CD)^TC]^T[(CD)^TC]$ 所以 BAB 正定

(2) $(A^TA)^T=A^TA$ 所以 A^TA 对称 由于：$R(A)=n$ $\therefore AX\ne0$

所以 $(AX)^T(AX)=X^TA^TAX>0$ 所以 A^TA 为正定阵

五．L在π上的投影可视为平面π与过直线L且垂直于π的平面π₁的交线．设π₁：$x+y+z-1+\lambda(x-z)=0$

其法向量为 $\vec{n}_1(1+\lambda,1,1-\lambda)$．π的 $\vec{n}(1,-1,1)$ 　$\vec{n}_1\cdot\vec{n}=2\lambda-1=0$．得 $\lambda=\frac{1}{2}$ $\therefore$ π₁：$3x+2y+z-1=0$

即投影方程为 $\begin{cases}3x+2y+z-1=0\\x+y-z=1\end{cases}$

六、已知 $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 则 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0$ 得 $\lambda_1=1$．$\lambda_2=4$

当 $\lambda=1$ 时 $(E-A)X=0 \Rightarrow \alpha_1=(-1,1,0)^T$．$\alpha_2(-1,0,1)^T$．$\beta_1=\alpha_1=(-1,1,0)$．$\beta_2=(-1,2,-1)^T$

$\lambda_2=4$ 时 $\alpha_3=(1,1,1)^T$

可得 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{0}{\sqrt2}&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$

$Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$

$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$．

哈工大(威海) 代数 2009/2010 秋 期末试题答案

一. (1). 2. (2) 5个 (3) 略 (4). 8 (5) 0. (6) 420 (7) $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{\sqrt{3}}{2}, c=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(8) 0 (9) 3 (10) 椭球面

二. D C D B. D $\begin{matrix}A\\C\end{matrix}$ C B C D

三. 解: 设双曲线上任一点坐标为 $(a, b, 0)$, 其绕x轴旋转时的点为 $M(x, y, z)$ 则易知 $x=a$,

且 $b=\sqrt{y^2+z^2}$ 得 $b^2=y^2+z^2$ 又∵ $4a^2-9b^2=36$ 故旋转后的曲面方程为 $4x^2-9(y^2+z^2)=36$

四. 1. 由题意: $A^T=-A$. $E-A^2=E+A(-A)=E+AA^T$ 故 $(E-A^2)^T=E^T+AA^T=E-A^2$

故 $E-A^2$ 为对称阵. 又对任意非零向量 α. $\alpha^TAA^T\alpha=(\alpha^TA)(A^T\alpha)=(A^T\alpha)^T(A^T\alpha)>0$

故 $-A^2$ 为正定矩阵 故 $E-A^2$ 为正定矩阵

2. 由题意知 $(A-E)(A+2E)=0$ $R[(A-E)(A+2E)]\geq R(A-E)+R(A+2E)-3$

即 $R(A-E)+R(A+2E)\leq 3$

又∵ $A\neq E$, 故 $A-E\neq 0$ $R(A-E)>0$ 又∵ $A+2E$ 不可逆 ∴ $R(A+2E)<3$

五. (1) 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-1&2\\2&2&a\end{pmatrix}$ $|A|=-a+8+8+4-4a-4=5$

得 $a=\frac{21}{5}$

(2) 略

六. 当 $1-b(a+1)\neq 0$ 时. $-1+2ab\neq 0$ 且 $3-4ab+3b\neq 0$ ∴ 有唯一解

当 $1-b(a+1)=-1+2ab=0$ 且 $3-4ab+3b\neq 0$ 时. 无解

当 $1-b(a+1)=-1+2ab=3-4ab+3b=0$ 时. 有无穷解

$$\begin{pmatrix}a&1&1&0&1\\1&b&0&1&-1\\1&2b&1&0&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&a+1&-2a&4a-3\\1&0&-1&2&-4\\0&0&1-b(a+1)&-1+2ab&3-4ab+3b\end{pmatrix}$$

哈尔滨工业大学(威海)代几2010-2011秋季期末试题答案

一. (1) 36 (2) $(1,-2,-3)$ (3) 4. (4) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (5) 0 (6) $x^2+y^2-4z^2=1$

二. C C C C A (6) A.D

三. (1) L_1方向向量 $\vec{s_1}$ $(3,2,-2)$ $M_1(7,2,1)$; L_2方向向量 $\vec{s_2}$ $(2,-3,4)$ $M_2(1,-2,5)$

故 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix}=0$ 故L_1、L_2共面

(2) 设平面法向量为 $\vec{n}$, 则 $\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=(2,-16,-13)$

令 $\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}=\lambda$

则 $x=3\lambda+7$, $y=2\lambda+2$, $z=-2\lambda+1$

令 $\begin{cases} 3\lambda+7=1+2t \\ 2\lambda+2=-2-3t \\ -2\lambda+1=5+4t \end{cases}$ 得 $\lambda=-2$, $t=0$ 交点 $M(1,-2,5)$ 故平面一般方程为 $2(x-1)-16(y+2)-13(z-5)=0$

四. ∵ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $AX=b$ 的线性无关的解向量

∴ $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_2-\alpha_3$ 为 $AX=0$ 的基础解系

且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 因此 $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_2-\alpha_3$ 也线性无关. 因此 $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_2-\alpha_3$ 是 $AX=0$ 的基础解系

五. 由题意知 $A^T=-A$. $E-A^2=E+A\times(-A)=E+AA^T$

故 $(E-A^2)^T=(E+AA^T)^T=E-A^2$ 故 $E-A^2$ 为对称阵

又对于任意的非零向量 α, $\alpha^TAA^T\alpha=(\alpha^TA)(A^T\alpha)=(A^T\alpha)^T(A^T\alpha)\geq 0$ 故 $-A^2$ 为正定阵

又∵ E 为正定阵 ∴ $E-A^2$ 为正定阵

六. (1) $f=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=2x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+6x_1x_2$ 故 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}=(5-\lambda)[(2-\lambda)^2-9]=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=5$, $\lambda_3=-1$

当 $\lambda=5$ 时, $\xi_1=(1,1,0)^T$, $\xi_2=(0,0,1)^T$, $\lambda=-1$ 时 $\xi_3=(1,-1,0)^T$

易知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 正交. 规范得 $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为正交阵.

原二次型可化为 $f=X'AX=Y'\begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & -1 \end{pmatrix}Y=5y_1^2+5y_2^2-y_3^2$

(3) $5y_1^2+5y_2^2-y_3^2=1$ 为单叶双曲面.