哈工大《代数与几何》

哈工大网盘计划简介

1.项目初衷

鉴于（1）哈工大各类 QQ 群内学习资料多且繁杂，而文件文字太多会导致文件被 tx 屏蔽或者降低 QQ 群信用星级；（2）校内诚信复印和纸张记忆垄断；（3）很多营销号在卖资料且售价很高；（4）学长学姐的自编材料很好，还想分享给下一届；等问题，网盘计划应运而生！哈尔滨工业大学网盘计划**旨在将窝工的各类学习资料进行归类整理，并且以网盘的形式发出来**，历时一年，现已小成，扫描了上百份校内复印店试题文档，归类整理了近 40 个 G 的学习资料给大家，已经花费上千元，现入不敷出，如果您希望网盘计划继续运营下去的话，可通过以下方式进行捐赠。

QQ支付

推荐使用微信支付

2.网盘计划成就（密码 1920）

哈工大网盘计划

密码1920

哈工大PPT模板（密码1920）

群名称:哈工大2021新生先修交流群

群　号:738474622

腾讯自动屏蔽以上链接，请用浏览器扫一扫

17 级期末复习—20171226,28

第四章

1. 向量组线性相关与线性无关 （7 个结果）

（2011-B ）. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则向量组 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_3$, $\beta_2=s\alpha_2-\alpha_1$,

$\beta_3=t\alpha_3-\alpha_2$ 线性相关的充要条件是______________.

（2008）设 n 阶矩阵 A 的非零互异特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$, 对应的特征向量分别为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$, 又有齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$, 试问:当 $1\le m\le s$ 时, 向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m,\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_m+\eta_m$ 是否线性无关,证明你的结论.

（2007） 设实矩阵 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n)_{m\times n}$ ，$R(A)=n$ ，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 A 的列向量组. 实向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m-n}$ 是齐次线性方程组 $A'X=0$ 的基础解系. 试证：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m-n}$ 线性无关.

2. 向量组的极大无关组，秩，线性表示

（2012A）已知向量组

$\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$, $\alpha_2=(0,3,1,2)^T$, $\alpha_3=(3,0,7,14)^T$, $\alpha_4=(1,-2,2,0)^T$ ，

$\alpha_5=(2,1,5,10)^T$ ，则该向量组的极大无关组是【 】

A）α_1, α_2, α_3 ;　　（B）α_1, α_2, α_4 ;

（C）α_1, α_2, α_5 ;　　（D）α_1, α_2, α_4, α_5 .

3. 向量组等价的判定

（2011-A ）设向量组（I）: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且可由向量组（II）: $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性表示. 证明：（1）向量组（II）$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关；（2）向量组（I）与（II）等价

（2005）已知列向量组 α_1,α_2 线性无关，且 α_1,α_2 可由列向量组 β_1,β_2,β_3 线性表示，试证明：存在 $i\in\{1,2,3\}$ 使得向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_i$ 与向量组 β_1,β_2,β_3 等价。

4. 向量空间（基 维数 坐标）; 欧式空间（内积，正交）

（2013）已知 $(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$, $(0,1,0)^T$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$ 是 R^3 的规范正交基，则 $\alpha=(1,2,3)^T$ 在该组基下的坐标为______________.

第五章

1.方程组解的存在性、唯一性；

（2012A）. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $R(A)=r$，对于方程组 $AX=b$，下列结论正确的是

（A）当 $r=m$ 时，有解；　　（B）当 $r=n$ 时，有唯一解；

（C）当 $m=n$ 时，有唯一解；　　（D）当 $r<n$ 时，有无穷多解.

（06 级）若 A 为 4 阶方阵，且 $R(A)$=3，则方程组 $A^*X=0$ 的基础解系含【　】个线性无关的解向量.

（08 级）设 A 为 n 阶矩阵,α 为 n 维列向量,若 $R\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=R(A)$, 则对于下列方程组必有

(A) $AX=\alpha$ 必有无穷多解;　　(B) $AX=\alpha$ 必有唯一解;

(C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}=0$ 只有零解;　　(D) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}=0$ 必有非零解.

2.解的性质, 解的结构

（03 级）若 A 为 4 阶方阵，其秩为 3，ξ_1,ξ_2,ξ_3 都是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的解向量，

并且 $\xi_1+\xi_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\xi_1+2\xi_2+\xi_3=\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. 求 $AX=\beta$ 的通解。

3.求解

（03 级）已知 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则方程 $AX=\alpha_1+\alpha_m$ 的解为 $X=$ ________________

第六章

1.概念题：特征值和特征向量的定义、性质，相似的性质

（2013）设 3 阶矩阵 A 与 B 相似，$\left|\lambda E-B\right|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$, 则 $\left|A^*-A^{-1}\right|=$ ______________.

（2013）已知 A 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似，则 R$(A+E)$+tr$(A+E)$= ______________

（2011-B）设 A 为 3 阶矩阵，且 $|A+E|=0,\ |A-2E|=0,\ |3A+E|=0$ 则 $|A|=$ __________.

（2011-A）若 3 阶矩阵 A，$A-E$，$A+2E$ 均不可逆，则 $\left|3A-E\right|=$ ______________.

（2011-B ）已知 A 与 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ 相似，则 $|A^{-1}-E|=$______________.

（08 级）1. 若 n 阶矩阵 A 的元素都是 1，则 A 的非零特征值是________.

2. 设 A 是 3 阶方阵，A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，A 的特征值是 2，-2，1，则 $|A|^{-1}(A_{11}+A_{22}+A_{33})$ 的值为

(A) 1; (B) -1; (C) 2; (D) -2.

（07 级）若矩阵 A 满足 $A^2-4A+4E_n=0$，则 A 的特征值只能是【 】

（06 级）1．若 4 阶方阵 A 的特征值为 $0,1,2,3$，且 A 与 B 相似,则行列式 $|B^2+E|=$【 】

2．设 α,β 是 4 维非零列向量, $A=E+\alpha\beta^T$，则在 A 的特征值中,至少有 【 】

（A）1 个 1； （B）2 个 1； （C）3 个 1； （D）4 个 1.

3.设 A ,B 是 n 阶矩阵, $f(\lambda)=|\lambda E-B|$ 是 B 的特征多项式.证明: 矩阵 $f(A)$ 可逆的充分必要条件为 B 的特征值都不是 A 的特征值.

（05 级）1.若 $\xi=(1,\ 1)'$ 是方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量，则________，________是 A 的全部特征值.

2. 已知 1, 1 是 2 阶矩阵 A 的特征值，则必有

(A) A 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似 . (B) A 与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 相似 .

(C) 若 $A\neq E_2$, 则 A 不能相似对角化. (D) A 可以相似对角化.

（03 级）1. 已知 $0,1,2,\cdots,n-1$ 是 n 阶矩阵 A 的特征值，则 $|A+E_n|=$___________.

2. 设 A 是 n 阶实矩阵，且存在自然数 k 使 $(A'A)^k=0$, 试证 $A=0$

2.相似对角化的条件、方法

（2012B）如果矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & x & 2 & 2 \\ 0 & 1 & y & 3 \\ 0 & 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 可以相似对角化，求出 x、y、z 的值.

（2011-B) 设 A 为 n 阶矩阵，满足 $A^2-5A+6E=0$

（1）证明：$R(A-2E)+R(A-3E)=n$；

（2）证明：A 可相似对角化.

3.实对称阵的性质及正交相似对角花

（2010）　设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和都为 3，向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是线性方程组 $AX=0$ 的两个解.

（1）求 A 的特征值与全部的特征向量;

（2）求正交阵 P 和对角阵 Λ，使 $P^{T}AP=\Lambda$;

（3）求 A.

第七章

（2016 级）.设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 R^2 的一个线性变换，$\mathscr{A}$ 关于 R^2 的基底 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$.则 $\mathscr{A}$ 关于 R^2 的基底 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 的矩阵为 ________

第八章

1.实二次型化标准型

（综合练习 100 题选择题）13．设 A,B 是 n 阶方阵，满足：对任意 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 都有 $X'AX=X'BX$，下列结论中正确的是.

（A）若秩$(A)=$秩(B)，则 $A=B$；　（B）若 $A'=A$，则 $B'=B$；

（C）若 $B'=B$，则 $A=B$；　（D）若 $A'=A,B'=B$，则 $A=B$.

（2013 级）. 设 A 为三阶实对称阵，且满足 $A^3=A$，二次型 $f=X^{T}AX$ 的正负惯性指数都是 1，则 $|3A+2E|=$________.

（2012 级 A）. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ 的秩为 5，正惯性指数为 4，则其规范形为________________.

（2009）已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\1&\lambda&1\\\lambda&1&1\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，方程组 $AX=\beta$ 有无穷多解，求

（1）常数 λ 的值；

（2）求正交阵 P，使 $P^{T}AP$ 为对角阵；

（3）写出正交变换，将二次型 $f=X^{T}AX$ 化为标准形；

（4）$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 在三维几何空间中表示何种曲面.

2. 正定实二次型的判定

（2012-B）实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - tx_2x_3 + 4x_3^2$ 正定，则 t 的取值范围是

（A） $-4 < t < 4$； （B） $-3 < t < 3$；

（C） $-2 < t < 2$； （D） $-1 < t < 1$

（2011-B）设 A，B 是 n 阶正定矩阵，证明：$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 也是正定矩阵.

（综合百题）23．设 B 是 $m\times n$ 实矩阵，$A = B'B$，则下列结论中错误的是（D）.

（A）线性方程组 $BX=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ A 正定；（B）$R(A)=R(B)$；

（C）A 的特征值大于等于 0；（D）$R(B)=m \Leftrightarrow A$ 正定.

（2009）实二次型 $f=(a_1x_1+x_2)^2+(a_2x_2+x_3)^2+(a_3x_3+x_4)^2+(a_4x_4+x_1)^2$ 正定的充要条件是 【 】

（A）$a_1a_2a_3a_4 \neq 1$； （B）$a_1a_2a_3a_4 = 1$；

（C）$a_1a_2a_3a_4 \neq -1$； （D）$a_1a_2a_3a_4 = -1$.

3. 曲面、曲线，二次曲面的名称

（2012-A）在空间直角坐标系中方程 $x^2+2y^2-4z^2+16=0$ 的图形是____________________.

（2012-B）曲线 $\begin{cases} x^2 = z \\ y = 0 \end{cases}$，绕 z 轴旋转一周所形成的旋转曲面方程为__________________.

4.曲线往坐标面投影

（04 级）曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \quad (z\geq 0) \\ 2x^2+2y^2-2x+z^2=7 \end{cases}$ 在 xoy 坐标面上的投影曲线是___________.

（16 级）母线平行于 z 轴，且通过曲线 $\begin{cases} x^2+2y^2+z^2=25 \\ -x^2+y^2+z^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程为 ________________________.

%%%%

问题。 矩阵的等价 相似 合同

（2011-B）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} c_3 & c_2 & c_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$，则 A 与 B 之间

（A）相似，但不合同；　　　　（B）等价，但不相似；

（C）相似合同，但不等价；　　（D）等价、相似且合同.

（**2009**）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&\frac{3}{2}\\0&0&0\\\frac{3}{2}&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$, $B_3=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$, $B_4=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,

则有

（A）A 与 B_1 等价、相似且合同；（B）A 与 B_2 等价、相似且合同；

（C）A 与 B_3 等价、相似且合同；（D）A 与 B_4 等价、相似且合同.

（2008）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&2&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$，则

A，B，C中 与 D 既相似又合同的矩阵为__________.

（**2006**）设 $A=\begin{pmatrix}4&&\\&4&\\&&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&2&\\2&6&\\&&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&1&\\&4&1\\&&8\end{pmatrix}$. 则 A 与 B 【　　】

（A）A 与 C 相似且合同；　　　（B）A 与 B 相似且合同；

（C）B 与 C 相似且合同；　　　（D）B 与 C 相似但不合同.

（**2016**）矩阵 $A_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&3&0\\0&1&0\end{pmatrix}$中，哪两个相似？哪两个合同？为什么？

综合练习 100 题

二、选择题

13．设 A,B 是 n 阶方阵，满足：对任意 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 都有 $X'AX=X'BX$，下列结论中正确的是（D）.

（A）若秩$(A)=$秩(B)，则 $A=B$；（B）若 $A'=A$，则 $B'=B$；

（C）若 $B'=B$，则 $A=B$；　　　（D）若 $A'=A, B'=B$，则 $A=B$.

21．设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B（A）.

（A）合同且相似；　　（B）合同但不相似；

（C）不合同但相似；　（D）不合同且不相似.

23．设 B 是 $m\times n$ 实矩阵，$A=B'B$，则下列结论中错误的是（D）.

（A）线性方程组 $BX=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow A$ 正定；（B）$R(A)=R(B)$；

（C）A 的特征值大于等于 0；　　　　（D）$R(B)=m\Leftrightarrow A$ 正定.

30．设矩阵 $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$ 的秩是 3，则直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$（A）.

（A）相交于一点；（B）重合；（C）平行但不重合；（D）异面.

线性代数公式大全——最新修订

1、行列式

1. n 行列式共有 n^2 个元素，展开后有 $n!$ 项，可分解为 2^n 行列式；
2. 代数余子式的性质：
   ①、A_{ij} 和 a_{ij} 的大小无关；
   ②、某行（列）的元素乘以其它行（列）元素的代数余子式为 0；
   ③、某行（列）的元素乘以该行（列）元素的代数余子式为 $|A|$；
3. 代数余子式和余子式的关系：$M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$　　　$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
4. 设 n 行列式 D：
   将 D 上、下翻转或左右翻转，所得行列式为 D_1，则 $D_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$；
   将 D 顺时针或逆时针旋转 90°，所得行列式为 D_2，则 $D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$；
   将 D 主对角线翻转后（转置），所得行列式为 D_3，则 $D_3 = D$；
   将 D 主副角线翻转后，所得行列式为 D_4，则 $D_4 = D$；
5. 行列式的重要公式：
   ①、主对角行列式：主对角元素的乘积；
   ②、副对角行列式：副对角元素的乘积 $\times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；
   ③、上、下三角行列式（|◥|=|◣|）：主对角元素的乘积；
   ④、|◤|和|◢|：副对角元素的乘积 $\times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；
   ⑤、拉普拉斯展开式：$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$、$\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{m \cdot n} |A||B|$
   ⑥、范德蒙行列式：大指标减小指标的连乘积；
   ⑦、特征值；
6. 对于 n 阶行列式 $|A|$，恒有：$|\lambda E - A| = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k S_k \lambda^{n-k}$，其中 S_k 为 k 阶主子式；
7. 证明 $|A| = 0$ 的方法：
   ①、$|A| = -|A|$；
   ②、反证法；
   ③、构造齐次方程组 $Ax = 0$，证明其有非零解；
   ④、利用秩，证明 $r(A) < n$；
   ⑤、证明 0 是其特征值；

2、矩阵

1. A 是 n 阶可逆矩阵：
   $\Leftrightarrow |A| \neq 0$（是非奇异矩阵）；
   $\Leftrightarrow r(A) = n$（是满秩矩阵）
   $\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量组线性无关；
   $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解；
   $\Leftrightarrow \forall b \in R^n$，$Ax = b$ 总有唯一解；
   $\Leftrightarrow$ A 与 E 等价；
   $\Leftrightarrow$ A 可表示成若干个初等矩阵的乘积；

$\Leftrightarrow$ A的特征值全不为0；

$\Leftrightarrow$ A^TA是正定矩阵；

$\Leftrightarrow$ A的行（列）向量组是R^n的一组基；

$\Leftrightarrow$ A是R^n中某两组基的过渡矩阵；

2. 对于n阶矩阵A：$AA^*=A^*A=|A|E$ 无条件恒成立；

3. $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$　　$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$　　$(A^*)^T=(A^T)^*$

$(AB)^T=B^TA^T$　　$(AB)^*=B^*A^*$　　$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

4. 矩阵是表格，推导符号为波浪号或箭头；行列式是数值，可求代数和；

5. 关于分块矩阵的重要结论，其中均A、B可逆：

若$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，则：

Ⅰ、$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$；

Ⅱ、$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$；

②、$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$；（主对角分块）

③、$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$；（副对角分块）

④、$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$；（拉普拉斯）

⑤、$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$；（拉普拉斯）

3、矩阵的初等变换与线性方程组

1. 一个$m\times n$矩阵A，总可经过初等变换化为标准形，其标准形是唯一确定的：$F=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$；

等价类：所有与A等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类；标准形为其形状最简单的矩阵；

对于同型矩阵A、B，若$r(A)=r(B)\Leftrightarrow A\sim B$；

2. 行最简形矩阵：

①、只能通过初等行变换获得；

②、每行首个非0元素必须为1；

③、每行首个非0元素所在列的其他元素必须为0；

3. 初等行变换的应用：（初等列变换类似，或转置后采用初等行变换）

①、若$(A,E)\overset{r}{\sim}(E,X)$，则$A$可逆，且$X=A^{-1}$；

②、对矩阵(A,B)做初等行变化，当A变为E时，B就变成$A^{-1}B$，即：$(A,B)\overset{c}{\sim}(E,A^{-1}B)$；

③、求解线形方程组：对于n个未知数n个方程$Ax=b$，如果$(A,b)\overset{r}{\sim}(E,x)$，则$A$可逆，且$x=A^{-1}b$；

4. 初等矩阵和对角矩阵的概念：

①、初等矩阵是行变换还是列变换，由其位置决定：左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵；

②、$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，左乘矩阵 A，λ_i 乘 A 的各行元素；右乘，λ_i 乘 A 的各列元素；

③、对调两行或两列，符号 $E(i,j)$，且 $E(i,j)^{-1}=E(i,j)$，例如：$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{pmatrix}$；

④、倍乘某行或某列，符号 $E(i(k))$，且 $E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$，例如：$\begin{pmatrix}1 & & \\ & k & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \frac{1}{k} & \\ & & 1\end{pmatrix}(k\neq 0)$；

⑤、倍加某行或某列，符号 $E(ij(k))$，且 $E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$，如：$\begin{pmatrix}1 & & k \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & -k \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}(k\neq 0)$；

5. 矩阵秩的基本性质：

①、$0\le r(A_{m\times n})\le \min(m,n)$；

②、$r(A^T)=r(A)$；

③、若 $A\sim B$，则 $r(A)=r(B)$；

④、若 P、Q 可逆，则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$；（可逆矩阵不影响矩阵的秩）

⑤、$\max(r(A),r(B))\le r(A,B)\le r(A)+r(B)$；（※）

⑥、$r(A+B)\le r(A)+r(B)$；（※）

⑦、$r(AB)\le \min(r(A),r(B))$；（※）

⑧、如果 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，且 $AB=0$，则：（※）

Ⅰ、B 的列向量全部是齐次方程组 $AX=0$ 解（转置运算后的结论）；

Ⅱ、$r(A)+r(B)\le n$

⑨、若 A、B 均为 n 阶方阵，则 $r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$；

6. 三种特殊矩阵的方幂：

①、秩为 1 的矩阵：一定可以分解为列矩阵（向量）× 行矩阵（向量）的形式，再采用结合律；

②、型如 $\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的矩阵：利用二项展开式；

二项展开式：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^m a^{n-m}b^m+\cdots+C_n^{n-1}a^1b^{n-1}+C_n^nb^n=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m a^m b^{n-m}$；

注：Ⅰ、$(a+b)^n$ 展开后有 $n+1$ 项；

Ⅱ、$C_n^m=\dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ $\quad C_n^0=C_n^n=1$

Ⅲ、组合的性质：$C_n^m=C_n^{n-m}$ $\quad C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$ $\quad \sum\limits_{r=0}^{n}C_n^r=2^n$ $\quad rC_n^r=nC_{n-1}^{r-1}$；

③、利用特征值和相似对角化；

7. 伴随矩阵：

①、伴随矩阵的秩：$r(A^*)=\begin{cases}n & r(A)=n\\ 1 & r(A)=n-1\\ 0 & r(A)<n-1\end{cases}$；

②、伴随矩阵的特征值：$\frac{|A|}{\lambda}$（$AX=\lambda X, A^*=|A|A^{-1} \Rightarrow A^*X=\frac{|A|}{\lambda}X$）；

③、$A^*=|A|A^{-1}$、$|A^*|=|A|^{n-1}$

8. 关于A矩阵秩的描述：

①、$r(A)=n$，A中有n阶子式不为0，$n+1$阶子式全部为0；（两句话）

②、$r(A)<n$，A中有n阶子式全部为0；

③、$r(A)\geq n$，A中有n阶子式不为0；

9. 线性方程组：$Ax=b$，其中A为$m\times n$矩阵，则：

①、m与方程的个数相同，即方程组$Ax=b$有m个方程；

②、n与方程组得未知数个数相同，方程组$Ax=b$为n元方程；

10. 线性方程组$Ax=b$的求解：

①、对增广矩阵B进行初等行变换（只能使用初等行变换）；

②、齐次解为对应齐次方程组的解；

③、特解：自由变量赋初值后求得；

11. 由n个未知数m个方程的方程组构成n元线性方程：

①、$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{nm}x_n=b_n \end{cases}$；

②、$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax=b$（向量方程，$A$为$m\times n$矩阵，$m$个方程，$n$个未知数）

③、$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\beta$（全部按列分块，其中$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$）；

数学建模
Q群636683950

④、$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\beta$（线性表出）

⑤、有解的充要条件：$r(A)=r(A,\beta)\leq n$（n为未知数的个数或维数）

4、向量组的线性相关性

1. m个n维列向量所组成的向量组A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$构成$n\times m$矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$；

m个n维行向量所组成的向量组B：$\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_m^T$构成$m\times n$矩阵$B=\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$；

含有有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应；

2. ①、向量组的线性相关、无关 $\Leftrightarrow Ax=0$有、无非零解；（齐次线性方程组）

②、向量的线性表出 $\Leftrightarrow Ax=b$是否有解；（线性方程组）

③、向量组的相互线性表示 $\Leftrightarrow AX=B$是否有解；（矩阵方程）

3. 矩阵$A_{m\times n}$与$B_{l\times n}$行向量组等价的充分必要条件是：齐次方程组$Ax=0$和$Bx=0$同解；（P_{101}例14）

4. $r(A^TA)=r(A)$；（P_{101}例15）

5. n维向量线性相关的几何意义：

①、α线性相关 $\Leftrightarrow \alpha=0$；

②、α,β线性相关 $\Leftrightarrow \alpha,\beta$坐标成比例或共线（平行）；

③、α,β,γ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha,\beta,\gamma$ 共面；

6. 线性相关与无关的两套定理：

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ 必线性相关；

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 必线性无关；（向量的个数加加减减，二者为对偶）

若 r 维向量组 A 的每个向量上添上 $n-r$ 个分量，构成 n 维向量组 B：

若 A 线性无关，则 B 也线性无关；反之若 B 线性相关，则 A 也线性相关；（向量组的维数加加减减）

简言之：无关组延长后仍无关，反之，不确定；

7. 向量组 A（个数为 r）能由向量组 B（个数为 s）线性表示，且 A 线性无关，则 $r\le s$（二版 P_{74} 定理 7）；

向量组 A 能由向量组 B 线性表示，则 $r(A)\le r(B)$；（P_{86} 定理 3）

向量组 A 能由向量组 B 线性表示

$\Leftrightarrow AX=B$ 有解；

$\Leftrightarrow r(A)=r(A,B)$（$P_{85}$ 定理 2）

向量组 A 能由向量组 B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r(A,B)$（$P_{85}$ 定理 2 推论）

8. 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使 $A=P_1P_2\cdots P_l$；

①、矩阵行等价：$A\overset{r}{\sim}B\Leftrightarrow PA=B$（左乘，$P$ 可逆）$\Leftrightarrow Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

②、矩阵列等价：$A\overset{c}{\sim}B\Leftrightarrow AQ=B$（右乘，$Q$ 可逆）；

③、矩阵等价：$A\sim B\Leftrightarrow PAQ=B$（$P$、$Q$ 可逆）；

9. 对于矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$：

①、若 A 与 B 行等价，则 A 与 B 的行秩相等；

②、若 A 与 B 行等价，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，且 A 与 B 的任何对应的列向量组具有相同的线性相关性；

③、矩阵的初等变换不改变矩阵的秩；

④、矩阵 A 的行秩等于列秩；

10. 若 $A_{m\times s}B_{s\times n}=C_{m\times n}$，则：

①、C 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示，B 为系数矩阵；

②、C 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示，A^T 为系数矩阵；（转置）

11. 齐次方程组 $Bx=0$ 的解一定是 $ABx=0$ 的解，考试中可以直接作为定理使用，而无需证明；

①、$ABx=0$ 只有零解 $\Rightarrow Bx=0$ 只有零解；

②、$Bx=0$ 有非零解 $\Rightarrow ABx=0$ 一定存在非零解；

12. 设向量组 $B_{n\times r}:b_1,b_2,\cdots,b_r$ 可由向量组 $A_{n\times s}:a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性表示为：（P_{110} 题 19 结论）

$$(b_1,b_2,\cdots,b_r)=(a_1,a_2,\cdots,a_s)K \quad (B=AK)$$

其中 K 为 $s\times r$，且 A 线性无关，则 B 组线性无关 $\Leftrightarrow r(K)=r$；（B 与 K 的列向量组具有相同线性相关性）

（必要性：$\because r=r(B)=r(AK)\le r(K), r(K)\le r, \therefore r(K)=r$；充分性：反证法）

注：当 $r=s$ 时，K 为方阵，可当作定理使用；

13. ①、对矩阵 $A_{m\times n}$，存在 $Q_{n\times m}$，$AQ=E_m$ $\Leftrightarrow r(A)=m$、Q 的列向量线性无关；（P_{87}）

②、对矩阵 $A_{m\times n}$，存在 $P_{n\times m}$，$PA=E_n$ $\Leftrightarrow r(A)=n$、P 的行向量线性无关；

14. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 成立；（定义）

$\Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$ 有非零解，即 $Ax=0$ 有非零解；

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$，系数矩阵的秩小于未知数的个数；

15. 设 $m\times n$ 的矩阵 A 的秩为 r，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩为：$r(S)=n-r$；

16. 若 η^* 为 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；（P_{111} 题 33 结论）

5、相似矩阵和二次型

1. 正交矩阵 $\Leftrightarrow A^T A = E$ 或 $A^{-1} = A^T$（定义），性质：

   ①、A 的列向量都是单位向量，且两两正交，即 $a_i^T a_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} (i, j = 1, 2, \cdots n)$；

   ②、若 A 为正交矩阵，则 $A^{-1} = A^T$ 也为正交阵，且 $|A| = \pm 1$；

   ③、若 A、B 正交阵，则 AB 也是正交阵；

   注意：求解正交阵，千万不要忘记施密特正交化和单位化；

2. 施密特正交化：$(a_1, a_2, \cdots, a_r)$

   $b_1 = a_1$；

   $b_2 = a_2 - \dfrac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} \Box b_1$

   ………

   $b_r = a_r - \dfrac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} \Box b_1 - \dfrac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} \Box b_2 - \cdots - \dfrac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} \Box b_{r-1}$；

3. 对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；

   对于实对称阵，不同特征值对应的特征向量正交；

4. ①、A 与 B 等价 $\Leftrightarrow A$ 经过初等变换得到 B；

   $\Leftrightarrow PAQ = B$，P、Q 可逆；

   $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$，$A$、$B$ 同型；

   ②、A 与 B 合同 $\Leftrightarrow C^T AC = B$，其中可逆；

   $\Leftrightarrow x^T Ax$ 与 $x^T Bx$ 有相同的正、负惯性指数；

   ③、A 与 B 相似 $\Leftrightarrow P^{-1}AP = B$；

5. 相似一定合同、合同未必相似；

   若 C 为正交矩阵，则 $C^T AC = B \Rightarrow A \Box B$，（合同、相似的约束条件不同，相似的更严格）；

6. A 为对称阵，则 A 为二次型矩阵；

7. n 元二次型 $x^T Ax$ 为正定：

   $\Leftrightarrow A$ 的正惯性指数为 n；

   $\Leftrightarrow A$ 与 E 合同，即存在可逆矩阵 C，使 $C^T AC = E$；

   $\Leftrightarrow A$ 的所有特征值均为正数；

   $\Leftrightarrow A$ 的各阶顺序主子式均大于 0；

   $\Rightarrow a_{ii} > 0, |A| > 0$；(必要条件)

哈尔滨工业大学《代数与几何》期末试题

（此卷满分 50 分）

注：本试卷中 $R(\boldsymbol{A})$、$\boldsymbol{A}'$、$\boldsymbol{A}^*$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵、$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵；$\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵.

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1．若 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,1,2,3$，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则行列式 $|\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{E}|=$______．

2．过点 $(-1,2,3)$，垂直于直线 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$ 且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程为 ______________________.

3．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维欧氏空间的标准正交基，则模 $|\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3|=$______.

4．若 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，且 R（$\boldsymbol{A}$）=3，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含______个线性无关的解向量.

5．yOz 坐标面上的抛物线 $\begin{cases} z^2=y \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周，所生成的旋转曲面的方程为

. ____________

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分条件是　【　】

（A）$R(\boldsymbol{A})=m$；　　（B）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关；

（C）$R(\boldsymbol{A})=n$；　　（D）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关.

2．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 正定的充要条件为　【　】

（A）$t>1$；　（B）$t>0$；　（C）$t>-1$；　（D）$t>\dfrac{1}{2}$.

3．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 6 & 2 & \\ 2 & 6 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & \\ & 4 & 1 \\ & & 8 \end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$　【　】

（A）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似且合同；　　（B）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似且合同；

（C）$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似且合同；　　（D）$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似但不合同.

4．设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 4 维非零列向量, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，则在 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中, 至少有　【　】

（A）1 个 1；　（B）2 个 1；　（C）3 个 1；　（D）4 个 1.

5．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 3 维向量，则下列命题正确的为　【　】

（A）如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关, $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；

（B）如果$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,则$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关；

（C）如果$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关；

（D）如果$\boldsymbol{\alpha}_3$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示,则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

三、（本题 5 分）

求过点$(3,1,-2)$且过直线$\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$的平面方程.

四、（本题 5 分）

设向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\a-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\a\\6\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$.

求：（1）a为何值时，该向量组的秩等于3.

（2）求该向量组的一个极大无关组.

（3）用所求的极大无关组表示其余向量.

五、（本题 5 分）

当a等于何值时，方程组$\begin{cases}ax_1-x_2-x_3=1,\\-x_1+ax_2-x_3=-a,\\-x_1-x_2+ax_3=a^2.\end{cases}$无解，有唯一解，有无穷多解？当有无穷多解时，写出通解.

六、（本题 5 分）

已知实二次型$f(x,y,z)=3x^2+3y^2+2xy+4xz-4yz$，

1．写出f的矩阵；

2．求正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$，将$f$化为标准形，并写出所用的正交矩阵$\boldsymbol{P}$；

3．方程$f(x,y,z)=1$表示空间直角坐标系中何种二次曲面.

七、（本题 5 分）

设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$正定，$\boldsymbol{X}$是任意n维非零列向量. 证明：秩$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}=n+1$.

八、（本题 5 分）

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是$n$阶矩阵，$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$是$\boldsymbol{B}$的特征多项式. 证明:矩阵$f(\boldsymbol{A})$可逆的充分必要条件为$\boldsymbol{B}$的特征值都不是$\boldsymbol{A}$的特征值.

哈尔滨工业大学《代数与几何》期末试题答案

一、填空题

1、100． 2、$x+1=\dfrac{y-2}{-2}=z-3$． 3、3． 4、3． 5、$y=x^2+z^2$．

二、选择题

1、A. 2、D. 3、B. 4、C. 5、C.

三、解：因为 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}=8\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}-22\boldsymbol{k}$

所以 $$8(x-3)-9(y-1)-22(z+2)=0$$

故所求的平面方程为 $$8x-9y-22z-59=0.$$

四、 解：因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\,\boldsymbol{\alpha}_2\,\boldsymbol{\alpha}_3\,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & a & 2 \\ 2 & 2 & a-3 & 6 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{a=3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以（1） $a=3$时该向量组的秩等于3;

（2） $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5$ 为向量组的一个极大无关组;

（3） $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

五、解：因为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}=(a-2)(a+1)^2$

所以（1）当$a\neq 2$且$a\neq -1$时，此方程组有唯一解；

（2）当$a=2$时， $R(\boldsymbol{A})=2<R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=3$，此方程组无解；

（3）当$a=-1$时，$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=1<3$，此方程组有无穷多解；

$$X=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad (k_1,k_2\text{为任意常数}).$$

六、解：1． f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}$.

2．（1）$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-2\\-1&\lambda-3&2\\-2&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda+2)$.

知 $\boldsymbol{A}$ 特征值为 $4,4,-2$.

（2）对 $\lambda=4$，解 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 4 的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}，\text{标准正交化得：}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}.$$

对 $\lambda=-2$，解 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -2 的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}，\text{标准正交化得：}\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}.$$

（3）令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1&\boldsymbol{P}_2&\boldsymbol{P}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$ 为正交阵.

则正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 使二次型 f 化为标准形 $f=4x_1^2+4y_1^2-2z_1^2$.

3．方程 $f(x,y,z)=1$，即 $4x_1^2+4y_1^2-2z_1^2=1$,

表示空间直角坐标系中的旋转单叶双曲面.

七、 证：因为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{X}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{X}\\-\boldsymbol{X}^{\mathrm T}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{X}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\end{pmatrix}$

又因为 $\boldsymbol{A}$ 正定，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也正定，则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{X} \\ -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & 0 \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}| \neq 0$$

故秩 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} = n+1$.

八、**证法 1：** 设 $\lambda_i (i=1\sim n)$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，则

$$f(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}| = \prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$$

$$f(\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{n}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})$$

$$|f(\boldsymbol{A})| = \prod_{i=1}^{n}|\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E}|$$

所以

$f(\boldsymbol{A})$ 可逆 $\Leftrightarrow |f(\boldsymbol{A})| \neq 0 \Leftrightarrow |\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i, i=1\sim n$ 都不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证法 2：必要性

设 $\lambda_i (i=1\sim n)$ 是方阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，设 $\mu_i (i=1\sim n)$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

反证法 如果存在一个 $\boldsymbol{B}$ 的特征值也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，不妨设 $\mu_1 = \lambda_1$.

而 $f(\mu_i)(i=1\sim n)$ 又是 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值. 则

$$\begin{aligned} |f(\boldsymbol{A})| &= f(\mu_1)f(\mu_2)\cdots f(\mu_n) = |\mu_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}||\mu_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|\cdots|\mu_n\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}| \\ &= |\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}||\mu_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|\cdots|\mu_n\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|. \end{aligned}$$

所以

$f(\boldsymbol{A})$ 可逆 $\Rightarrow |\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}||\mu_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|\cdots|\mu_n\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}| \neq 0$, 而与 $|\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}| = 0$ 矛盾.

故 $f(\boldsymbol{A})$ 可逆一定有 $\boldsymbol{B}$ 的特征值都不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

充分性

反证法 如果 $f(\boldsymbol{A})$ 不可逆, 则由

$$|f(\boldsymbol{A})| = f(\mu_1)f(\mu_2)\cdots f(\mu_n) = |\mu_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}||\mu_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|\cdots|\mu_n\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|,$$

知，右端至少存在一个行列式等于零，不妨设为 $|\mu_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}| = 0$.

即说明方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中至少有一个也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

所以，如果方阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值都不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.则矩阵 $f(\boldsymbol{A})$ 可逆.

线性代数模拟试题

一填空题

1. 求行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$ ________

2.求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 平面上的投影的方程________

3.设 A 是 mXs 阶矩阵，B 为 sXn 阶矩阵，则方程组 BX=0 与 ABX=0 同解的充分必要条件是 r（A）=_________

4. 空间直角坐标系中 ,过点(3 ,-2 ,1),且与平面 2x+2y-3z=1,平面 x+3y+z=-1 都平行的直线方程是 ________

5. 已知ε_1，ε_2是线性空间V的基，ƛ是V的一个线性变换，

若ƛ（ε_1)=ε_1，ƛ（ε_1-ε_2）=ε_2,则ƛ关于V的基$\varepsilon_1\varepsilon_2$的矩阵$A$= ________

二．选择题

1. 设 A,B 为 n 阶矩阵，记 r（X）为 X 的秩，（XY）表示分块矩阵， 则（）

A. R（A　AB）=R(A)　　B. R(A　BA)=R(A)

C. R(A　B)　=max{R(A），R(B)}　D. R(A　B)　$=R(A^T\quad B^T)$

2.设四阶矩阵$A=\left(a_{ij}\right)$不可逆，a_{12}的代数余子式$A_{12}\neq 0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为矩阵$A$的列向量组.$A^*$为$A$的伴随矩阵.则方程组$A^*x=\mathbf{0}$的通解为（　　）.

A. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中$k_1,k_2k_3$为任意常数

B. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$，其中$k_1,k_2k_3$为任意常数

C. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，其中，$k_1,k_2k_3$，后为任意常数.

D. $x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$ ，其中 k_1,k_2k_3 为任意常数

3.已知直线与直线 $L_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{2-c_2}{c_1}$ $L_2:\dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{2-c_3}{c_2}$ 相交于一点，法向量 $a_i=\begin{bmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{bmatrix},i=1,2,3.$ 则（　　）

A. a_1 可由 a_2,a_3 线性表示　　B. a_2 可由 a_1,a_3 线性表示

C. a_3 可由 a_1,a_2 线性表示　　D. a_1,a_2,a_3 线性无关

4.设 A 是三阶实对称正定矩阵，P 是三阶可逆矩阵， $B=P^{-1}AP$ 则（　）

A. $|E+B|>1$　　B. $|E+B|<1$　　C.B 是正定矩阵　　D.B 不是正定矩阵

5，设A是三阶实对称阵，若对任意的列向量都有$X^TAX=0$则有（　　）

A. $|A|=0$　　B. $|A|>0$　　C. $|A|<0$　　D 无法确定

三．解答题

1 设$A=\begin{pmatrix}a+1&-2&4&-3\\-1&a+2&-4&3\\2&-4&a+8&-6\\3&-6&12&-9\end{pmatrix}$,　求使得$|A|>2020$的最小正整数a

2. 直角坐标系 O-XYZ 中三个平面 π_1:　$(k+2)x+y+z=-1$,π_2:　$x+(k-2)y+3z=2$,
$\pi_3:x-y+kz=k^2-1$
问 k 取何值时三个平面交于一条直线，交于一点，交于一条直线时请求出直线的参数方程。

3.设三维线性空间 R^3 中的一组基为 $\alpha_1=$（1，0,-1）$\alpha_2=$（1，2, 2）$\alpha_3=$（2,-2, 1）

向量ξ在基$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$下的坐标为（$x_1x_2x_3$）　在另一组基$\beta_1\beta_2\beta_3$下的坐标为（$y_1y_2y_3)^T$

且有$y_1=x_1+x_2+x_3,y_2=x_1+x_3,y_3=2x_1+x_2-x_3$

（1） $\alpha=3\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$,求$\alpha$在基$\beta_1\beta_2\beta_3$下的坐标

（2）求基 $\beta_1\beta_2\beta_3$

4.已知二次型 $f(xyz)=X^TAX$ 其中 $X=(x,y,z)^T$，A是三阶实对称阵，A各列的元素之和为2

$f(xyz)=1$表示的几何图形与曲线 $\begin{cases}2x^2-y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 绕x轴旋转所得图形相同

（1）$f(xyz)=1$表示何种几何图形

(2) 求正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ为对角阵

(3) 求 A

5. n 阶可逆实对称方阵 A 有 n 个不同的特征值记为 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 对应特征向量为 $\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$，且 ξ_1 是单位向量。

（1）求 $B=A-\lambda_1\xi_1\xi_1^T$的特征值

（2）证明 $B\alpha, B^2\alpha\ldots\ldots B^n\alpha$线性相关

（3）若 $B^n\alpha=(B\alpha, B^2\alpha\ldots B^{n-1}\alpha)X$，$X$已知，$p=(B\alpha, B^2\alpha\ldots B^{n-1}\alpha)$，$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$

求所有的 C 使得 BP=PC

基础学部百思堂

2020 年 1 月 6 日

线性代数模拟题解析

1. 选自 2020 考研数学一

解: 利用行列式的行列变换得

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2.$$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$

3. R(A)=s BX=0 与 AB=0 同解说明两者系数矩阵的秩是相同的，即 R(B)=R(AB)，充要条件是 A 为一个列满秩矩阵，即 R(A)=s

4. 两个平面的法向量易知，做数量积得所求直线的方向向量，又已知直线上一点。直线可求。$\frac{x-3}{11} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-1}{4}$

5. 选自 2017 级期末填空 5 题，与本题相同做法的还有 2016 级填空 10，2018 级填空 5

$\lambda(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=\lambda(\varepsilon_1)-\lambda(\varepsilon_2)=\varepsilon_2 \Rightarrow \lambda(\varepsilon_2)=\varepsilon_1-\varepsilon_2 \Rightarrow (\lambda(\varepsilon_1),\ \lambda(\varepsilon_2))=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

二选择题

1 选自 2018 数学一

答案 A 对于 A 选项有

R（A AB）=R(A(E B)),而且（E B）为行满秩矩阵，则 R（A AB）=R（A）

所以 A 正确 B 错误 C 举反例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,D 选项取反例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. 答案 c 选自 2020 数学二

a_{12}*的代数余子式不为零说明* $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ *不为零，即* $\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix}$，

列向量 $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ *线性无关，又* A *不可逆* $\Rightarrow R(A)=3\Rightarrow \quad R(A^*)=1$

它的基础解系应有三个

3 答案 c 选自 2020 数学一 与本题相同做法的有：综合 100 题选择 30 题

设 $\vec{s}1=$ （$a1$，$b1$，$c1$），$\vec{s}2=$ （a2，b2，c2），$\vec{s}3=$ （a3-a2，b3-b2，c3-c2）

L_1L_2 *相交于一点* $\vec{s}1$，$\vec{s}2$，$\vec{s}3$ *共面*，$\vec{s}1$，$\vec{s}2$ *线性无关*，

$\Rightarrow \alpha3$ *可由* $\alpha1$，$\alpha2$ *线性表示*

$$\begin{vmatrix} a3\text{-a2} & b3\text{-b2} & c3\text{-c2} \\ a2 & b2 & c2 \\ a1 & b1 & c1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} a3 & b3 & c3 \\ a2 & b2 & c2 \\ a1 & b1 & c1 \end{vmatrix}$$

4. 选自 2017 级选择 4 题

$|E+B|=|E+P^{-1}AP|=|E+A|$ *由于* A *为正定矩阵*

$\Rightarrow A$ *可相似对角化，且其特征值全·大于零，*

$\Rightarrow |E+A|=|E+Q^{-1}XQ|=|E+X|$ *其中* X *为* A *的特征值组成的对角阵*

那么其值必然大于 1，选择 A 排除 B

CD 选项我们不能确定其是否为实对称阵所以不能判定

5.答案 A

由于 A *为实对称阵必然可相似对角化，设* B *为其特征值组成的对角阵* $\Rightarrow X^TP^TBPX$ $=O\Rightarrow (PX)^TBPX=0\Rightarrow$

取 $PX=$ （$10\ldots O$）*得* $\lambda1=0$ *那么* $|A|=0$ *必然成立！*

三、A=aE+$\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & -3\\ -1 & 2 & -4 & 3\\ 2 & -4 & 8 & -6\\ 3 & -6 & 12 & -9\end{bmatrix}$=aE+$\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}(1 \quad -2 \quad 4 \quad -3)$

$|A|$=$\left|aE+\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}(1 \quad -2 \quad 4 \quad -3)\right|$

=$a^3\left|aE+(1 \quad -2 \quad 4 \quad -3)\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}\right|$

=$a^3|aE+2E|$=$a^3(a+2)$

a=6 时，$|A|$=$1728<2020$，a=7 时，$|A|$=$2401>2020$

所以 a=7

四、系数矩阵 A=$\begin{bmatrix}k-2 & 1 & 1\\ 1 & k-2 & 3\\ 1 & -1 & k\end{bmatrix}$=$(k-1)^2(k-2)$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \qquad \beta=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ k^2-1\end{bmatrix}$$

① 若$|A|\neq 0$，$k\neq 1$且$k\neq 2$,则方程$AX=\beta$有唯一解，三个平面交于一点

② 若$|A|=0$，$k=1$或$k=2$

$k=1$时，增广矩阵 B=$\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}\end{array}\right]$ $R(A)=2<3=R(B)$ 所以联立方程组无解，有由于$k=1$时三个平面互不平行，所以三个平面两两相交，且不交与一条直线

$k=2$时，增广矩阵 B=$\left[\begin{array}{ccc:c}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 3\end{array}\right]$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $R(A)=R(B)=2$，故方程组有无穷多解，

$AX=0$的基础解系为$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，$AX=\beta$的一个特解为$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$，方程组的通解为$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$+t$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,故直线参数方程为$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2+t \\ z=-t \end{cases}$

五、(1) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ (2) $\beta_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\beta_2=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\beta_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

六、(1)旋转后的曲面方程为$2x^2-y^2-z^2=1$，所以$f(x,y,z)=1$表示双叶双曲面

(2) $f(x,y,z)=1$表示的曲面与$2x^2-y^2-z^2=1$形状相同，所以存在正交矩阵P使得$P^{-1}AP$=$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$,所以2，$-1$，$-1$为 A 的特征值。A 的各列元素之和为 2，而$A=A^T$,所以$A$的各行元素之和为 2，则 A$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$=2。特征值-1 的代数重数为 2，设-1 对应的特征向量为$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,则$(1 \quad 1 \quad 1)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$=$x_1+x_2+x_3$=0，该方程基础解系为$\xi_2$=$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\xi_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$。正交化得$\beta_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\beta_3=\frac{(\beta_2,\xi_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\xi_3-\beta_2$

=$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$。单位化得$Q_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$，$Q_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$，$Q_3=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

所以$Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

(3) $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$，所以$A=Q\begin{bmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{bmatrix}Q^{-1}$

$=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

七、(1) $i\neq 1$时，$B\xi_i=A\xi_i-\lambda_1\xi_1{\xi_1}^T\xi_i$=$\lambda_i\xi_i-\lambda_1\xi_1\left({\xi_1}^T,\xi_i\right)$=$\lambda_i\xi_i$

$i=1$时，$B\xi_1=A\xi_1-\lambda_1\xi_1{\xi_1}^T\xi_1$=$\lambda_1\xi_1-\lambda_1\xi_1\left({\xi_1}^T,\xi_1\right)$=0

所以 B 得特征值为$0,\lambda_2,\lambda_3,\cdots\cdots,\lambda_n$,对应得特征向量分别为

$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots\cdots,\xi_n$

(2) $|B|=0\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\cdots\cdots\cdot\lambda_n$=0

则$|(B\alpha\ B^2\alpha\ B^3\alpha\ \cdots\cdots\ B^n\alpha)|=|B||(\alpha\ B\alpha\ B^2\alpha\ \cdots\cdots\ B^{n-1}\alpha)|$

=0，所以$B\alpha,B^2\alpha,B^3\alpha,\cdots\cdots,B^n\alpha$ 线性相关

(3) 经验证$C=\begin{bmatrix}0_{(n-1)\times1} & 0_{1\times1}\\ E_{n-1} & X\end{bmatrix}$，满足题意，下面证明 C 唯一

$P=(\alpha\ B\alpha\ B^2\alpha\ \cdots\cdots,B^{n-1}\alpha)$

$=\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\ \sum_{i=2}^{n}\lambda_i\xi_i\ \sum_{i=2}^{n}{\lambda_i}^2\xi_i\ \cdots\cdots\ \sum_{i=2}^{n}{\lambda_i}^{n-1}\xi_i\right)$

$=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\ \cdots\cdots\ \xi_n)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \lambda_2 & {\lambda_3}^2 & \cdots & {\lambda_2}^2\\ 1 & \lambda_3 & {\lambda_3}^3 & \cdots & {\lambda_n}^3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \lambda_n & {\lambda_3}^n & \cdots & {\lambda_n}^{n-1}\end{bmatrix}$

=$\prod_{i=2}^{n}\lambda_i\prod_{2\le i<j\le n}\left(\lambda_j-\lambda_i\right)$

A 可逆，所以$\prod_{i=2}^{n}\lambda_i\neq 0$，$\lambda_i$互不相同，所以$\prod_{2\le i<j\le n}\left(\lambda_j-\lambda_i\right)\neq 0$

所以 P 可逆，$\alpha,B\alpha,B^2\alpha,\cdots\cdots,B^{n-1}\alpha$，线性无关，所以满足题意得 C 唯一，所以所有满足 BP=PC 的矩阵 C 为$\begin{bmatrix}0_{(n-1)\times1} & 0_{1\times1}\\ E_{n-1} & X\end{bmatrix}$

P.S.本题改编自书后 260 页综合百题第九题

哈尔滨工业大学 2021 年线性代数期末试题

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1.若β_1，β_2，β_3线性无关，且$a\beta_1-\beta_2$，$b\beta_2-\beta_3$，$c\beta_3-\beta_1$线性相关，则a，b，c应满足的关系式 ________

2.设α，β为三维列向量，β^T为β的转置，若矩阵$\alpha\beta^T$相似于$\begin{bmatrix}5&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$则$\beta^T\alpha=$ ________

3.设$\alpha_1=(1\quad 2\quad -1\quad 0)^T$，$\alpha_2=(1\quad 1\quad 0\quad 2)^T$，$\alpha_3=(2\quad 1\quad 1\quad a)^T$若由$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$生成的向量空间的维数为 2，则a = ________

4.若二次曲面的方程$x^2+3y^2+z^2+2\mathrm{axy}+2\mathrm{xz}+2\mathrm{yz}=4$,经正交变换化为${y_1}^2+4{z_1}^2=4$ 则 a= ________

5.设 A=(a_{ij})是 3 阶非零矩阵，$|A|$为 A 的行列式，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式，若$a_{ij}+A_{ij}=0$（i，$j=1,2,3$）则$|A|=$________

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1.已知$\mathrm{R}(A)=r$，则$\mathrm{R}(AA^T)$=（　　）

A　r　B　0　C　1　D　r-1

2.设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若A^3=0 则（　　）

A　E-A 不可逆，E+A 不可逆　　B　E-A 不可逆，E+A 可逆

C　E-A 可逆，E+A 可逆　　D　E-A 可逆，E+A 不可逆

3.设 A 为 3 阶实对称矩阵，如果二次曲面方程$(x\quad y\quad z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$在正交变换下的标准图形的双叶双曲线，则 A 的正特征值的个数为（　　）

A　0　B　1　C　2　D　3

4.已知$A_1=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$A_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&3&0\\0&1&0\end{bmatrix}$则（　　）

A　A_1，A_2相似也合同　　B A_1，A_2 相似　A_1，A_3合同

C A_3 A_2合同A_1，A_2合同　　D　A_1，A_3相似 A_1，A_2合同

5.设 A 为 3 阶矩阵，$\mathrm{P}(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3)$为可逆矩阵，使得$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$则$\mathrm{A}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$=（　　）

A　$\alpha_1+\alpha_2$　　B　$\alpha_2+2\alpha_3$　　C　$\alpha_2+\alpha_3$　　D　$\alpha_1+2\alpha_3$

三、（5 分）设$A=\begin{bmatrix}5&2\\1&0\end{bmatrix}$，$\mathrm{B}=\begin{bmatrix}1&3\\4&1\end{bmatrix}$求$\begin{bmatrix}A&B\\B&A\end{bmatrix}$的行列式

四、(10 分) 已知方程组 (I) $\begin{cases} x_1+x_2+bx_3=0 \\ x_1+(b-2)x_2+x_3=0 \end{cases}$ 与 $(II)\begin{cases} x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$ 同解求参数 a，b 及方程组 (I) 的全部解。

五、(5 分) 试求由 $\begin{matrix} \pi_1\text{：}\ 2x-y+2z-3=0 \\ \pi_2: 3x+2y-6z-1=0 \end{matrix}$ 所构成的二面角的角平分面方程（注意有两个）

六、(10 分) 已知二次型 $f(x\quad y\quad z)=X^TAX$,其中 $X=(x\quad y\quad z)^T$,A 是三阶实对称矩阵 tr（A）=1，$\gamma_1=(1\quad 0\quad 0)^T$，$\gamma_2=(0\quad 1\quad -1)^T$ 对应于（E-A）X=0 的基础解系

（1）求正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵并将 $f(x\quad y\quad z)$ 化成标准型。

（2）求矩阵 A 以及 A^{2n}

（3）判断 $f(x\quad y\quad z)=1$ 在空间直角坐标系中表示何种几何图形。

七、(10 分) 设 $a_i=(a_{i1}\quad a_{i2}\cdots\quad a_{in})^T(i=1,2,3\cdots r\ \ r<n)$ 是 n 维实向量，且 a_1，a_2，$\cdots$，a_r 线性无关已知 $\beta=(b_1\quad b_2\cdots\quad b_n)^T$ 是线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases}$ 的非零解向量，

试判断向量组 a_1，a_2，$\cdots$，a_r，β的线性相关性。

哈工大　　2021 年　　秋　　季学期

线性代数与空间解析几何（期末）试　题

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								

注意事项：

1. 本卷满分 60 分；
2. 请在答题卡上用黑笔答题，用 2B 铅笔涂学号，本卷答题无效；
3. 本卷共三大页，请勿缺损，否则按作弊处理；
4. 本卷除装订线外任何地方均可做演算用，考试结束后与答题卡一起上交；
5. 本试卷为模拟试题，难度远大于期末考试，请大家自行体会.

一、填空题（每题 2 分，共 20 分）

1. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}=$____________________.

2.设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵$|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$,则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$____________.

3.方程 $x^2+y^2+5z^2-6xy-2xz+2yz-6x+6y-6z+10=0$ 所表示的在空间直角坐标系下的图形是________________.

4.设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{100}=$________________.

5.过点 $M_1(0,0,1)$和 $M_2(3,0,0)$且与平面 $y+z-1=0$ 成 45° 的平面方程为____________________________.

6.方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$有解的充要条件是__________________.

7.设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为三维实列向量，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为正定矩阵，则 k 的取值范围为

____________.

8.$\mathscr{A}$是 $\mathbf{R}^3$ 上的一个线性变换，已知$\mathscr{A}$在自然基下的矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，

则$\mathscr{A}$在基 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为__________________.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\lambda_i(i=1,2,...,n)$是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个互不相同的特征值，ξ_1 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_1 的一个特征向量，则矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\lambda_1\xi_1\xi_1^T$ 的特征值为

________________.

10. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$为线性方程组$\boldsymbol{AX=O}$的一个基础解系，$\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2$，

$\beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3,\cdots,\beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1$，其中$t_1,t_2$为实数，若$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$

也为 $\boldsymbol{AX=O}$ 的一个基础解系，则t_1,t_2满足的条件是________________.

二、（7 分）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，求$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

三、（7 分）求过点 $P(2,1,0)$且与直线$\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+25}{-2}$垂直相交的直线.

四、（7 分）已知方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，试求 a 的值及公共解.

五、（7 分）设三维线性空间 $\mathbf{P}^3$ 上的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,1)^{\mathrm{T}}$，向量 ξ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 x_1,x_2,x_3. ξ 在 $\mathbf{P}^3$ 上另一组基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 y_1,y_2,y_3 且有 $y_1=x_1-x_2-x_3$，$y_2=-x_1+x_2$，$y_3=x_1+2x_3$，求基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$.

六、（7 分）设实二次型 $f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+x_3^2$.

（1）求正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 化 f 为标准型；

（2）判定 $f=(x_1,x_2,x_3)$ 表示空间中何种几何曲面.

七、（5 分）证明：可逆实方阵必可表示为一正定矩阵与一正交矩阵的积.

答案

一、填空题

1. $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$　　2.3　　3.双叶双曲面

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 1 \\ 50 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　5. $y=0$ 或 $6x+y+18z-18=0$

6. $\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$　　7. $k>-1$　　8. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9.0，λ_2，λ_3，…，λ_n　　10. $\begin{cases} s=2n, t_1 \neq \pm t_2; \\ s=2n+1, t_1 \neq -t_2; \end{cases}$.

二、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$　　三、$\dfrac{x-2}{120}=\dfrac{y-1}{131}=\dfrac{z}{311}$

四、a=1 时公共解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, k_1 为任意常数；

a=2 时公共解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, k_2 为任意常数.

五、$\boldsymbol{\beta}_1=(-1,-4,3)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(-4,-3,-1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,2)^T$

六、$P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$, $f=y_2^2+4y_3^2$　　椭圆柱面

七、略

哈工大 (sz)2021年线代期末

1. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}^{2010}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{2011}=?$

2. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ $|\vec{a}|=3$ $|\vec{b}|=5$ $|\vec{c}|=7$ 求 ~~...~~ $\vec{a}$, $\vec{b}$ 夹角

3. $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 系数矩阵为A. 若存在三阶矩阵 $B\neq0$. s.t. $AB=0$. 则 $\lambda=$ ___.

4. 设 $\beta_1=(0\ 1\ -1)^T$ $\beta_2=(a\ 2\ 1)^T$ $\beta_3=(b\ 1\ 0)^T$ 与向量组 $\alpha_1=(1\ 2\ -3)^T$ $\alpha_2=(3\ 0\ 1)^T$ $\alpha_3=(9\ 6\ -7)^T$ 具有相同的秩. 且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示. 则 $a=$ ___ $b=$ ___.

5. $\begin{cases}5x^2+3y^2-3z^2=12\\y=3\end{cases}$ 在 xOz 面上投影绕 x 轴一周所成曲面 ____.

6. $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 且 A, B 相似. $R(A-2E)+R(A-E)=$ ___.

二.

1. $\vec{a}=(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$ $|\vec{b}|=1$. $|\vec{a}\times\vec{b}|=1$ 则 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=$ ___.

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 1.

2. 设n阶阵 A与B等价. 则 ___

A. $|A|=a\neq0$. 则 $|B|=a$. B. $|A|=a\neq0$. 则 $|B|=-a$

C. $|A|=a\neq0$ 则 $|B|\neq0$ D. $|A|=0$ 则 $|B|=0$.

3. $A=\begin{bmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{bmatrix}$ $b\neq0$. $R(A^*)=1$. 则 a. b 关系.

4. $Ax=b$. 未知数4个. 方程3个. $R(A)=2$. 设 η_1,η_2,η_3 是3个线性无关的解. c_1, c_2 任常. 通解 ___.

A. $c_1\eta_1+c_2\eta_2+\eta_3$ B. $c_1\eta_1+c_2\eta_2-(c_1+c_2)\eta_3$ C. $c_1(\eta_1-\eta_3)+c_2(\eta_2-\eta_3)+(\eta_1+\eta_3)$

D. $c_1(\eta_1-\eta_3)+c_2(\eta_2-\eta_3)+\dfrac{(\eta_1+\eta_3)}{2}$

5. $\alpha_2.\alpha_3.\alpha_4.\beta$ 线性相关 $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3.\beta$ 线性无关.

A. β 可由 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ 线表

B. α_1 可由 ~ 线表.

C. $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3.\alpha_4$ 关

D. 无.

6. $A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ 则 $a=$ $b=$.

主管领导审核签字

哈尔滨工业大学 2020 年 秋季学期

代数与几何 期末试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

片纸鉴心 诚信不败

授课教师________ 姓名________ 学号________ 院系________

密 封 线

注意事项： 哈工大资源分享站 QQ2842305604

1. 本卷满分 60 分；
2. 请在答题卡上用黑笔答题，用 2B 铅笔涂学号, 本卷答题无效；
3. 本卷共八页, 请勿缺损, 否则按作弊处理；
4. 本卷除装订线外任何地方均可做演算用，考试结束后与答题卡一起上交.

试卷中的字母 E 表示单位矩阵，A^* 表示矩阵的伴随矩阵；

$E(\mathrm{A})$ 表示矩阵 A 的秩，A^{-1} 表示可逆矩阵 A 的逆矩阵.

一、填空题（每题 2 分，共 5 小题，满分 10 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}$ =________

2. 设三阶方阵 A 满足 $|A+E|=|A+2E|=|A+3E|=0$，则 $|A+4E|$ =________

3. 曲线 $L:\begin{cases} y=0 \\ z=3x \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面方程为________

4. 设 $\wp$ 为 R^3 的线性变换，它使 $\wp\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}, \wp\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \wp\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$，则 $\wp$

在基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ 下的矩阵为____________.

5. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2$ 正定，则 λ 满足的条件为 ________________________.

二、选择题（每题 2 分，共 5 小题，满分 10 分）

1. 若矩阵 A 经过初等变换化成矩阵 B，则（ ）

A 存在矩阵 P，使得 $PA=B$

B 存在矩阵 P，使得 $BP=A$

C 存在矩阵 P，使得 $PB=A$

D 方程组 $Ax=0$ 与同解 $Bx=0$

2. 已知直线 $L_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$ 与 $L_2:\dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_2}$ 相交与一点，令 $\alpha_i=\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix},i=1,2,3$ 则（ ）

A α_1 可由 α_2,α_3 线性表示

B α_2 可由 α_1,α_3 线性表示

C α_3 可由 α_1,α_2 线性表示

D $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

3. 设 4 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式为 $A_{12}\neq 0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $A^*x=0$ 的通解为（ ）

A $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

B $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$

C $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$

D $x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$

4. 设A为 3 阶方阵，α_1,α_2为属于特征值 1 的线性无关的特征向量，α_3为A的属于特征值-1 的特征向量，若存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$P$为（　）

A $(\alpha_1+\alpha_3,\ \ \alpha_2,\ \ -\alpha_3)$

B $(\alpha_1+\alpha_2,\ \ \alpha_2,\ \ -\alpha_3)$

C $(\alpha_1+\alpha_3,\ \ -\alpha_3,\ \ \alpha_2)$

D $(\alpha_1+\alpha_2,\ \ -\alpha_3,\ \ \alpha_2)$

5. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则矩阵$A,B$（　）

A 合同且相似

B 合同但不相似

C 不合同但相似

D 既不合同也不相似

三、（5 分）. 设 $\alpha_1=(1,2,1)',\alpha_2=(2,3,3)',\alpha_3=(3,7,1)'$;

$$\beta_1=(3,1,4)',\beta_2=(5,2,1)',\beta_3=(1,1,-6)'.$$

（1）验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 都是 R^3 的基；

（2）求由前一个基到后一个基的过渡矩阵；

（3）求由向量 $(0,-2,3)$ 在这两个基下的坐标。

四、（8 分）讨论当参数 a,b 取何值时，下面的方程组无解？有唯一解？有无穷多个解？并在有无穷多个解时，写出方程组的通解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

五、（10 分）设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\ge b$.

（I）求 a,b 的值

（II）求正交变换矩阵 Q

六、（10 分）设 A 为 2 阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$，其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量

（I）证明 P 为可逆矩阵

（II）若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵.

七、（7 分）证明题

（1）设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，求证：$r(A^TA)=r(A)$.

（2）设 A 为三阶方阵，向量 α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值的 $-1,1$ 的特征向量，而 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，求证：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2020 学年 秋 季学期

《代数与几何》试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范　　遵守考场纪律

姓名　学号　班号　学院

密　封　线

注：本试卷中 E 表示单位矩阵，$R(A), A^*, A^T$ 分别表示 A 的秩，A 的伴随矩阵和 A 的转置矩阵。

一、填空题（每小题 1 分，共 5 分）

1. 如果 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$，则 $x =$ $\frac{3}{2}$ 。

2. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$，则 $A^{10} =$ $11^9 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ 。

$35\cdot$

$(1,-2,4)$

3. 过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程是__________。

$-16(x-2)+14y-11(z+3)=0$

4. 已知空间中四点 $A(1,1,1), B(4,4,4), C(3,5,5), D(2,4,7)$，则四面体 $ABCD$ 的体积是 2 。

$\frac{1}{6}[(3,3,3)\ (2,4,4)\ (1,5,6)]$

5. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩 $R(A) =$ 3 。

$2m-n \le m \le m$

m

$R(A)+R(B)-n \le R(AB) \le \min\{R(A),R(B)\}$

二、选择题（每小题 1 分，共 5 分）

1. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，设 B 为 $n\times m$ 矩阵，E 为 m 阶单位矩阵，若 $AB=E$，则（ A ）。

   (A) 秩 $R(A)=m$，秩 $R(B)=m$　　(B) ~~秩 $R(A)=m$~~，秩 $R(B)=n$

   (C) ~~秩 $R(A)=n$~~，秩 $R(B)=m$　　(D) 秩 $R(A)=n$，秩 $R(B)=n$

2. 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，

   记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$（ D ）。

   (A) P_1P_2　　(B) $P_1^{-1}P_2$　　(C) P_2P_1　　(D) $P_2P_1^{-1}$

3. 设 A,B 均为 n 阶矩阵，下述论断不正确的是（ C ）。

   (A) A 可逆，且 $AB=0$，则 $B=0$ ✓

   (B) A,B 中有一个不可逆，则 AB 不可逆

   (C) A,B 可逆，则 $A+B$ 可逆

   (D) A,B 可逆，则 $A^{\mathrm{T}}B$ 可逆

4. 若向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩为 r，则下列结论哪一个不成立（ C ）。

   (A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个含 r 个向量的向量组线性无关 ✓

   (B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意 r 个线性无关的向量组与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 等价

   (C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意 r 个向量都线性无关

   (D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中 $r+1$ 个向量均线性相关

5. 设 A,B 均为 2 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵。若 $|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为（ C ）。

   (A) $\begin{pmatrix}0&3B^*\\2A^*&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}0&2B^*\\3A^*&0\end{pmatrix}$

   (C) $\begin{pmatrix}0&3A^*\\2B^*&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}0&2A^*\\3B^*&0\end{pmatrix}$

$AA^*=|A|E$

$C|B|$

三、（4 分）求两异面直线 $l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$，$l_2: x-2=y=z-3$ 之间的距离。

解 $P_1(0,0,0)$ $P_2(2,0,3)$

$s_1(1,2,3)$ $s_2(1,1,1)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$3i+j+2k$

$-k-2i-3j$

$i-2j+k$

$(1,-2,1)$

$(2,0,3)$

$$d=\left|\frac{5}{\sqrt{1+4+1}\,|s_1\times s_2|}\right|$$

$$=\frac{5}{6\sqrt{6}}$$

四、（4 分）计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a+1 & b & c & d \\ a & b+2 & c & d \\ a & b & c+3 & d \\ a & b & c & d+4 \end{vmatrix}$.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & d \\ 0 & a+1 & b+2 & c & d \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & d \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & & 2 & & \\ -1 & & & 3 & \\ -1 & & & & 4 \end{vmatrix}=(1+a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{3}c+\tfrac{1}{4}d)\times1\times2\times3\times4$$

$$24+24a+12b+8c+6d$$

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

五、（4 分）已知 $A^*X = A^{-1} + 2X$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X.

$$|A|A^{-1}X = A^{-1} + 2X$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(|A|A^{-1} - 2E)X = A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(|A|E - 2A)X = E$$

$$X = (4E - 2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

六、（3 分）设 A 是 $m \times n\,(m \geq n)$ 矩阵，若 $R(A) = n$，$AB = 0$，则 $B = 0$.

$$R(A) + R(B) - n \leq R(AB)$$

$$R(B) \leq 0$$

$$\therefore R(B) = 0$$

$$\therefore B = 0$$

七、（3 分）设α,β是3维列向量，矩阵$A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}+\beta\beta^{\mathrm{T}}$，其中$\alpha^{\mathrm{T}},\beta^{\mathrm{T}}$分别为$\alpha,\beta$的转置。证明：

(1) $R(A)\le 2$. $R(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le R(\alpha\alpha^T)+R(\beta\beta^T)$

(2) 若α,β线性相关，则$R(A)<2$.

$\because R(\alpha)=R(\alpha^T)\le 1$ $\le \min\{R(\alpha),R(\alpha^T)\}$

$R(\beta)=R(\beta^T)\le 1$ $+\min\{R(\beta),R(\beta^T)\}$

$\Rightarrow R(A)\le 2$

(2) 则 $\beta=k\alpha$

$\beta^T=k\alpha^T$

$\therefore R(A)=R(\alpha\alpha^T+k^2\alpha\alpha^T)=R((1+k^2)(\alpha\alpha^T))=R(\alpha\alpha^T)<2$

八、（2 分）设A是n阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$n$维列向量。已知$A\alpha_1=c_1\alpha_1$，$A\alpha_2=c_2\alpha_1+c_1\alpha_2$，$A\alpha_3=c_2\alpha_2+c_1\alpha_3$，$c_2\ne 0$. 如果$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(c_1\alpha_1,c_2\alpha_1+c_1\alpha_2,c_2\alpha_2+c_1\alpha_3)$

$\parallel$

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}c_1&c_2&0\\0&c_1&c_2\\0&0&c_1\end{pmatrix}$ $\because$

$A(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{vmatrix}c_1&c_2\\0&c_1\end{vmatrix}$

$\because \alpha_1,\alpha_2$线性无关 $\Rightarrow c_1^2\ne 0$

$\Rightarrow c_1^3\ne 0\Rightarrow \begin{vmatrix}c_1&c_2&0\\0&c_1&c_2\\0&0&c_1\end{vmatrix}\ne 0$

$\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2019 级 期末试题及答案

（此卷满分 60 分）

注意事项：

1.本卷共七道大题，满分 60 分；

2.请用 2B 铅笔涂学号，用黑笔在答题卡上答题；

3.可在本卷上演算，在本卷上答题无效，考试结束后将本卷与答题卡一并上交；

4.本卷共两大页，请勿缺损，请勿拆开，否则按作弊处理.

试卷中 $\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$R(\boldsymbol{A})$，$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$ 依次表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}$ 的迹；$\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵.

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1.行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$________.

2.空间直角坐标系中曲线 C：$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得曲面的方程为________.

3.矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 相似，则 $R(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})+|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=$________.

4.设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$，且 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素和为 2，则 $|\boldsymbol{A}|$ 的各列元素的代数余子式之和为________.

5.设 $\mathscr{A}$ 是 V_2 中的一个线性变换，向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 是 V_2 的一个基，若 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=2\boldsymbol{\varepsilon}_2$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)=-\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2$，则 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1.设有两个平面 π_1：$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1$；$\pi_2$：$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2$，如果

$$R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{pmatrix}=1$$

则两平面的位置关系为（　　）.

(A) 两平面平行但不重合　　(B) 两平面重合

(C) 两平面交于一条直线　　(D) 无法确定

年　月　日

2.若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times p$ 矩阵，下列命题错误的是（　　）.

(A) 乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行的行向量是 $\boldsymbol{A}$ 的各行向量以 $\boldsymbol{B}$ 第 i 列元素

心得 体会 拓广 疑问

为系数的线性组合

(B) 若 A 和 B 都为非零矩阵，AB 有可能是零矩阵

(C) 若 $kA=0$，其中 k 是常数，则 $k=0$ 或 $A=0$

(D) 若 $AB=0$，则 $R(A)+R(B)\leqslant n$

3. 以 $A(1,1,1)$，$B(2,1,3)$，$C(0,2,1)$ 为顶点的三角形的面积为(　　).

(A)3　　(B) $\frac{3}{2}$　　(C)9　　(D) $\frac{9}{2}$

4. 下列关于向量空间的说法正确的是(　　).

(A)n 个 n 维向量生成的向量空间是 n 维的

(B)V 的子空间的维数一定小于 V 的维数

(C)$\mathbf{R}^3$ 中的直线是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间

(D)n 维向量空间 V 中的 n 个线性无关的向量是 V 的一组基

5. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是同阶正定矩阵，则下列矩阵中一定是正定矩阵的为(　　).

(A)$\boldsymbol{A}^n+\boldsymbol{B}$　　(B)$\boldsymbol{AB}$　　(C)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$　　(D)$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

三、(5分)　设向量空间 V 由下面的四个向量生成，求向量空间 V 的维数及一组基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}9\\4\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-7\\-3\\1\end{pmatrix}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

四、(10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,求矩阵 X,使得 $A^{*}XA=A^{-1}X+3E_3$.

五、(10 分) 问 a 满足什么条件时,方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+(1+a)x_3=1\\x_1+(1+a)x_2+x_3=a+1\\(1+a)x_1+x_2+x_3=a+4\end{cases}$ 无解?有唯一解?有无穷多解?有无穷多解时写出通解.

心得 体会 拓广 疑问

六(10分) 已知A是3阶实对称矩阵,二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$可经正交变换$X=PY$化为标准形$2y_1^2+2y_2^2-y_3^2$,且$(1,1,1)^T$是$AX=-X$的基础解系.

(1) 求出满足题目的正交矩阵P;

(2) 在空间直角坐标系中,方程$X^T(A+E)X=1$表示何种几何图形?

七、(5分) 设A是n阶实对称矩阵,证明:

(1) 若存在自然数m使得$A^m=0$,则$A=0$;

(2) 若存在自然数m使得$A^m=E_n$,则$A^2=E_n$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

参考答案

一、1. -40 2. $x^2+y^2+z^2=4$ 3. -16 4. $\dfrac{a}{2}$ 5. $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

二、1. B 2. A 3. B 4. D 5. A

三、解

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & -7\\ 0 & 1 & 4 & -3\\ 2 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & -7\\ 0 & 1 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\dim V=2$$

基 α_1,α_2. 四个向量中任两个都可.

四、解

$$\mathbf{AA}^*\mathbf{XA}=\mathbf{AA}^{-1}\mathbf{X}+3\mathbf{A}$$

$$|\mathbf{A}|\mathbf{XA}=\mathbf{X}+3\mathbf{A}$$

$$\mathbf{X}(2\mathbf{A}-\mathbf{E})=3\mathbf{A}$$

$$\mathbf{X}=3\mathbf{A}(2\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}$$

$$2\mathbf{A}-\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$(2\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}=3\mathbf{A}(2\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

五、解法 1

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1+a\\ 1 & 1+a & a\\ 1+a & 1 & 1\end{vmatrix}=-a^2(a+3)=0, a=-3 \text{ 或 } a=0$$

$a\neq 0$ 且 $a\neq -3$ 时，有唯一解.

$a=0$ 时，增广阵化为

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R(\mathbf{A})=1, R(\mathbf{B})=2$，方程组无解.

当 $a=-3$ 时

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

有无穷多解.

通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},k \text{ 为任意常数}$$

解法 2

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1+a & 1 & a+1\\ 1+a & 1 & 1 & a+4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1+a & 1\\ 0 & a & -a & a\\ 0 & -a & -a^2-2a & 3\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1+a & 1\\ 0 & a & -a & a\\ 0 & 0 & -a(a+3) & a+3\end{pmatrix}$$

$a \neq 0$ 且 $a \neq -3$ 时,有唯一解.

$a=0$ 时,增广阵化为

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R(\boldsymbol{A})=1,R(\boldsymbol{B})=2$,方程组无解.

当 $a=-3$ 时

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

有无穷多解.

通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},k \text{ 为任意常数}$$

六、解:(1) 由题目知 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值.

$\lambda_3=-1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{T}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的属于 2 的特征向量为 $\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\\ t_3\end{pmatrix}$,由实对称阵的性质,它与 $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ 正交,

所以 $t_1+t_2+t_3=0$.

基础解系为

年 月 日

$$T_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},T_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

规范正交化 $T_1,T_2,\beta_1=T_1,\beta_2=T_2-\dfrac{(T_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$$P_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},P_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

规范化 $T_3,P_3=\dfrac{T_3}{|T_3|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

P 不唯一，第一列与第二列都是单位向量，正交且分量和为零．第一、二列的顺序也可变，第三列也可以全为负，第三列的位置不能变．

(2) $A+E$ 的三个特征值为 $(3,3,0)$，$X^T(A+E)X$ 有标准形 $3y_1^2+3y_2^2$，所以 $X^T(A+E)X=1$ 是圆柱面(或椭圆柱面)．

七、证明：(1) 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，由 A 为实对称阵，λ_i 为实数，$1\leqslant i\leqslant n$．

由 $A^m=0$ 知 $\lambda_i^m=0$，故 $\lambda_i=0,1\leqslant i\leqslant n$．

由 A 为实对称阵，存在可逆阵 T 使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$$

由 $\lambda_i=0,1\leqslant i\leqslant n,T^{-1}AT=0,A=0$．

(2) 由 $A^m=E$ 知 $\lambda_i^m=1$，故 $\lambda_i=1$ 或 $-1,1\leqslant i\leqslant n$

心得 体会 拓广 疑问

$$(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}^2=\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$$

年 月 日

哈尔滨工业大学 2019 级期末考试模拟试题 （线性代数与空间解析几何）

（本卷满分 60 分，共七大题）

注：本试卷中，A^*，$A^T,R(A),tr(A)$分别表示矩阵A的伴随矩阵，转置矩阵，秩和迹，E表示单位矩阵.

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1.若 n 阶矩阵 A、B 满足 A+AB=3E，则 A+BA=______.

2.在空间直角坐标系中，方程$5x^2-3y^2-z^2+2019=0$表示的几何图形是_____.

3.已知存在可逆矩阵 P，使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$，则 R（A+E）+tr(A+E)=______.

4.已知α_1,α_2是线性空间 V 的一组基，$\mathcal{A}$ 是 V 的一个线性变换，若$\mathcal{A}$（ α_1 ）= α_1 +α_2，$\mathcal{A}$（2α_1+α_2）= α_2 ，则$\mathcal{A}$ 关于 V 的基α_1，α_2的矩阵 A=__________.

5.已知矩阵 A=$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\\4&1\end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix}2&-2\\0&3\\4&-3\end{pmatrix}$，且 A=BC，则$C^5=$ ________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 圆$\begin{cases}x^2+(y-3)^2+\left(z-3\sqrt{3}\right)^2=100\\ y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$的半径是（ ）

（A）3　　（B）6　　（C）8　　（D）10

2.设$\boldsymbol{A}$为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则$\boldsymbol{A}$的非零特征值为（ ）

（A）1　　（B）-1　　（C）2　　（D）-2

3.设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$是 4 阶矩阵，$A^*$为 A 的伴随矩阵，若$(1,0,1,0)^T$是方程组 $Ax=0$的一个基础解系，则 $A^*x=0$基础解系可为（ ）

（A） α_1，α_3　　（B） α_1，α_2　　（C） α_1，α_2，α_3　　（D） α_2，α_3，α_4

4.设 A、B 均是 n 阶实方阵，下列说法正确的是（ ）

（A）AB=**0**，R（A）>0，则 B=**0**

（B）若 A=B+B^T,B 正定，则 A 正定

（C）若 A、B 的伴随矩阵相等，则 A=B

（D）若齐次线性方程 AX=**0** 只有零解，则方程 AX=β 有唯一解

5. 矩阵 H=$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，I=$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$, T=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$, 则（ ）

（A）H、I 相似不合同　　（B）H、I 合同不相似

（C）I、T 合同不相似　　（D）I、T 既不相似也不合同

三、（5 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C。

四、（7 分）已知向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T, \alpha_2=(0,1,1)^T, \alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1=(1,a,1)^T, \beta_2=(1,2,3)^T, \beta_3=(1,3,5)^T$ 线性表出。

（1）求 a；

（2）将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

五、（10 分）求 a 为何值时，空间直角坐标系 O-xyz 中三个平面 π：ax+z=1; δ：x+ay=a; θ：ay+z=1 没有公共点？交于一点？交与一条直线时，求该直线的参数方程.

六、（10 分）已知 A 是 3 阶是实对称阵，ξ=$(2,2,2)^T$是 A 的属于特征值 1 的特征向量，且二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$经正交变换$X=PY$可以化为$y_1^2-2y_2^2-2y_3^2$.

（1）在空间直角坐标系中，方程$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示何种几何图形

（2）求出一个满足条件的正交变换矩阵P，并求矩阵 A.

七、（8 分）设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=0$, α,β为线性无关的 n 维列向量，满足 $A\alpha=\beta$，$A\beta=\alpha$ ，

（1）试求$|(A+2E)^*|$

（2）试证$R(A^{2k})=tr(A^2)$,其中 k 为非零自然数.

（七题附加题）

（3）试给出相似变换矩阵 P，使得 A 相似对角化。（提示：可引入α,β之外的 n 维列向量）。

基础学部百思堂

2020 年 1 月 2 日

哈尔滨工业大学 2019 级期末考试模拟试题 （线性代数与空间解析几何）

（本卷满分 60 分，共七大题）

注：本试卷中，A^*，$A^T, R(A), tr(A)$分别表示矩阵A的伴随矩阵，转置矩阵，秩和迹，E表示单位矩阵.

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 若 n 阶矩阵 A、B 满足 A+AB=3E，则 A+BA=<u>3E</u>.

2. 在空间直角坐标系中，方程$5x^2-3y^2-z^2+2019=0$表示的几何图形是<u>单叶双曲面</u>.

3. 已知存在可逆矩阵 P，使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$，则 R(A+E)+tr(A+E)=<u>14</u>.

4. 已知α_1,α_2是线性空间 V 的一组基，$\mathcal{A}$是 V 的一个线性变换，若$\mathcal{A}(\alpha_1)=\alpha_1+\alpha_2$，$\mathcal{A}(2\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_2$，则$\mathcal{A}$关于 V 的基$\alpha_1$，$\alpha_2$的矩阵 A=<u>$\begin{pmatrix}1&-2\\1&-1\end{pmatrix}$</u>.

5. 已知矩阵 A=$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\\4&1\end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix}2&-2\\0&3\\4&-3\end{pmatrix}$，且 A=BC，则$C^5=$<u>$\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}$</u>.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 圆$\begin{cases}x^2+(y-3)^2+\left(z-3\sqrt{3}\right)^2=100\\ y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$的半径是（C ）

（A）3　　（B）6　　（C）8　　（D）10

2. 设$\boldsymbol{A}$为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则$\boldsymbol{A}$的非零特征值为（A ）

（A）1　　（B）-1　　（C）2　　（D）-2

3. 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$是 4 阶矩阵，$A^*$为$A$的伴随矩阵，若$(1,0,1,0)^T$是方程组$Ax=0$的一个基础解系，则$A^*x=0$基础解系可为（ D ）

（A）α_1, α_3　　（B）α_1, α_2　　（C）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$　　（D）$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

4. 设 A、B 均是 n 阶实方阵，下列说法正确的是（ B）

（A）AB=**0**，R（A）>0，则 B=**0**

（B）若 A=B+B^T，B 正定，则 A 正定

（C）若 A、B 的伴随矩阵相等，则 A=B

（D）若齐次线性方程 AX=0 只有零解，则方程 AX=β 有唯一解

5. 矩阵 H=$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，I=$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$，T=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$，则（D ）

（A）H、I 相似不合同　　（B）H、I 合同不相似

（C）I、T 合同不相似　　（D）I、T 既不相似也不合同

三、（7 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C。

由题意可知矩阵C为2阶矩阵，故可设 $C=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，则由 $AC-CA=B$ 可得线性方程组：

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}\qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\-a&1&0&a&1\\0&-1&a&0&0\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&1+a\\0&-1&a&0&0\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&1+a\\0&0&0&0&1+a\\0&0&0&0&b-1-a\end{pmatrix}$$

由于方程组（1）有解，故有 $1+a=0,b-1-a=0$，即 $a=-1,b=0,$ 从而有

$$\begin{pmatrix}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\text{故有}\begin{cases}x_1=k_1+k_2+1\\x_2=-k_1\\x_3=k_1\\x_4=k_2\end{cases},\text{其中}k_1、k_2\text{任意.}$$

从而有 $C=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1&-k_1\\k_1&k_2\end{pmatrix}$

四、（5 分）已知向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1=(1,a,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(1,3,5)^T$ 线性表出。

（1）求 a；

（2）将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

① 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 表示

可知 $\left|\beta_1\beta_2\beta_3\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = a-5=0$，解得 $a=5$

②本题等价于求三阶矩阵 C 使得 $\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)C$

可知 $C=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)^{-1}\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

计算可得 $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

因此 $\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

五、(10 分) 求 a 为何值时，空间直角坐标系 0-xyz 中三个平面 π：ax+z=1; δ：x+ay=a; θ：ay+z=1 没有公共点？交于一点？交与一条直线时，求该直线的参数方程.

五、解法 1 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a(a+1)=0$，$a=0$ 或 $a=-1$.

$a=0$ 时，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，无穷多解. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

三平面交于一条直线，直线的参数方程为$\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$，$t$ 为任意常数. 当 $a=-1$ 时，增广阵为$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，可化为$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，方程组无解. 三平面没有交点.

$a \neq 0$ 且 $a \neq -1$ 时，方程组有唯一解. 三平面交于一点.

六、(10 分）已知 A 是 3 阶是实对称阵，ξ $=(2,2,2)^T$是 A 的属于特征值 1 的特征向量，且二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$经正交变换$X=PY$可以化为$y_1^2-2y_2^2-2y_3^2$.

（1）在空间直角坐标系中，方程$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示何种几何图形

（2）求出一个满足条件的正交变换矩阵P，并求矩阵 A.

六、解：(1) $y_1^2-2y_2^2-2y_3^2=1$，表示(旋转)双叶双曲面.

(2) 设 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 2 的特征向量，$\boldsymbol{A}$ 是实对称阵，所以 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\xi}_1)=0$，即

$$x_1+x_2+x_3=0$$

基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

规范正交化 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_3-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

(3)
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&&\\&-2&\\&&-2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&&\\&-2&\\&&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

七、（8 分）设 A 为 3 阶矩阵，|A|=0, α,β为线性无关的 n 维列向量，满足 $A\alpha=\beta$，$A\beta=\alpha$ ，

（1）试求$|(A+2E)^*|$

（2）试证$R(A^{2k})=tr(A^2)$,其中 k 为非零自然数.

（七题附加题）

（3）试给出相似变换矩阵 P，使得 A 相似对角化。（提示：可引入α,β之外的 n 维列向量）。

5. $|A|=0$ ，所以 $\lambda=0$ 至少为 A 的一重特征值

$A\alpha+A\beta=\beta+\alpha$

$(A-E)(\alpha+\beta)=0$

由于 α与β线性无关，所以 $R(\alpha+\beta)=1$.

又. $R(A-E)+R(\alpha+\beta)\le n$

所以 $R(A-E)<n$

$\lambda=1$ 至少为 A 的一重特征值.

$A\alpha-A\beta=\beta-\alpha$

$(A+E)(\alpha-\beta)=0$

同理得：$\lambda=-1$ 至少为 A 的一重特征值.

所以 A 的 3 个特征值 $\lambda_1=0$ $\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$

$|A+2E|=\sum_{i=1}^{3}(\lambda i+2)=6$

$|(A+2E)^*|=6^{3-1}=36$

(2) 由(1)可知，A有三个不同特征值.

所以存在可逆阵P，使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$

$A^{2k}=\left(P\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}P^{-1}\right)^{2k}=P\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}$

$R(A^{2k})=2$

$tr(A^2)=tr(PA^2P^{-1})=2$

所以 $R(A^{2k})=tr(A^2)$

法二： 设 X 为 $AX=0$ 的基础解系，证 X 与 α, β 线性无关

$\exists k_1, k_2, k_3 \quad k_1X + k_2\alpha + k_3\beta = 0$

$$k_1AX + k_2A\alpha + k_3A\beta = 0$$

即 $k_2\beta + k_3\alpha = 0$

由 α, β 线性无关 $k_2 = k_3 = 0$

$$k_1 = 0$$

则 $A(\alpha\ \beta\ X) = (\alpha\ \beta\ X)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(\alpha\beta X)^{-1}A(\alpha\beta X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$|\lambda E - B| = \lambda(\lambda^2 - 1) \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = 0$

对于 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对 $\lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 　　设 $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得 $(\alpha\beta X)^{-1}A(\alpha\beta X) = B$

$$T^{-1}BT = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}(\alpha\beta X)^{-1}A(\alpha\beta X)T = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

即 $Q = \underbrace{(\alpha\beta X)}_{P}\ T$

$= P\,T$ 为所求

哈尔滨工业大学 2018 级
期末试题及答案

（此卷满分 60 分）

注意事项：

1. 本卷共七道大题，满分 60 分；
2. 请用 2B 铅笔涂学号，用黑笔在答题卡上答题；
3. 可在本卷上演算，在本卷上答题无效，考试结束后将本卷与答题卡一并上交；
4. 本卷共两大页，请勿缺损，请勿拆开，否则按作弊处理.

试卷中 A^*，A^T，$R(A)$，$\mathrm{tr}(A)$ 依次表示矩阵 A 的伴随矩阵，A 的转置矩阵，A 的秩，A 的
E 表示单位矩阵.

一、填空题(每小题 2 分，共 10 分)

1. 设 A，B 是 4 阶方阵，且 $R(A)=4$，$R(B)=3$，则 $R(A^*B^*)=$ ________.

2. 以曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant 0)\\ 2x^2+y^2-2x=0\end{cases}$ 为准线，母线平行于 y 轴的柱面方程为________.

3. 设向量 $\alpha=(1,-1,0,1)^T$，则 $A=\alpha\alpha^T$ 的非零特征值为________.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维列向量，其中 $\alpha_2=4\alpha_1-\alpha_3$，且 α_1,α_3 线性无关. 若 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$，则线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 的通解为________.

5. 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个线性变换，$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，若 $\mathscr{A}(\varepsilon_1)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$，$\mathscr{A}(\varepsilon_2)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，则 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵为________.

二、选择题(每小题 2 分，共 10 分)

1. 已知空间中三点 $A=(1,0,-1)$，$B=(2,1,0)$，$C=(-4,3,2)$，以 O，A，B，C 为顶点的四面体的体积为(　　).

(A) $\frac{4}{3}$　　(B) $\frac{8}{3}$　　(C) 4　　(D) 8

2. 若 A 为 n 阶方阵，下列命题正确的是(　　).

(A) 若 A 的特征值为 n 个 k，则 A 与 kE 相似

(B) 若 A 可逆，则 A 的特征向量也是 A^{-1} 的特征向量

(C) 若 A 可相似对角化，则 A 有 n 个不同的特征值

(D) 若 A 有 n 个不同的特征向量，则 A 可以相似对角化

年　月

心得 体会 拓广 疑问

3. 设 A 为 3 阶方阵，$|A|=8$，$R(A+2E)=1$，则下列命题中错误的是（ ）.

(A) A 的 3 个特征值为 $-2,-2,2$ (B) $-\frac{1}{2}$ 是 A^{-1} 的一个特征值

(C) 4 是 A^* 的一个特征值 (D) A 不可以相似对角化

4. 对 n 元线性方程组 $AX=\beta$，$\beta\neq 0$，必有（ ）.

(A) 若 $R(A)=n$，则 $AX=\beta$ 有唯一解

(B) 若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=\beta$ 有唯一解

(C) 若 $AX=\beta$ 有无穷多解，则 $AX=0$ 也有无穷多解

(D) 若 ξ_1,ξ_2 为 $AX=\beta$ 的解，则 $\xi_1+\xi_2$ 也为 $AX=\beta$ 的解

5. 对于矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的关系表述正确的是（ ）.

(A) 既相似又合同 (B) 相似，但不合同

(C) 不相似，但合同 (D) 既不相似，也不合同

三、(5 分) 设实二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+4x_1x_3$ 正定. 试确定 t 的范围.

心得 体会 拓广

四、(10 分) 现有向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$，

Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-3\\-5\\0\end{pmatrix}$. 已知 Ⅰ，Ⅱ 是 $\mathbf{R}^3$ 的两组基.

(1) 求由基 Ⅰ 到基 Ⅱ 的过渡矩阵；

(2) 求向量 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$ 在基 Ⅰ 下的坐标.

五、(10 分) 问 a,b 满足什么条件时，方程组 $\begin{cases}x_1-5x_2+8x_3=3\\x_1-x_2=a\\-2x_1+2x_2+bx_3=2\end{cases}$ 无解？有唯一解？有无穷多解？有无穷多解时写出通解.

六、(10分)　已知A是3阶实对称阵，且A的每行元素和为3，$tr(A)=1$，$|A+E|=0$. 实二次型$f(x,y,z)=X^TAX$.

心得 体会 拓广

(1) 求正交矩阵P，使得正交变换$X=PY$把f化为标准形；

(2) 求A；

(3) 在空间直角坐标系$Oxyz$中，方程$f(x,y,z)=1$表示何种几何图形.

七、(5分)　设A是$m\times n$实矩阵，$|A^TA|\neq 0$. 证明：

(1) 如果$n\times p$矩阵B满足$AB=0$，则$B=0$；

(2) A^TA正定.

参考答案

一、1. 1　2. $x^2-2x-z^2+4=0$　3. 3　4. $k\begin{bmatrix}4\\-1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ 或 $k\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9\\0\\0\end{bmatrix}$，$k$ 为常数(可能还有其他不同答案；基础解系的向量与答案成比例，特解与答案中的特解的差应该是基础解系的倍数)　5. $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

二、1. A　2. B　3. D　4. C　5. C

三、解

$$A=\begin{bmatrix}6 & t & 2\\t & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$|6|=6>0;\begin{vmatrix}6 & t\\t & 1\end{vmatrix}=6-t^2>0,t^2<6$$

$$|A|=\begin{vmatrix}6 & t & 2\\t & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}t & 2\\1 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}6 & t\\t & 1\end{vmatrix}=2-t^2,t^2<2$$

所以 $t^2<2$，$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

四、解：$[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]P$，令 $B=[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]$，$A=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$，$P=A^{-1}B$.

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0\\-1 & 0 & -2 & \vdots & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 2 & 2 & 1\\0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\0 & 1 & 0\\-1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

(可以不求 A^{-1} 直接求 P)

$$P=A^{-1}B=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\0 & 1 & 0\\-1 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\0 & 1 & -5\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5 & -16\\0 & 1 & -5\\-3 & -3 & 8\end{bmatrix}$$

(2)β 在基 Ⅱ 下的坐标为 $(1,-2,1)'$，β 在基 Ⅰ 下的坐标为

$$X=PY=\begin{bmatrix}4 & 5 & -16\\0 & 1 & -5\\-3 & -3 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-22\\-7\\11\end{bmatrix}$$

心得 体会 拓广 疑问

五、解法 1

$$\begin{vmatrix}1 & -5 & 8\\1 & -1 & 0\\-2 & 2 & b\end{vmatrix}=4b=0,b=0$$

$b\neq 0$ 时，有唯一解.

$b=0$ 时

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & 8 & 3\\1 & -1 & 0 & a\\-2 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -5 & 8 & 3\\0 & 4 & -8 & a-3\\0 & 0 & 0 & 2a+2\end{pmatrix}$$

当 $b=0,2a+2\neq 0,a\neq -1$ 时，方程组无解.

当 $b=0,a=-1$ 时，有无穷多解

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & 8 & 3\\0 & 4 & -8 & -4\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -5 & 8 & 3\\0 & 1 & -2 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -2\\0 & 1 & -2 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

解法 2

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & 8 & 3\\1 & -1 & 0 & a\\-2 & 2 & b & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -5 & 8 & 3\\0 & 4 & -8 & a-3\\0 & -8 & b+16 & 8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -5 & 8 & 3\\0 & 4 & -8 & a-3\\0 & 0 & b & 2a+2\end{pmatrix}$$

$b\neq 0$ 时，有唯一解.

当 $b=0,2a+2\neq 0,a\neq -1$ 时，方程组无解.

当 $b=0,a=-1$ 时方程组有无穷多解

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & 8 & 3\\0 & 4 & -8 & -4\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -5 & 8 & 3\\0 & 1 & -2 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -2\\0 & 1 & -2 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

六、解：(1) 由 A 的每行元素和为 3 知，$\lambda_1=3$ 是 A 的特征值，对应的特征向量为 $T_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

由 $|A+E|=0$，所以 $\lambda_2=-1$，又有 $tr(A)=1,3+(-1)+\lambda_3=1$.

A 的三个特征值为 $3,-1,-1$.

设 A 的属于 -1 的特征向量为 $\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix}$，由实对称阵的性质，它与 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 正

年 月 日

交，所以 $t_1+t_2+t_3=0$.

基础解系为

$$T_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},T_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

规范化

$$T_1 \cdot P_1=\frac{T_1}{|T_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

规范正交化 $T_2,T_3,\beta_1=T_2,\beta_2=T_3-\frac{(T_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$$P_2=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},P_3=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

P 不唯一，第一列也可以全为负，第二列与第三列都是单位向量，正交且分量和为零. 列的顺序也可变.

(2) 求 A

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

$$A=P\begin{pmatrix}3&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}3&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}P^{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}&\frac{4}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

(3) $f=3y_1^2-y_2^2-y_3^2=1$. 表示(旋转) 双叶双曲面.

七、证明：(1) 由 $AB=0$，知 $A^TAB=0$. 由 $|A^TA|\neq 0$，知 A^TA 可逆，故 $B=0$.

(2)① $(A^TA)^T=A^TA$，A^TA 为实对称阵.

② 任取 $X_0\in R^n$，$X_0\neq 0$，由 (1) 知 $AX_0\neq 0$，所以 $X_0^TA^TAX_0=(AX_0)^T(AX_0)=|AX_0|^2>0$，$A^TA$ 正定.

材料学院2018级线性代数期末模拟试题

（此卷满分60分，共120分钟）

注：本试卷中，E表示单位矩阵，A^*，A^T,R(A),tr（A）分别表示矩阵A 的伴随矩阵，A的转置矩阵，A的秩和A的迹.

一、 填空题（每小题2分，共20分）

1． 行列式$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 1 & 2 & b & 3 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$=________________

2． 已知向量组$\beta_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$与向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$具有相同的秩，且$\beta_3$可由$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性表示，则a的值为_____________

3． 已知空间直角坐标系中三点A(1,0,-1),B(1,-2,0),C(1,1,1),则以A,B,C及坐标原点为顶点的四面体的体积为__________

4． 已知A 为3阶方阵，R（A）=2,则R（(A^*）*）=___________

5． 设三阶矩阵A,B相似，| |=$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$,则$|A^{-1}|$ = __________

6． 已知（$\frac{1}{\sqrt{2}}$，0，$\frac{1}{\sqrt{2}}$）^{T}，（0，1，0）^{T}，($\frac{1}{\sqrt{2}}$,0,-$\frac{1}{\sqrt{2}}$)^{T}是R^3的规范正交基，则α=（1，2，3）^{T}在该组基下的坐标下的坐标是______

7． 设A为3阶方阵，其特征值为3，-1，2，则| |=______

8． 设α，β是n维列向量，$\beta^T\alpha=0$,则$\alpha\beta^T$的特征值为_______

9． 圆$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0 \\ 2x+2y+z+1=0 \end{cases}$的半径为_________

10． 已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ 则 R(A)=____

二（7 分）设列向量组 $\beta_1\beta_2\cdots\beta_r$ 与列向量组 $\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_s$ 满足 $(\beta_1\beta_2\cdots\beta_r)=(\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_s)K$ 其中 K 为 sXr 矩阵，且 $\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_s$ 线性无关，证明 $\beta_1\beta_2\cdots\beta_r$ 线性无关的条件是 R（K）=r

三（7 分）设三阶实对称阵 A 的特征值为-1，1，1，$\xi=(0,1,1)^T$ 为对应于-1 的特征向量，求 A^n

四（7 分）设 A 是 mXn 阶实矩阵，且存在自然数 k 使 $(A^TA)^k=0$,试证

A=0

五（7 分）设向量组α_1，α_2，$\alpha_3\cdots\cdots\alpha_m$（m> 1）线性相关，且$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\cdots\cdots+\alpha_m$，证明：向量$\beta-\alpha_1$，$\beta-\alpha_2$，$\cdots\cdots\beta-\alpha_m$线性无关。

六（7分）设 $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$，试求：

（1）A 的特征值和特征向量　（2）正交矩阵 Q，使 $Q^{T}AQ$ 为对角阵

七（5分）设有齐次线性方程组 AX=β（β≠0）的系数矩阵的秩为 r，η_1，$\eta_2\cdots\eta_{n-r}$，η_{n-r+1}是它的 n-r+1 个线性无关的解向量，证明：它的任意一个解向量都可以表示为 $X=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$

其中 $k_1+k_2+k_3\cdots+k_{n-r+1}=1$

材料学院 2018 级线性代数期末模拟试题

（此卷满分 60 分，共 120 分钟）

注：本试卷中，E 表示单位矩阵，A^*，A^T,R(A),tr（A）分别表示矩阵 A 的伴随矩阵，A 的转置矩阵，A 的秩和 A 的迹.

一． 填空题（每题 2 分，共 5 题）

1 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 3 & x \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中的常数项为______________。

2 已知 λ 是 A 的特征值，A^* 是 A 的伴随阵，则 A^* 的特征值 =____________。

3 设三阶方阵 A 满足 $|A|=\frac{1}{2}$，且 $B=(2A^2)^{-1}-2(A^{-1})^2$，则 $|B|=$________________。

4 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ \quad -x_2 + 2x_3 = 2 \\ \quad \lambda(\lambda-1)x_3 = (\lambda-1)(\lambda-2) \end{cases}$ 无解，则 $\lambda=$________

5 设 A 为 2018 阶矩阵，且满足 $A^T=-A$，则 $|A|=$ ________________ 。

二选择题（每题 2 分，共五题）

6.设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，C 是 n 阶非奇异阵，$B=AC$，若 $r(A)=r$，$r(B)=r_1$，则（ ）

（A）$r>r_1$ （B）$r<r_1$ （C）$r=r_1$ （D）r 与 r_1 的关系依 C 而定

7 如果满足（ ）条件，则矩阵 A 与矩阵 B 相似。

（A） $|A|=|B|$ （B）A 与 B 有相同的特征多项式

（C）$r(A)=r(B)$ （D）n 阶矩阵 A 与 B 有相同的特征值且 n 个特征值各不相同

8．假设 A 是 3 阶方阵，特征值分别为 0，1，2，则　　　[　　]

（A）矩阵 A 的秩 $r(A)=3$　　　（B）行列式 $|A^TA|=1$

（C）行列式 $|A+E|=0$　　　（D）矩阵 $(A+E)^{-1}$ 的特征值分别为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$

9.设有两个平面方程

π_1与π_2：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

π_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

如果 $R\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$,则一定有（ ）

Aπ_1与π_2平行　　　Bπ_1与π_2垂直

Cπ_1与π_2重合　　　Dπ_1与π_2相交

10.设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$则 A 与 B 的关系是（ ）

A 相似但不合同　　　B 合同但不相似

C 等价但不相似　　　D 相似但不等价

三（5 分）设矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，且满足关系式 $AP=PB$，

求：A，　A^5．

四（10 分）线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$

讨论当 a,b 为何值时，方程组有解，当方程组有解时，用其导出组的基础解系表示方程组的全部解。

五（10 分）在 $P[x]_2$ 中，设有两组基（1）1，x，x^2；（2）1，1+x，$(1+x)^2$

（1） 求（1）到（2）的过渡矩阵

（2） 求由基底（1）经过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$得到的新基

六（10 分）设向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

（1）求它的一个极大无关组和秩，并将其余向量由极大无关组线性表示。

（2）求向量组的一个正交向量组。

七（5 分）　设 A 是 n 阶正交矩阵，且 $|A|<0$ ，证明：$|A+E|=0$

哈尔滨工业大学（威海）17/18 学年秋季学期

代数与几何（测试一）

考试形式：闭卷 答题时间 30（分钟） 本卷面成古课程成绩 10%，每题 1 分，共 10 分。

1．行列式$\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&2\\0&1&2&3\\1&2&3&4\end{vmatrix}$=（　　　　　）

2．多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x+1&1&1&1\\2&x+2&2&2\\3&3&x+3&3\\4&4&4&x+4\end{vmatrix}$中 x^3的系数为（　　　　　）

3．设 A 是二阶矩阵，若行列式$|A|=2$，则$|-2A|=$（　　　　　）

4．设矩阵 A 满足 $A^2+A-E=0$，则 $A^{-1}=$（　　　　　）

5．设 $A=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$，则 A 的伴随矩阵 A*为（　　　　　）

6．设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 行与第 2 行交换得 B，再把 B 的第 1 行加到第 3 行得 C，则满足 PA＝C 的可逆矩阵 P 为（　　　　　）

A、$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ B、$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ C、$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ D$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

7．设 AB 都是 n 阶方阵，下列命题正确的是（　　　　　）

A、若 A 或 B 可逆，则 AB 可逆　　B、若 A 或 B 不可逆，则 AB 不可逆

C、若 A 与 B 都可逆，则 A＋B 可逆　　D、若 A 与 B 都不可逆，则 A＋B 不可逆

8．设 m×n 矩阵 A 的秩 $R(A)=m<n$，E 为 m 阶单位阵，则（　　　　　）

（A）A 的任意一个 m 阶子式都不为 0（B）若 BA＝0，则 B＝0

（C）经初等行变换，可将 A 化为（E，O）的形式（D）以上都不对

9．设 $A=\begin{pmatrix}1+a&1&1\\2+3a&2+a&2\\3+5a&3&3+a\end{pmatrix}$，已知 A 的秩为 2，则 a=（　　　　　）

10．矩阵方程 $X\begin{pmatrix}1&2\\3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-5\\2&5\end{pmatrix}$的解 X=（　　　　　）

测试一答案：1，10，8，A+E，$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，C，B，B，2，$\begin{pmatrix}-6&1\\-1&1\end{pmatrix}$

2017《代数与几何》试题

一、填空题

1. 行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\3&3&4&4\\1&4&6&7\\1&1&2&2\end{vmatrix}$，则$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=$__________.

2. 设 3 阶方阵 A 的行列式$|A|=4$，则$|(A^*)^{-1}|=$__________.

3.设 A,B 为 3 阶矩阵,且$|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$,则$|A+B^{-1}|=$_______

4. 设方阵A满足$A^2-2A-2E=0$，则$(A-2E)^{-1}=$____________

5. 设 n 阶方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$,则$|A|=$__________

6. 设A为 3 阶正交矩阵，$\alpha=(0,3,-4)$,则向量$A\alpha$的长度＝__________

7. 设10×14矩阵A的秩为8，则$AX=0$的解向量组的秩为__________

8.设 3 阶矩阵 A 的特征值互不相同，若行列式$|A|=0$，则 A 的秩为______.

9. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，2，则$|4A^{-1}-E|=$______.

10. 设二次型$f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2)^2+(-x_1+ax_2)^2$正定,

则 a 的取值范围是_____

二、选择题

1. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$. (B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$. (D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$.

2.6 阶方阵A的秩$R(A)=3$，A^*为其伴随阵，则$R(A^*)=($ $)$

(A) 0 (B) $n-1$ (C) 1 (D) n

3.若矩阵$A_{4\times5}$有一个 3 阶子式为 0，则（）

(A) 秩(A)≤2(B) 秩(A)≤3(C) 秩(A)≤4(D) 秩(A)≤5

4. 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $R(A)=m<n$，E 为 m 阶单位阵，则( ).

(A) A 的任意 m 个列向量线性无关 (B) A 的任意一个 m 阶子式都不为 0

(C) 若 BA=0，则 B=0 (D) 经初等行变换，可将 A 化为(E_m,O)的形式

5. 设对方阵 A 施行初等变换得到方阵 B，且$|A|\neq0$，则( ).

(A) 必有$|A|=|B|$ (B) $|B|\neq|A|$

(C) $|B|\neq0$(D) $|B|=0$或$|B|\neq0$依赖于所作的初等变换

6.n元齐次线性方程组$AX=0$有非零解的充分必要条件是( )

(A) $R(A)\le n$(B) $R(A)>n$(C) $R(A)\ge n$(D) $R(A)<n$

7.设非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的导出组为 AX=0，则下列结论不成立的是（）.

(A) 设 u 是 AX=0 的通解，η为 $AX=\beta$ 的特解，则η+u 是 $AX=\beta$ 的通解

(B) 设ξ,η为 $AX=\beta$ 的解，则 $a\xi+b\eta$ 是 AX=0 的解

(C) 若 AX=β 有唯一解，则 AX=0 有唯一解

(D) 若 AX=β 有无穷多解，则 AX=0 有无穷多解

8.设 X，Y 是方阵 A 的两个属于不同特征值的特征向量，则( ).

(A) $X^T Y=0$ (B) X 与 Y 线性无关

(C) X+Y 也是 A 的特征向量 (D) kX 也是 A 的特征向量

9. n阶方阵A具有n个不同特征值是A与对角矩阵相似的（）条件。

(A) 充分条件(B)必要条件(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要

10.设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A 与 B

(A)合同且相似。(B)合同不相似。(C)不合同但相似。(D)既不合同也不相似。

三、设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-1 \\ 2x_1+kx_2-2x_3=0 \\ kx_1+2x_2+x_3=k \end{cases}$

（1）k 为何值时，方程组有唯一解、无解；

（2）k 为何值时，方程组有无穷多解？并求出其通解。

四、求正交矩阵P将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$化为标准型，并写出相应的标准型。

2017《代数与几何》试题答案

一 填空题

1. 18
2. 1/16
3. 3
4. $\frac{A}{2}$
5. 0
6. 5
7. 6
8. 2
9. 3
10. $a \neq -2$

二 选择题

1.A 2.A 3.A 4 C 5.C 6.D 7.B 8.B 9.A 10.D

三

解：（1）系数矩阵 A=$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & k & -2\\ k & 2 & 1\end{bmatrix}$，增广矩阵 B=$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & k & -2 & 0\\ k & 2 & 1 & k\end{bmatrix}$

初等变换得 A→$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2-k & 0\\ 0 & 0 & 1+k\end{bmatrix}$ B→$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & k & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1+k & 0\end{bmatrix}$

无解时 R(A)+1=R(B)

k=−1时，R(A)=R(B)=2 不符

k=2 时， R(A)=2 R(B)=3

唯一解 R(A)=R(B)=3

$k \neq -1$，2

（2）当 R(A)=R(B)<3 时，方程有无穷多组解

k=−1 得其同解线性方程组为 $\begin{cases}x_1 = 0\\ x_2 = 2\end{cases}$

取特解$\alpha=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$，其导出组的基础解系为$\beta=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

得 $X=\alpha+k\beta=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ k为任意常数

四

解 二次型的矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}$

由矩阵 A 的特征多项式$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-4&-2&-2\\-2&\lambda-4&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-4&-\lambda&0\\-2&\lambda-4&0\\0&0&\lambda-2\end{bmatrix}$

$=(\lambda-2)(\lambda^2-10\lambda+16)$ 得$\lambda_1=2$，$\lambda_2=8$，$\lambda_3=2$

当$\lambda=2$ 时，$(2E-A)x=0$，由$\begin{bmatrix}-2&-2&0\\-2&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$得特征向量$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

当$\lambda=8$ 时，$(8E-A)x=0$,由$\begin{bmatrix}4&-8&0\\-2&4&0\\0&0&6\end{bmatrix}$得特征向量$\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

由于不同特征值对应的特征向量已经正交，只需要单位化，同一特征值对应的特征向量需要正交化。

令$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，则$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$

单位化$\gamma_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}$，$\gamma_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，$\gamma_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix}$，得 $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{3}&\frac{2}{\sqrt{5}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\0&\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}$

标准型为$f(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2+8y_2^2+2y_3^2$

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2017 级期末试题及答案

（此卷满分 60 分）

注：本试卷中，A^*，A^T，$R(A)$，$\mathrm{tr}(A)$ 依次表示矩阵 A 的伴随矩阵，A 的转置矩阵，A 的秩和 A 的迹，E 表示单位矩阵.

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 已知三阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_3)$，且 $|A|=a$，$|B|=b$，则 $|A+B|=$________.

2. 已知 $A=P_1P_2$，其中 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$________.

3. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的基，则基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵为________.

4. 已知 A 是 3 阶方阵，$R(A)=2$，则 $R((A^*)^*)=$________.

5. 已知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是线性空间 V 的基，$\mathscr{A}$ 是 V 的一个线性变换，若 $\mathscr{A}(\varepsilon_1)=\varepsilon_1$，$\mathscr{A}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=\varepsilon_2$，则 $\mathscr{A}$ 关于 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 的矩阵 $A=$________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，则（　　）.

(A) 当 $R(A)<n$ 时，$AX=\beta$ 有唯一解

(B) 当 $R(A)<n$ 时，$AX=\beta$ 有无穷多解

(C) 当 $R(A)=n$ 时，$AX=\beta$ 有唯一解

(D) 当 $R(A)=n$ 时，$AX=\beta$ 有无穷多解

2. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则（　　）.

(A) 当 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关时，$r\leqslant s$

(B) 当 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关时，$r\leqslant s$

(C) 当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关时，$r\leqslant s$

(D) 当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关时，$r\leqslant s$

3. 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1\quad b_2\quad b_3)$，$a_1a_2a_3\neq 0$，$b_1b_2b_3\neq 0$，则（　　）.

(A) 0 是 A 的 1- 重特征值　　(B) 0 是 A 是 2- 重特征值

年　月　日

(C)0 是 $\boldsymbol{A}$ 的 3- 重特征值　　(B)0 至少是 $\boldsymbol{A}$ 是 2- 重特征值

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称正定矩阵，$\boldsymbol{P}$ 是 3 阶实可逆矩阵，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，则(　　).

(A) $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}|>1$　　(B) $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}|<1$

(C)$\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵　　(D)$\boldsymbol{B}$ 不是正定矩阵

5. 设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，则(　　).

(A)$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 相似，但不合同　　(B)$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 合同，但不相似

(C)$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 等价，但不相似　　(D)$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 相似，但不等价

三、(5 分)　设 a,b 是两个数，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ a & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -b & a\\ 0 & 0 & 0 & b\end{pmatrix}$，整数 $m>0$，求 $\boldsymbol{A}^{2m}$.

四、(10 分)　已知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$.

五、(10 分) 问 a 为何值时,直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中三个平面 $\pi_1: ax+z=1$;$\pi_2: x+ay=a$;$\pi_3: ay+z=1$ 没有公共点?交于一点?交于一条直线?在交于一条直线时,写出该直线的参数方程.

六、(10 分) 已知二次型 $f(x,y,z)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,其中 $\boldsymbol{X}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$,$\xi_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$,$\xi_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$ 的基础解系.

(1) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵;

(2) 求出二次型 $f(x,y,z)$;

(3) 在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中,方程 $f(x,y,z)=1$ 表示何种几何图形.

年　月　日

七、(5 分) 已知 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 有 n 个互不相同的特征值，证明 $R(\mathbf{A}^2)=R(\mathbf{A})$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

《线性代数与空间解析几何》期末 2017. 填空.

1. $|A+B|=|\alpha_1+\alpha_1, \alpha_2+\alpha_2, \alpha_3+\beta_3| = |2\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_3+\beta_3|$

$= 4|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3+\beta_3|$

$= 4(|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| + |\alpha_1, \alpha_2, \beta_3|)$

$= 4(a+b) = 4a+4b$

2. $A^{-1} = (P_1P_2)^{-1} = P_2^{-1}P_1^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&x\\0&1&y\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$

$= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-x\\0&1&-y\\0&0&1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1&0&-x\\0&0&1\\0&1&-y\end{bmatrix}$

3. $[\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$ $P=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$

4. $R(A)=2=3-1$. $R(A^*)=1<3-1$. $R((A^*)^*)=0$

5. $\mathscr{A}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=\mathscr{A}(\varepsilon_1)-\mathscr{A}(\varepsilon_2)$, $\mathscr{A}(\varepsilon_2)=\mathscr{A}(\varepsilon_1)-\mathscr{A}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=\varepsilon_1-\varepsilon_2$

$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}$

2017. 选择

1. (C). A是方阵. 当 $R(A)=n$ 时. $R(A|\beta)=n$. 方程组 $AX=\beta$ 有解, 且解唯一.

2. (C) $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示

$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r] = [\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_s]C$.

令 $A=[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r]$, $B=[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s]$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关. $R(A)=r$ $s \geqslant R(B) \geqslant R(A)=r$. $r \leqslant s$

3. (D). $|\lambda E-A| = \left|\lambda E - \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}(b_1\ b_2\ b_3)\right| = \lambda^2\left|\lambda-(b_1\ b_2\ b_3)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\right|$

$= \lambda^2(\lambda-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3))=0$

0.至少是 $|\lambda E-A|$ 的二重根.

4. (A) $|E+B| = |E+P^{-1}AP| = |E+A|$. A正定. A的特征值大于零, 由 6.2. 例9. $|E+A|>1$.

5. (C), $tr(A_1) \neq tr(A_2)$, 则 A_1, A_2 不相似. A_1 是实对称阵, A_2 不是实对称阵, 则 A_1 与 A_2 不合同.
$R(A_1)=R(A_2)=1$. 且. A_1, A_2 都是 2×2 矩阵, 则 A_1 与 A_2 等价.

心得 体会 拓广 疑问

参考答案

一、 1. $4a+4b$ 2. $\begin{pmatrix}1 & 0 & -x\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & -y\end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 4. 0

5. $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$

二、1. C 2. C 3. D 4. A 5. C

三、解

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & a\\a & -1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1^2=\begin{pmatrix}1 & a\\a & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\a & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a^2 & 0\\0 & 1+a^2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1^{2m}=\begin{pmatrix}(1+a^2)^m & 0\\0 & (1+a^2)^m\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-b & a\\0 & b\end{pmatrix};\boldsymbol{A}_2^2=\begin{pmatrix}-b & a\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b & a\\0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b^2 & 0\\0 & b^2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2^{2m}=\begin{pmatrix}b^{2m} & 0\\0 & b^{2m}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{2m}=\begin{pmatrix}(1+a^2)^m & 0 & 0 & 0\\0 & (1+a^2)^m & 0 & 0\\0 & 0 & b^{2m} & 0\\0 & 0 & 0 & b^{2m}\end{pmatrix}$$

四、解

$$\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -\frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 可逆

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}-2&2&3\\0&-\frac{3}{2}&0\\0&0&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

五、解法 1 $\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&0\\0&a&1\end{vmatrix}=a(a+1)=0$,$a=0$ 或 $a=-1$.

$a=0$ 时,$\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,无穷多解. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,$k$ 为任意常数.

三平面交于一条直线,直线的参数方程为$\begin{cases}x=0\\y=t\\z=1\end{cases}$,$t$ 为任意常数. 当 $a=-1$ 时,增广阵为$\begin{pmatrix}-1&0&1&1\\1&-1&0&-1\\0&-1&1&1\end{pmatrix}$,可化为$\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&-1&1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$,方程组无解. 三平面没有交点.

$a\neq0$ 且 $a\neq-1$ 时,方程组有唯一解. 三平面交于一点.

解法 2 $\begin{pmatrix}a&0&1&1\\1&a&0&a\\0&a&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&a\\0&a&1&1\\0&0&1+a&1+a-a^2\end{pmatrix}$. 考虑 $a=0$,$a+1=0$, 即 $a=0$ 或 $a=-1$.

$a=0$ 时,增广阵可化为$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,无穷多解. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,$k$ 为任意常数.

三平面交于一条直线,直线的参数方程为$\begin{cases}x=0\\y=t\\z=1\end{cases}$,$t$ 为任意常数.

当 $a=-1$ 时,增广阵的行列阶梯为$\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&-1&1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$,方程组无解.

年 月 日

三平面没有交点.

$a\neq 0$ 且 $a\neq -1$ 时,方程组有唯一解.三平面交于一点.

六、解:(1) 由$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的基础解系有两个向量知,$\lambda=-1$是$\boldsymbol{A}$的二重特征值,对应的线性无关的特征向量为$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$.

$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$,所以$\lambda_3=0-\lambda_1-\lambda_2=2$.$\boldsymbol{A}$的三个特征值为$-1,-1,2$.

设$\boldsymbol{A}$的属于2的特征向量为$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,由$\boldsymbol{\xi}_1\perp\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_2\perp\boldsymbol{\xi}_3$得

$\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_1-x_3=0\end{cases}$,基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.规范化得$\boldsymbol{Q}_3=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_3}{|\boldsymbol{\xi}_3|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,规范正交化$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{Q}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

(2) 求二次型

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$f(x,y,z)=2xy+2xz+2yz$$

(3) 在 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 下,$f(x',y',z')=-x'^2-y'^2+2z'^2=1$,表示(旋转)双叶双曲面.

七、证:设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.由 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互不相同,知 A 可以相似对角化,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}^2$ 的秩等于 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$ 中非零元的个数,即 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中非零元的个数.而 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中非零元的个数,从而 $R(\boldsymbol{A}^2)=R(\boldsymbol{A})$.

哈尔滨工业大学 2016 级期末试题及答案

（此卷满分 60 分）

注：本试卷中，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$R(\boldsymbol{A})$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 依次表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩和 $\boldsymbol{A}$ 的迹，$\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵.

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和都等于 0，$R(\boldsymbol{A})=n-1$，则________是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

2. 若实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&t\\0&t&1\end{pmatrix}$ 正定，则 t 满足：________.

3. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的规范正交基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 的内积为________.

4. 圆 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25\\x+\sqrt{3}y-6=0\end{cases}$ 的半径 $r=$________.

5. 母线平行于 z 轴，且通过曲线 $\begin{cases}x^2+2y^2+z^2=25\\-x^2+y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程为________.

6. 已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0\\x&1\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}|=$________.

7. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是________.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶方阵，$\boldsymbol{X}$ 是 2 维列向量，$\boldsymbol{X},\boldsymbol{AX}$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{X}$，记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{AX})$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=$________.

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是三个 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=1$，$|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{BA}^{-1}\boldsymbol{B}|=2$，则 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\end{vmatrix}=$________.

10. 设 Ψ 是线性空间 $\mathbf{R}^2$ 的一个线性变换，Ψ 关于 $\mathbf{R}^2$ 的基底 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$，则 Ψ 关于 $\mathbf{R}^2$ 的基底 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 的矩阵为________.

年　月　日

二、(7 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求该向量组的秩;

(2) 求该向量组的一个极大无关组.

心得 体会 拓广 疑问

三、(7 分) 当 a 等于何值时,方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=1\\x_1+x_2+ax_3=1\end{cases}$$

无解? 有唯一解? 有无穷多解? 当有无穷多解时,求出所有解.

年 月 日

四、(7 分) 设 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, 求 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}$.

五、(7 分) 矩阵 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&3&0\\0&1&0\end{pmatrix}$中,哪两个相似? 哪两个合同? 为什么?

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

六、(7 分)　已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称阵，$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量，且二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 经正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 可以化为 $y_1^2-2y_2^2-2y_3^2$.

(1) 在空间直角坐标系中，方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种几何图形；

(2) 求出将 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 化为 $y_1^2-2y_2^2-2y_3^2$ 的一个正交变换矩阵 $\boldsymbol{P}$；

(3) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

七、(5 分)　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个可相似对角化的 n 阶方阵，$\mathbf{R}$ 表示实数域.

证明：存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{TB}$ 的充要条件是：$|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}|$，$\forall\lambda\in\mathbf{R}$.

年　　月　　日

2016 级 线性代数与空间解析几何

一、填空

1. 由题. $A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=0$. 由 $R(A)=n-1$ 知 $AX=0$ 解空间的维数为 $\dim N(A)=n-R(A)=1$

所以 $\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ 是 $AX=0$ 的基础解系。

2. 若实矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&t\\0&t&1\end{bmatrix}$ 正定,

A的各阶顺序主子式大于零.

$1>0$ $\quad \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1>0$ $\quad |A|=1(1-t^2)>0$ $\quad t^2<1.$ $\quad \underline{-1<t<1}$

3. (β_1,β_2)

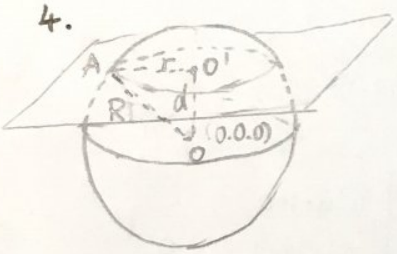
$=(2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3)^T(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)$

$=2\alpha_1^T\alpha_1-2\alpha_1^T(2\alpha_2)+2\alpha_1^T\alpha_3-\alpha_2^T\alpha_1+2\alpha_2^T\alpha_2-\alpha_2^T\alpha_3+3\alpha_3^T\alpha_1-6\alpha_3^T\alpha_2+3\alpha_3^T\alpha_3$

由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的规范正交基. $\alpha_i^T\alpha_j=0.$ $\alpha_i^T\alpha_i=1.$ $1\le i.j\le 3$

所以 $(\beta_1,\beta_2)=2+2+3=\underline{7}$

4.



$d=$ 平面 $x+\sqrt{3}y-6=0$ 与 $O(0.0.0)$ 点之间的距离

$d=\dfrac{|-6|}{\sqrt{1+3+0}}=\dfrac{6}{2}=3.$

$R=5.$ $\quad r=AO'=\sqrt{5^2-3^2}=\underline{4}.$

5. 母线平行于z轴, 柱面的方程中不含z.

由 $-x^2+y^2+z^2=0$ 得: $z^2=x^2-y^2$. 代入 $x^2+2y^2+z^2=25$.

$x^2+2y^2+x^2-y^2=25$ $\quad \underline{2x^2+y^2=25}$ 柱面方程.

6. 由A与B相似, A的特征值与B的特征值相同为 -1.1. A为2阶矩阵.有两个不同的特征值,所以可以相似对角化。存在可逆阵P. $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}=D$

$A=PDP^{-1}$ $\quad |A^2-A|=|(PDP^{-1})^2-(PDP^{-1})|=|PD^2P^{-1}-PDP^{-1}|=|P||D^2-D||P^{-1}|=\left|\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\right|$

$=\begin{vmatrix}2&0\\0&0\end{vmatrix}=\underline{0}$

7. 若矩阵A满足 $A^2+E=2A$ 则A的特征值只能是 $\underline{\quad 1 \quad}$.

$A^2-2A+E=0$, 设 λ 是 A的特征值,则 $\lambda^2-2\lambda+1=0$ $\quad (\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda=1$

2016. 级线性代数与空间解析几何期末填空

9. $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+(-B)A^{-1}r_1} \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & -BA^{-1}B+C \end{vmatrix} = |A||C-BA^{-1}B| = 1(2) = \underline{2}$

8. 解

$AP = A(X, AX) = (AX, A^2X) = (AX, 2AX-X) = (X, AX)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

X. AX 线性无关，所以 P 可逆。$P^{-1}AP = \underline{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}$。

10. 由 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ 到 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 的过渡矩阵为 P

$[\alpha_1, \alpha_2] = [\varepsilon_1, \varepsilon_2]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

φ 关于 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 的矩阵为 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}$

参考答案

一、1. $\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$或与之平行的任一非零向量　2. $-1<t<1$

3. 7　4. $r=4$　5. $2x^2+y^2=25$　6. 0　7. 1　8. $\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}$　9. 2

10. $\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$

二、解：$\begin{bmatrix}1&1&3\\2&1&4\\1&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&3\\0&-1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$，所以，向量组的秩为 2. $\{\alpha_1,\alpha_2\}$为极大无关组(实际上，任意两个向量都对).

三、解法 1

$$\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$$

$$=0\Rightarrow a=-2\text{ 或 }a=1$$

$a=-2$ 时，$\begin{bmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1&-2\\0&-3&3&3\\0&0&0&3\end{bmatrix}$，无解.

$a=1$ 时，$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，有无穷多解$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$k_2,k_3$为任意常数.

$a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时，有唯一解.

解法 2

$$\begin{bmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&1&1\\0&1-a&a-1&0\\0&0&-(a+2)(a-1)&(1-a)\end{bmatrix}$$

$a=-2$,无解;$a=1$,有无穷多解$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$,$k_2,k_3$为任意常数;$a\neq-2$且$a\neq1$时,有唯一解.

四、解:$\left[\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}&\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{E}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{array}\right]$

所以

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&-1\\1&0&-1&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

五、解:$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1|=(\lambda-3)\lambda^2$,$\lambda_1=3$,$\lambda_2=\lambda_3=0$,$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_2|=\lambda^2(\lambda-2)$,$\lambda_1=2$,$\lambda_2=\lambda_3=0$,$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_3|=(\lambda-3)\lambda^2$,$\lambda_1=3$,$\lambda_2=\lambda_3=0$. 当$\lambda=0$时,$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&3&0\\0&1&0\end{bmatrix}$,$R(\boldsymbol{A}_3)=1$,$\dim N(\boldsymbol{A}_3)=2$,$\boldsymbol{A}_3$可相似对角化. 故$\boldsymbol{A}_1$,$\boldsymbol{A}_3$相似,因为它们都可以相似对角化且特征值相同. $\boldsymbol{A}_1$,$\boldsymbol{A}_2$合同,因为它们都是实对称阵,且$\boldsymbol{A}_1$,$\boldsymbol{A}_2$正特征值个数都为1,负特征值个数都为0.

六、解:(1)$y_1^2-2y_2^2-2y_3^2=1$,表示(旋转)双叶双曲面.

(2) 设$\boldsymbol{X}$为$\boldsymbol{A}$的属于2的特征向量,$\boldsymbol{A}$是实对称阵,所以$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\xi}_1)=0$,即

$$x_1+x_2+x_3=0$$

基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

规范正交化$\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_3-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

(3)
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&&\\&-2&\\&&-2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&&\\&-2&\\&&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

七、解:“$\Rightarrow$”

若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$,使得 $\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{TB}$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{TBT}^{-1}$,$\forall\lambda\in\mathbf{R}$

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|&=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{TBT}^{-1}|=|\boldsymbol{T}(\lambda\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{T}^{-1}-\boldsymbol{TBT}^{-1}|\\&=|\boldsymbol{T}||\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}||\boldsymbol{T}^{-1}|=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}|\end{aligned}$$

“$\Leftarrow$”

对 $\forall\lambda\in\mathbf{R}$,$|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}|$,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值,设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可相似对角化,存在可逆阵 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2$

$$\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{AC}_1=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{BC}_2=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{AC}_1=\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{BC}_2$$
$$\boldsymbol{AC}_1\boldsymbol{C}_2^{-1}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{B}$$

取 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1}$ 即可.

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2015 级期末试题及答案

（此卷满分 60 分）

注：本试卷中，$\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$R(\boldsymbol{A})$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩和 $\boldsymbol{A}$ 的迹.

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 1 & 2 & b & 3 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} =$ ________.

2. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,1,1,\cdots,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1,\cdots,1)$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n=(1,1,\cdots,1,a)$，其中 $n>1$，$a>0$，若存在向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，则 $a=$ ________.

3. 已知空间直角坐标系中三点 $A(1,0,-1)$，$B(1,-2,0)$，$C(1,1,1)$，则以 A,B,C 及坐标原点为顶点的四面体的体积等于 ________.

4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & t & -1 \end{pmatrix}$，若存在非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 $t=$ ________.

5. 已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在直线 $l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 上，且 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\pi:2x-y+2z-1=0$ 的距离为 1，则 $y_0=$ ________或________.

6. 在空间直角坐标系中，方程 $z=xy$ 表示的几何图形是 ________________.

7. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，则 $\boldsymbol{C}^{10}=$ ________.

8. 已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $-1,1,2$，则 $|\boldsymbol{A}+\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^*|=$ ________.

9. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量，如果 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，则 $\boldsymbol{X}=$ ________是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

10. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零实列向量，则秩$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}=$ ________.

二、(7 分) 已知 k 是一个数，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m>1)$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$. 讨论向量组 $\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性相关性.

三、(7 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{E}$.

年 月 日

四、(7 分) k 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (1-k)x_1 + (k-1)x_2 = 0 \\ (2k+1)x_1 + 3x_2 + (k+2)x_3 = 3 \end{cases}$$

无解?有唯一解?有无穷多解?当有无穷多解时,求出全部解.

五、(7 分) 已知 k 是实数,向量 $\boldsymbol{\alpha} = (1,1,1,1)$,矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 的特征值,特征向量;

(2) k 满足什么条件时 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 正定.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

六、(7 分) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称阵，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 下化为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}$ 的第三列为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求出将 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 化为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ 的一个正交变换矩阵 $\boldsymbol{P}$；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^n$；

(3) 在空间直角坐标系中，方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种几何图形.

七、(5 分) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，证明：

(1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 同解；

(2) 对任意正整数 k，都有 $R((\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^k)=R(\boldsymbol{A})$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

参考答案

一、 1. abc 2. 1 3. $\frac{5}{6}$ 4. -1 5. 0, -6 6. 双曲抛物面

7. $\begin{pmatrix}1 & 10\\0 & 1\end{pmatrix}$ 8. -2 9. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$, k 为任意常数 10. $n+1$

二、解法 1:记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_m)$, $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$. 由已知关系 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$, 得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}$, 其中

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1+k & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+k & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+k\end{pmatrix}$$

利用矩阵秩的关系,有 $R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{K})$. 另由 $R(\boldsymbol{A})=m$, 得到 $R(\boldsymbol{B})\geqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{K})-m=R(\boldsymbol{K})$. 所以, $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{K})$.

由于 $|\boldsymbol{K}|=(k+m)k^{m-1}$, 因此,当 $k=-m$ 或 $k=0$ 时, $\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,反之,线性无关.

解法 2:设有数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得

$$k_1(\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_m)=\boldsymbol{0}$$

由 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$, 上式整理得

$$\begin{aligned}&((1+k)k_1+k_2+\cdots+k_m)\boldsymbol{\alpha}_1+\\&(k_1+(1+k)k_2+\cdots+k_m)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\\&(k_1+k_2+\cdots+(1+k)k_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

根据 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,知

$$\begin{cases}(1+k)k_1+k_2+\cdots+k_m=0\\ k_1+(1+k)k_2+\cdots+k_m=0\\ \quad\vdots\\ k_1+k_2+\cdots+(1+k)k_m=0\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}1+k & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+k & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\ \vdots\\k_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

方程组系数矩阵的行列式等于 $(k+m)k^{m-1}$, 因此,当 $k=-m$ 或 $k=0$ 时, $\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,反之,线性无关.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

三、解：由 $|\boldsymbol{A}|=1$，知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 在 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{E}$ 两边左侧同时乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$，右边同时乘以矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{X}=4\boldsymbol{E}$$

即

$$\boldsymbol{X}=4(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})^{-1},\ |\boldsymbol{A}|=1,\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

得

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

四、解 $$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}k&1&1&1\\1-k&k-1&0&0\\2k+1&3&k+2&3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&k&1\\0&k-1&1-k&0\\0&0&2-k-k^2&1-k\end{array}\right)$$

当 $k=-2$ 时，无解；

当 $k\neq-2$ 且 $k\neq1$ 时，有唯一解；

当 $k=1$ 时有无穷多解. 此时

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

故通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}^{*}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

五、解：(1) $$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}|&=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-k\boldsymbol{E}|\\&=(\lambda-k)^3(\lambda-k-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\\&=(\lambda-k)^3(\lambda-k-4)\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 k(3 重根)，$k+4$.

当 $\lambda=k$ 时

$$k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=-\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

年 月 日

对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

因此,属于 k 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$,$k_1,k_2,k_3$ 是不全为 0 的任意常数;

当 $\lambda=k+4$ 时

$$(k+4)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}=4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

属于 $k+4$ 的全部特征向量为 $k_4\boldsymbol{\xi}_4$,$k_4\neq0$.

(2)$k>0$.

六、解:(1) 得知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,-1$. 由 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵,解

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{\sqrt{3}}{3}z=0$$

得基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

对 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 作正交化得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1)}{(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1)}\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$$

年 月 日

对 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 作单位化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{|\boldsymbol{\varepsilon}_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_2}{|\boldsymbol{\varepsilon}_2|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

记 $\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1\quad\boldsymbol{\gamma}_2\quad\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

为所求正交矩阵.

(2)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$.

当 n 为奇数时

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}^n\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$$

当 n 为偶数时

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}^n\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) 单叶双曲面.

七、证:(1) 若 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$.

若 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=0$,进而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$.

所以,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 同解.

(2) 因 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是实对称阵,若 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r$,则存在可逆阵 $\boldsymbol{T}$,使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda_1&&&\\&\ddots&&0\\&&\lambda_r&\\\hdashline&0&&0\end{array}\right)$$

年 月 日

其中 $\lambda_i \neq 0(i=1,2,\cdots,r)$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的非零特征值，于是

$$\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^k\boldsymbol{T}=\left(\begin{array}{ccc:c} \lambda_1^k & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda_1^k & \\ \hdashline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

$$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^k=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$$

得证.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

2015. 填空详解

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 1 & 2 & b & 3 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a\,b\,c\,(-1)^{\tau(1234)} = abc$

2. β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关。

则 $\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a\cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a\cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a\cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$

$= (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a-1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a-1 \end{vmatrix}$

$= (a+n-1)(a-1)^{n-1} = 0$

由$a>0$，$a=1$.

3. $V = \left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & +2 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{6}(-5)\right| = \frac{5}{6}$

4. $B\neq 0$，但是$AB=0$，所A不可逆，所以$|A|=0$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & t & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & t+1 & 0 \end{vmatrix} = (t+1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = (-6)(t+1) = 0$

$t=-1$.

5. l的参数方程 $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$ 设M_0坐标$(t+1,t,1)$ M_0到平面的距离为

$$d = \frac{|2(t+1)-t+2(1)-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{|t-3|}{3} = 1.$$

$t-3=3$ 或 $t-3=-3$

$\Rightarrow t=6$ 或 $t=0$.

2015，填空详解

6. $z=xy$ 设 $x=s+t$，$y=s-t$，则 $z=s^2-t^2$ 双曲抛物面.

7. $A=BC$，C 在右乘 B.

$$\underset{B}{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&2\end{bmatrix}}\xrightarrow{C_2+C_1}\underset{A}{\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\2&4\end{bmatrix}}\qquad 所以\ \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{C_2+C_1}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=C$$

$$C^{10}=\begin{bmatrix}1&10\\0&1\end{bmatrix}$$

8. A 的特征是 $-1,1,2$。A 有三个不同的特征值，则 A 可相似对角化，存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}=D$；$tr(A)=-1+1+2=2$. $P^{-1}AP=D$

$A=PDP^{-1}$

$$tr(A)A^{-1}=2A^{-1}=2(PDP^{-1})^{-1}=2(PD^{-1}P^{-1})=P2D^{-1}P^{-1}=P\begin{bmatrix}-2&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$A^*=|A|A^{-1}=(-1)(1)(2)A^{-1}=-2A^{-1}=-2(PDP^{-1})^{-1}=-2PD^{-1}P^{-1}=P(-2D^{-1})P^{-1}$$

$$=P^{-1}\begin{bmatrix}2&&\\&-2&\\&&-1\end{bmatrix}P$$

$$P^{-1}(A+tr(A)A^{-1}+A^*)P=P^{-1}AP+P^{-1}(tr(A)A^{-1})P+P^{-1}A^*P$$

$$=\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&&\\&-2&\\&&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$$

$$|A+tr(A)A^{-1}+A^*|=\left|P\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}P^{-1}\right|=|P|\begin{vmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{vmatrix}|P^{-1}|=-2.$$

9. $\alpha_2、\alpha_3、\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=\alpha_2-\alpha_3$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，

所以 $R(A)=R(\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\})=3$. $\dim N(A)=1$. $\alpha_1=\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0$

$$A\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0.\quad \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}是\ AX=0$$

的基础解系。 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ $\quad A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\beta.$

$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ 是 $AX=\beta$ 的特解。所以 $AX=\beta$ 的通解为 $k\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ k 为任意常数，

2015 填空详解.

10. A正定, 则 $|A|>0$, A可逆

$$\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+(-\alpha^T)A^{-1}r_1} \begin{bmatrix} A & \alpha \\ 0 & -\alpha^T A^{-1}\alpha \end{bmatrix}$$

A正定, 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是A的特征值, 存在可逆阵P使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$[P^{-1}AP]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & & & \\ & 1/\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\lambda_n \end{bmatrix} \quad P^{-1}A^{-1}P = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & & & \\ & 1/\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\lambda_n \end{bmatrix}$$

由 $\lambda_i>0 \Rightarrow 1/\lambda_i>0$. $1\le i\le n$. $\Rightarrow A^{-1}$ 正定 由 $\alpha\ne0$. $\alpha^TA^{-1}\alpha\ne0$.

所以 $R\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}=n+1$.

哈尔滨工业大学（威海）2014/2015学年秋季学期

代数与几何 试题卷（A）

考试形式：闭卷 答题时间：120（分钟） 本卷面成绩占课程成绩60%

一、填空题（每题4分，共24分）得分

1．点（1，2，3）在直线x=y=z上的投影的坐标是（ ）

2．直线x=y=z和直线$\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$的距离是（ ）

3．设向量α=（1，2，3，4，5）^{T}，则$|\alpha\alpha^T-E_5|=$（ ）

4．设n阶正交矩阵A是正定矩阵，则A=（ ）

5． 向量α=（2，3，4）关于基$\alpha_1=$（1，2，3），$\alpha_2=$（2，3，1），$\alpha_3=$（3，1，2）的坐标是（ ）

6，直线x−1=y=z绕z轴旋转一周所成的曲面的方程是（ ）

二、选择题（每题3分，共18分，答案须填到下面表格内，否则无效）

1．将3阶方阵A的第2行加到第1行得矩阵B，再将矩阵B的第1列的−1倍加到第2列得矩阵C，记P=E（1，2（1）），则（ ）

(A)$C=P^{-1}AP$ (B)$C=PAP^{-1}$(C)$C=P^TAP$(D) $C=PAP^T$

2．设A是n阶方阵，则A可逆的充要条件是（ ）

1）存在n阶方阵C，使CA=E。2）A的行向量组线性无关

3）线性方程组AX=B有唯一解、4）0不是A的一个特征值

正确的有（　）

（A）4个．（B）3个（C）2个（D）1个

3．设A是m*n矩阵，B是n*m矩阵，则线性方程组ABX＝0（　）

（A）当n＞m时只有零解．（B）当n＞m时有非零解

（）当m＞n时只有零解．（D）当m＞n时有非零解

4．设实向量$\alpha=(a,a_2,a_3)^T$，$\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$，$\gamma=(C_1,C_2,C_3)^T$，则xoy面上3条直线$a_ix+b_iy+c_i=0$，（其中$a_i^2+b_i^2\neq 0$，i≠1，2，3）交于一点的充要条件是（　）

（A）α，β，γ线性相关

（B）α，β，γ线性无关

（C）α，β，γ线性相关，且α，β线性无关

（D）向量组α，β与向量组α，β，γ的秩相等

5．矩阵$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$的关系是（　）

（A）等价而不合同，（B）合同而不相似

（C）相似而不合同．（D）合同且相似

6．二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$的标准形是（　）

(A)$2y_1^2+y_2^2+3y_3^2$（B）$-2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$（C）$2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$ (D)$2y_1^2-y_2^2$

三、设 n 阶方阵 A 的秩 R（A）$=r$

证明：存在 m 阶方阵 B，使 R（B）$=n-r$ 且 $AB=BA=0$

四、设 3 阶实对称矩阵 A 的每一列元素之和都是 3，秩 R（A）$=1$

求一个正交矩阵 P，使$P^{-1}AP$为对角矩阵

五、向量组$\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_3=(1,4,9,16)^T$，

$\alpha_4=(1,3,7,13)^T$求向量组的及一个极大无关组，并用极大无关组表示该组中其余向量

六、设 3 阶实方阵 $A=(a_{ij})_{3*3}$，$a_{11}=-1$，$A^T=A^*$，$\beta=(1,0,0)^T$，求线性方程组 $AX=\beta$的解

2014/2015 秋答案

一、

1. （2，2，2）
2. $\frac{1}{\sqrt{6}}$
3. 54
4. E_n
5. $\left(\frac{7}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$
6. $X^2+y^2-2z^2-2z-1=0$

二、BADCDC

三、$R(A)=r$，则存在 n 阶可逆矩阵 P, Q, 使 $PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，于是$A=p^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$，可取$B=Q\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}p$，满足要求

四 、由题意 $A(1,1,1)^T=3(1,1,1)^T$,

于是$\lambda_1=3$，$T_1(1,1,1)^T$，为A的特征值和特征向量，单位化得$P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$，由$R(A)=1$，知$\lambda_2=\lambda_3=0$，设$x=(x_1,x_2,x_3)^T$为对应的特征向量，因$T_1\perp x$，故$\chi_1+x_2+x_3=0$，得$T_2=(-1,1,0)^T$，$T_3=(-1,0,1)^T$，规范正交化得$P_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T$，$P_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$

令$p=(P_1,P_2,P_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，则 P 是正交矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

五 、$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，该向量组秩为 3，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是向量组的一个极大无关组，$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

六、 由$A^T=A^*$，知$A_{ij}=a_{ij}$，i，j=1,2,3

则$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=1+a_{12}^2+a_{13}^2>0$，故 AX=β有唯一解，$x=A^{-1}\beta$，又$A'A=A^*A=|A|E$，取$|A|=1$，故$A^{-1}=A'$，$a_{12}=a_{13}=0$，因此$x=A'\beta=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2014 级期末试题及答案

（此卷满分 50 分）

注：本试卷中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$R(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}^*$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}_n$ 表示 n 阶单位矩阵.

一、填空题(每小题 2 分，共 10 分)

1. 行列式 $D_4=\begin{vmatrix}-1&-1&-1&1\\0&0&1&a\\0&1&0&b\\1&0&0&c\end{vmatrix}=$________.

2. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}^5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}=$________.

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的所有特征向量为________.

4. 空间直角坐标系中曲线 $\begin{cases}y=z^2\\x=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周，所得曲面的方程为________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实方阵，$|\boldsymbol{A}|=1$，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零实列向量，则 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}=$________.

二、选择题(每小题 2 分，共 10 分)

1. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2kx_2x_3$ 正定，则 k 的取值范围为(　　).

(A) $k>1$

(B) $k<-1$

(C) $-1<k<1$

(D) $-1\leqslant k\leqslant 1$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，则必有(　　).

(A) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解

(B) 若 $R(\boldsymbol{A})=m$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解

(C) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

年　月　日

(D) 若 $R(\boldsymbol{A})=n$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解

3. 已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似,则 $|2\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{E}_3|$ 等于(　　).

(A)2　　(B)-2　　(C)6　　(D)-6

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个属于不同特征值的实特征向量,则(　　).

(A)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$,则(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价且合同

(B)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价但不相似

(C)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似且合同

(D)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似但不合同

三、(5 分) 设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&4\\2&x&2\\4&2&-1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&y&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$ 相似,求 x,y.

四、(5 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足:$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

五、(5 分) 已知方程组(I)$\begin{cases}x_1+x_2+bx_3=0\\x_1+(b-2)x_2+x_3=0\end{cases}$ 与(II)$\begin{cases}x_2+x_3=0\\x_1+x_2+2x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$ 同解,求参数 a,b 及方程组(I)的全部解.

六、(5 分) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$,$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$,$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

(1) 用正交变换将 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 化为标准形,并求所用的正交变换矩阵 $\boldsymbol{P}$;

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{101}$；

(3) 方程 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{X}=1$ 表示空间中何种二次曲面.

七、(5分) 求点 $A(2,4,3)$ 在直线 $x=y=z$ 上投影点 $B(x_0,y_0,z_0)$ 的坐标及点 A 到该直线的距离.

八、(5分) (1) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $R(\boldsymbol{A})=1$. 证明：存在列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和列向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}$；

(2) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}$，其中列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 也线性无关，证明：$R(\boldsymbol{A})=2$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

参考答案

一、1. $a+b+c+1$　2. $\boldsymbol{E}_3$　3. $k(1,-1)^{\mathrm{T}},k\neq 0$　4. $y=x^2+z^2$　5. $n+1$

二、1. C　2. B　3. D　4. C　5. D

三、解：因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似，有 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{D})$，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{D}|$，于是

$$y=x-2$$
$$-25y=-15x+40$$

求得 $x=1,y=-1$.

此时，对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,-5,5$，与对角阵 $\boldsymbol{D}$ 相似，符合题意.

四、解：$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-1&1&-1\\-1&-1&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=-4\neq 0$，因此 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆.

于是，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$ 得

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

五、解：记方程组(I)，(II) 的系数矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，由题意知 $R(\boldsymbol{A})=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$. 利用行初等变换，有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&b\\1&b-2&1\\0&1&1\\1&1&2\\1&1&a\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&b-1\\0&0&2-b\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&a-b\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&b\\1&b-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&b\\0&b-3&1-b\end{pmatrix}$$

注意到 $R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 至少为 2，$R(\boldsymbol{A})$ 至多为 2，所以，$R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})=2$. 因此，$a=b=2$. 此时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$. 故方程组(I) 的全部解是 $\boldsymbol{X}=k(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数.

六、解：(1) 由 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$ 知，即 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 再由 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系知，0 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值且属于 0 的线性无关的特征向量正是 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$.

年　月　日

设 $\boldsymbol{\xi}_3=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ 是属于 -1 的特征向量,由 $\boldsymbol{A}$ 实对称,知 $\boldsymbol{\xi}_3$ 与 $\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{\xi}_2$ 都正交,即

$$\begin{aligned}x-y&=0\\x-z&=0\end{aligned}$$

解得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

对 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 作正交化得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1)}{(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1)}\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$$

对 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 作单位化

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{|\boldsymbol{\varepsilon}_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_2}{|\boldsymbol{\varepsilon}_2|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{|\boldsymbol{\xi}_3|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1\quad\boldsymbol{\gamma}_2\quad\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$$

在正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 下,原二次型化为 $f=-y_3{}^2$.

(2) $$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{101}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}^{101}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

(3)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3$ 的特征值为 1,1,0,故二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{X}$ 的标准型为

$$z_1{}^2+z_2{}^2$$

所以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{X}=1$ 表示空间中的圆柱面.

七、解:由题意知,$\overrightarrow{AB}$ 与直线的方向向量垂直,并且点 B 在直线上,因此

年 月 日

$$x_0=y_0=z_0$$

$$(x_0-2)+(y_0-4)+(z_0-3)=0$$

解得点 B 的坐标为 $B(3,3,3)$. 点 B 到该直线的距离为 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$.

八、证:(1) 因为 $R(\boldsymbol{A})=1$,所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{Q}_1$,使

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}(1\quad 0\quad \cdots\quad 0)$$

即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}(1\quad 0\quad \cdots\quad 0)\boldsymbol{Q}_1^{-1}$$

令

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{P}_1^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=(\boldsymbol{Q}_1^{-1})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}$$

(2) 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 及线性无关性知

$$2=R(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2)+R(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2)-2\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}})+R(\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}})=2$$

故 $R(\boldsymbol{A})=2$.

2014年填空详解

1. $D_4=\begin{vmatrix}-1&-1&-1&1\\0&0&1&a\\0&1&0&b\\1&0&0&c\end{vmatrix}\xlongequal[C_4+(-c)C_1]{C_4+(-a)C_3,\ C_4+(-b)C_2}\begin{vmatrix}-1&-1&-1&1+a+b+c\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=(1+a+b+c)(-1)^{\tau(4321)}$

$=\underline{1+a+b+c}$

2. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{C_2\leftrightarrow C_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=E(2,3)$, $E(2,3)^{-1}=E(2,3)$

$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&5\end{bmatrix}\xrightarrow[5次]{r_3+(-1)r_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{C_2\leftrightarrow C_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}=\underline{E}$

3. $|\lambda E-A|=|\lambda E-\alpha\beta^T|\xlongequal{由降阶公式}\lambda^{2-1}|\lambda-\beta^T\alpha|=\lambda(\lambda-0)=\lambda^2=0$

$\lambda_1=\lambda_2=0$ $\quad 0E-A=-\alpha\beta^T=-\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}(1,1)=-\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$，特征向量，$\underline{k\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\ \ k\neq0}$

4. 绕 y 轴，y 不变，z 换成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$，$\quad\underline{y=x^2+z^2}$

5. $\begin{bmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&\alpha^T(A^*+E)\alpha\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+(-\alpha^TA^{-1})r_1}\begin{bmatrix}A&\alpha\\0&-\alpha^TA^{-1}\alpha+\alpha^TA^*\alpha+\alpha^T\alpha\end{bmatrix}$

$(A^*=|A|A^{-1}=A^{-1})$

$=\begin{bmatrix}A&\alpha\\0&-\alpha^TA^{-1}\alpha+\alpha^TA^{-1}\alpha+\alpha^T\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&\alpha\\0&\alpha^T\alpha\end{bmatrix}$ $\quad\alpha^T\alpha=\|\alpha\|^2>0$，因为 $\alpha\neq0$

所以 秩 $=R(A)+1=n+1$

2014 年选择详解.

1. 实二次型

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & k\\ 0 & k & 1\end{bmatrix}$$ $f=X^TAX$. 正定 $\Rightarrow$ 各阶顺序主子式大于零

$|1|>0$ $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}>0$ $|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & k\\ 0 & k & 1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2 & k\\ k & 1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{vmatrix}$

$=2-k^2-1=1-k^2>0$

$-1<k<1$. (C)

2. $AX=0$ 总有解——"D", 但 $R(A)\neq R(A\vdots\beta)$ 时. $AX=\beta$ 无解. "A"错误

若 $R(A)=m$, $R(A\vdots\beta)\geq R(A)\geq m$. 又 $(A\vdots\beta)$ 有 m 行. $R(A\vdots\beta)\leq m$,

所以 $R(A\vdots\beta)=m=R(A)$. $\Rightarrow AX=\beta$ 有解. "B" 正确.

若 $AX=\beta$ 有唯一解, 则 $AX=0$ 没有非零解.

若 $R(A)=n$, 但 $R(A)\neq R(A\vdots\beta)$, $AX=\beta$ 无解.

3. A与 $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=D$ 相似, 则存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=D\Rightarrow(P^{-1}AP)^{-1}=D^{-1}$

$\Rightarrow P^{-1}A^{-1}P=D^{-1}$

$|2A^{-1}+E_3|=|P^{-1}||2A^{-1}+E_3||P|=|P^{-1}(2A^{-1}+E_3)P|=|2(P^{-1}A^{-1}P)+P^{-1}E_3P|$

$=\left|2\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=-6$ (D)

4. 设 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$, $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$, $A\alpha_3=\lambda_3\alpha_3$

若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 也是 A 的特征向量, $\exists\ 1\leq i\leq 3$, 使得.

$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3)=\lambda_i(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3)$

$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=k_1\lambda_i\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2+k_3\lambda_3\alpha_3$

$k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2+k_3\lambda_3\alpha_3=k_1\lambda_i\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2+k_3\lambda_3\alpha_3$

$k_1(\lambda_1-\lambda_i)\alpha_1+k_2(\lambda_2-\lambda_i)\alpha_2+k_3(\lambda_3-\lambda_i)\alpha_3=0$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是属于不同特征值的特征向量, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,

则 $\lambda_1=\lambda_i=\lambda_2=\lambda_3$ 与 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互不相同矛盾。 A 错误

2014年选择

4, 继续.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 属于不同的特征值, 所以线性无关。B错误

若 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$

$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $k_1+k_3=0$. $k_1+k_2=0$, $k_2+k_3=0 \Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$.

(C) 正确.

若A是实对称阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交.

5. $R(A)=1$. $R(B)=1$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)\lambda^2=0.$$

$\lambda_1=3$, $\lambda_2=\lambda_3=0$.

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -2\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-3\lambda+2-2)=\lambda^2(\lambda-3)=0$$

$\lambda_1=3$, $\lambda_2=\lambda_3=0$

$R(A)=R(B)$, 且 A, B同为3×3矩阵, 则A与B等价.

A是对称阵, 但B不是对称阵, 所以A与B不合同。

当A与B同为实对称时, A与B合同 $\Leftrightarrow$ A与B正特征值个数相同且 A与B负特征值个数相同.

A与B的特征值相同。A是实对称阵, 所以A可相似对角化, 若B也可相似对角化, 则A与B相似.

对B, 当 $\lambda_1=3$. $\dim N(3E-B)=1$

当 $\lambda_2=\lambda_3=0$. $0E-B=-B$ $R(B)=1$. $\dim N(-B)=3-R(-B)=3-R(B)=2$.

矩阵B的特征值的几何重数与代数重数相同, 所以B可以相似对角化。

所以A与B相似. (D) 正确

哈尔滨工业大学（威海）2013/2014 学年秋季学期

代数与几何 试题卷（A）

考试形式：闭卷 答题时间：120（分钟） 本卷面成绩占课程成绩 60%

一．填空题（每题 3 分，共 18 分）

1.直线$\begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}$绕 y 轴旋转一周所形成的旋转曲面方程为（　　　　　　）

2.从R^2的基$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$到基$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$的过渡矩阵为（　　　　　　　　　　）

3．设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$分别是矩阵 A 的 3 个互不相等的非特征值对应的特征向量，则向量组 $A\alpha_1$，A（$\alpha_1 + \alpha_2$），A（$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$）的秩为（　　　　　　）

4．设 A 是 n 阶矩阵，ξ是 n 维非零列向量满足$A^2\xi = 2\xi, A^3\xi = 6\xi$，则 A 必有特征值（　　　　）

5．已知实二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + a(x_2 + \chi_3)^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$，经正交变换 X =PY 可化为标准型$2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2$，则 a=（　　　　　　）

6．设二次型$f(x_1, x_2) = (x, +2x_2)^2 + [-x_1 + ax_2]^2$正定，则 a 的取值范围是（　　　　　　　　）

二、选择题（每题 2 分，共 16 分）

1．下列 4 个命题：（1）x+y+z 是柱面；（2）$x^2 - y^2 - z^2 = 0$是双叶双曲面；

（）$\chi^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$是椭球面；（4）$x^2 - y^2 = z$是双曲抛物面

正确命题的个数为（　　　　　　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　(D)4

2.设$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$有基础解系$(1,0,2,-1)^T$，A 中去掉第 i 列（i=1，2，3，4）的矩阵记为A_i，则下列方程组有非零解的是（　　　　　　　）

(A)$A_1Y = 0$　(B)$A_2Y = 0$　(C)$A_3Y = 0$　(D)$A_4Y = 0$

3.设ξ_1,ξ_2,ξ_3是 AX=0 的基础解系，则下列向量组也是 AX=0 的基础解系的是（　　）

(A)$\alpha_1=-\xi_2-\xi_3,\alpha_2=\xi_1-\xi_3,\alpha_3=\xi_1+\xi_2$

(B)$\alpha_1=\xi_2+\xi_3,\alpha_2=\xi_1+\xi_3,\alpha_3=\xi_1+\xi_2$

(C)ξ_1,ξ_2,ξ_3的一个等价向量组

(C)ξ_1,ξ_2,ξ_3的一个等秩向量组

4. 设 A 是三阶非零矩阵，满足$A^2=0$，若线性非齐次方程组 AX=b 有解，则其线性无关解向量个数为（　　）

（A）1（B）2　(C) 3 (D) 4

5.设非齐次线性方程 Ax=b 的通解为$k_1(1,2,0,-2)^T+k_2(4,-1,-1,-1)^T+(1,0,-1,1)^T$，则满足$x_1=x_2,x_3=x_4$的解是（　　）

A)$(2,2,-1,-1)^T$　(B) $(2,2,1,1)^T$　(C) $(1,1,2,2)^T$　(D) $(-2,-2,-1,-1)^T$

6 设 A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$是实矩阵，则下列条件不是 A 相似于对角阵的充分条件的是（　　）

（A） $ad-bc<0$（B）b，c 同号（C）b=c（D）b,c 异号

7. 设 A，B 都是 n 阶实对称可逆矩阵，则（　　）

（A）A 与 B 相似（B）A 与 B 合同（C）A^2与B^2相似（のA^2与B^2合同

8. 设 A 是 3 阶实对称知，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是 A 的三个特征值，且满足$a\geq\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3\geq b$，则当$\mu$取何值时，$A-\mu E$一定是正定矩阵（　　）

（A）$\mu<b$　(B) $\mu>b$　(C) $\mu<a$　(D)$\mu>a$

三（7分）求下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ (2+a)x_1 + 2x_z + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + (3+a)x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + (4-a)x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

四、（6分）设$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 14 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$问是否存在 X 使得 AX=B,若存在，求所有的 X，若不存在，说明理由

五、（6分）设 X=(1,2, ... n)，$A = x^T x$，求 A 的所有特征值

六、（7分）设 A 是 3 阶实对称矩 r（A）=2，且满足 AB＝2B，其中$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$，求正交矩 Q 和对角矩阵 A，使得$Q^T AQ = \Lambda$

2013/2014 学年秋答案

一、

1. $x^2+z^2=y^2$
2. $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
3. 3
4. 3
5. -2
6. $a\neq -2$

二、C B B B A D D A

三、 $a\neq 0$，$(0,0,0,1)^T$；$a=0$，$x=k_1(-1,1,0,0)^T+k_2(-1,0,1,0)^T+k_3(-1,0,0,1)^T+(1,0,0,0)^T$

四、$(A,B)\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}0 & 6 & 1 & -1 & 1 & -6\\ 1 & -11 & 0 & 2 & -2 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$，所以$A\begin{pmatrix}7\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ $(Ab_3=X_3)$无解

故方程无解，X不存在

五、 $r(A)=1\Rightarrow AY=0$的解空间维数为n-1，又$A^T=A$，故 0 是 $n-1$ 重特征根，$tr(A)=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，得$\lambda=\sum_{i=1}^{n} i^2$是单根

六、$\lambda=2$: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\to$（正交化）$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\lambda=0$: $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta_3$，单位化得$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2013 级期末试题及答案

（此卷满分 50 分）

注：本试卷中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$R(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}^*$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}_n$ 表示 n 阶单位矩阵.

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素都是 1，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为________.

2. 在空间直角坐标系中，方程 $2x^2-y^2-3z^2+9=0$ 表示的几何图形是________.

3. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$，则 $|\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{A}^{-1}|=$________.

4. 已知 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的规范正交基，则 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 在该组基下的坐标为________.

5. 已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 相似，则 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=$________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,-2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,5,6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(3,0,7,t)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则 t 的值为（　　）.

(A)2　　(B)4　　(C)8　　(D)14

2. 设 4×3 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$R(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，令 $\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解可表示成（其中 k 是任意常数）（　　）.

(A) $k(1,1,-1)^{\mathrm{T}}+(3,-1,0)^{\mathrm{T}}$

(B) $(1,1,-1)^{\mathrm{T}}+k(3,-1,0)^{\mathrm{T}}$

(C) $k(4,0,-1)^{\mathrm{T}}+(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$

(D) $k(4,0,-1)^{\mathrm{T}}+k(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}$，二次型 $f(x)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 的正负惯性指数都是 1，则 $|3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$ 的值为（　　）.

(A)4　　(B) -10　　(C) -6　　(D)8

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$（　　）.

(A) 合同且相似

(B) 合同但不相似

(C) 相似但不合同

年　月　日

(D) 不合同也不相似

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正定矩阵,则下列结论正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{AB},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都正定

(B)$\boldsymbol{AB}$ 正定,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 非正定

(C)$\boldsymbol{AB}$ 不一定正定,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 正定

(D)$\boldsymbol{AB}$ 非正定,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 正定

三、(5 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$,求$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

四、(6 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 都是 $\mathbf{R}^3$ 的基;

(2) 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵;

(3) 求 $\boldsymbol{\xi}=-\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+3\boldsymbol{\beta}_3$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

五、(6 分) 当 a 等于何值时,方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=a\\x_1+ax_2+x_3=1\\ax_1+x_2+x_3=a\end{cases}$ 无解?有唯一解?有无穷多解?当有无穷多解时,写出通解.

六、(6 分) 设二次型 $f=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求常数 a;

(2) 求一个正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$,将 f 化为标准型;

(3) 问 $f(x_1,x_2,x_3)=-1$ 表示 $\mathbf{R}^3$ 中何种曲面.

七、(4 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实方阵,且 $R(\boldsymbol{A})=n$. 证明:$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

八、(3 分) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m>1)$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$. 证明:向量组 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

参考答案

一、1. n(1重),0($n-1$重) 2. 单叶双曲面 3. $\frac{27}{2}$ 4. $(2\sqrt{2},2,-\sqrt{2})^{\mathrm{T}}$ 5. 6

二、1. D 2. A 3. B 4. B 5. C

三、解:由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 及 $|\boldsymbol{A}|=6\neq 0$ 知 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

四、解:(1)
$$|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&0&2\end{vmatrix}=1\neq 0$$
$$|\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$
故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 都是 $\mathbf{R}^3$ 的基.

(2) 由
$$(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)\qquad(*)$$
得
$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}&=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)\\&=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&0&-1\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&3&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(3) 解法1:$\boldsymbol{\xi}=-\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+3\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. 设 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$,则

$$x=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\2&1&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

解法 2：$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$. 设 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. 根据（*）得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

五、解：$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&a\\1&a&1&1\\a&1&1&a\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&a\\0&a-1&1-a&1-a\\0&1-a&1-a^2&a-a^2\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&a\\0&a-1&1-a&1-a\\0&0&2-a-a^2&1-a^2\end{array}\right)$$

(1) 当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时，此方程组有唯一解；

(2) 当 $a=-2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=3$，此方程组无解；

(3) 当 $a=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=1<3$，此方程组有无穷多解. 此时

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ (k_1,k_2\ \text{为任意常数})$$

是此方程组的通解.

六、解：(1)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$. 由 $R(\boldsymbol{A})=2$，知 $|\boldsymbol{A}|=0$，由此求得 $a=-2$ 或者 $a=1$.

当 $a=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=1$，不满足条件；当 $a=-2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2$，故 $a=-2$ 为所求.

(2) 当 $a=-2$ 时

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-1&-1\\-1&\lambda+2&-1\\-1&-1&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda\,(\lambda+3)^2$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,-3,-3$.

当 $\lambda_1=0$ 时，解 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，规范化得

心得 体会 拓广 疑问

$$P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

当 $\lambda_2=\lambda_3=-3$ 时,解 $(-3E-A)X=0$,得特征向量为

$$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

正交化得

$$\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

规范化得

$$P_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\quad P_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

令

$$P=(P_1\quad P_2\quad P_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

则 P 为正交阵,且在正交变换 $X=PY$ 下,$f=-3y_2^2-3y_3^2$.

(3)$f=-1$ 表示 $\mathbf{R}^3$ 中的椭圆柱面.

七、证:因 $(A^TA)^T=A^TA$,知 A^TA 是实对称矩阵.又由 $R(A)=n$ 知线性方程组 $AX=0$ 只有零解.因此,$\forall X\in\mathbf{R}^n,X\neq 0$,有

$$X^TA^TAX=(AX)^T(AX)>0$$

故 A^TA 是正定矩阵.

八、证:设 $k_1(\beta-\alpha_1)+k_2(\beta-\alpha_2)+\cdots+k_m(\beta-\alpha_m)=0$,即

$$(k_1+k_2+\cdots+k_m)\beta-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_m\alpha_m=0$$

亦即

$$\left(\sum_{i=1}^m k_i-k_1\right)\alpha_1+\left(\sum_{i=1}^m k_i-k_2\right)\alpha_2+\cdots+\left(\sum_{i=1}^m k_i-k_m\right)\alpha_m=0$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关知

年 月 日

$$\begin{cases} k_2+k_3+\cdots+k_m=0 \\ k_1+k_3+\cdots+k_m=0 \\ \qquad\vdots \\ k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}=0 \end{cases}$$

心得 体会 拓广 疑问

该线性方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{m-1}(m-1)\neq 0 \quad (m>1)$$

故有 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$,因此,$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

年　月　日

2013年期末填空选择详解

一、填空题

1. $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n}\begin{vmatrix}\lambda-n & \lambda-n & \cdots & \lambda-n\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$

$\xlongequal[\substack{r_3+r_1\\ r_n+r_1}]{r_2+r_1}(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-n)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\quad \lambda_n=n$

2. $2x^2-y^2-3z^2+9=0 \Rightarrow -2x^2+y^2+3z^2=9$ 平方项两正一负，单叶双曲面

3. 由 $|\lambda E-B|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)=0$ 得 B 的特征值 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=2$，$A$与$B$相似，有相同的特征值，若$A$可逆，$\lambda$是$A$的特征值，$\exists X\neq\vec{0}$，使得 $AX=\lambda X$，

于是 $A^{-1}AX=A^{-1}\lambda X \Rightarrow X=\lambda A^{-1}X \Rightarrow A^{-1}X=\frac{1}{\lambda}X \Rightarrow \frac{1}{\lambda}$是$A^{-1}$的特征值

$AX=\lambda X \Rightarrow A^*AX=A^*\lambda X \Rightarrow |A|EX=\lambda A^*X \Rightarrow A^*X=\frac{|A|}{\lambda}X \Rightarrow \frac{|A|}{\lambda}$是$A^*$的特征值.

$(A^*-A^{-1})X=A^*X-A^{-1}X=\frac{|A|}{\lambda}X-\frac{1}{\lambda}X=(\frac{|A|}{\lambda}-\frac{1}{\lambda})X=\frac{|A|-1}{\lambda}X \Rightarrow \frac{|A|-1}{\lambda}$是$A^*-A^{-1}$的特征值.

由特征值的性质 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1(-1)(2)=-2$

A^*-A^{-1}的特征值为 $\frac{-2-1}{1},\frac{-2-1}{-1},\frac{-2-1}{2}$，即 $-3,3,-\frac{3}{2}$，

$|A^*-A^{-1}|=(-3)3(\frac{-3}{2})=\frac{27}{2}$

4. 由课本 P129. 例15 $k_i=(\alpha_i,\alpha)$

$k_1=\frac{1}{\sqrt2}(1)+0(2)+\frac{1}{\sqrt2}(3)=\frac{4}{\sqrt2}=2\sqrt2 \quad k_2=0(1)+1(2)+0(3)=2$

$k_3=\frac{1}{\sqrt2}(1)+0(2)+(-\frac{1}{\sqrt2})3=\frac{-2}{\sqrt2}=\sqrt2$. 坐标 $(2\sqrt2,2,-\sqrt2)^T$

5. A与$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$相似，有相同特征多项式 $|\lambda E-\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1$

-1不是A的特征值 $\Rightarrow |-E-A|\neq0 \Rightarrow |A+E|\neq0 \Rightarrow R(A+E)=2$（满秩）

$A+E=f(A)$, $f(x)=x+1$. 由特征值的性质 $f(\lambda)$是$f(A)$的特征值.

$A+E$的特征值为 $f(1)=1+1=2$.（二重）. $tr(A+E)=2+2=4$.

$\Rightarrow R(A+E)+tr(A+E)=2+4=6$

2013年

二、选择题.

1. 线性相关不是列满秩 (D)

$$[\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_3\ \vec{\alpha}_4]=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\-1&-1&1&0\\0&-2&5&7\\4&0&6&t\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+(-4)r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&0&3&3\\0&-2&5&7\\0&-4&-2&t-12\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&-2&5&7\\0&0&3&3\\0&-4&-2&t-12\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+(-2)r_2}\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&-2&5&7\\0&0&3&3\\0&0&-12&t-26\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4+4r_3}\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&-2&5&7\\0&0&3&3\\0&0&0&t-14\end{bmatrix}$$

秩 <4

$\Rightarrow t-14=0 \quad t=14.$

2. $R(A)=2.\quad \dim N(A)=3-2=1.\quad AX=\vec{0}$ 的基础解系含有一个向量 $\vec{\xi}_1$

$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_3=\vec{0} \Rightarrow [\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\vec{0} \quad A\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\vec{0} \quad \vec{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$

$\vec{\beta}=3\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2 \Rightarrow [\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_3]\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}=\vec{\beta} \quad A\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}=\vec{\beta} \quad \begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}$ 是 $AX=\vec{\beta}$ 的一个特解 $\vec{\eta}^*$

$AX=\vec{\beta}$ 的通解为 $\vec{\eta}+k\vec{\xi}_1=\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 选(A)

3. $A^3=A \quad A^3-A=0$ 设 λ 是 A 的特征值. 存在 $X\neq 0$ 使得 $AX=\lambda X$

$(A^3-A)X=\vec{0} \quad A^3X-AX=\vec{0} \Rightarrow \lambda^3X-\lambda X=\vec{0} \quad (\lambda^3-\lambda)X=\vec{0}.\ X\neq\vec{0} \Rightarrow \lambda^3-\lambda=0$

$\lambda^3-\lambda=0 \quad \lambda(\lambda^2-1)=0 \quad \lambda(\lambda+1)(\lambda-1)=0 \quad \lambda_1=0.\ \lambda_2=-1.\ \lambda_3=1$

(一般结论. $f(A)=0 \Rightarrow f(\lambda)=0$) 又由 X^TAX 的正负惯性指数都是1, 0, -1, 1. 都是A的特征值

$f(A)=3A+2E \quad f(\lambda)=3\lambda+2.$ 是 $3A+2E$ 的特征值, $\Rightarrow$ $3A+2E$ 的特征值 2, -1, 5,

$|3A+2E|=(2)(-1)(5)=-10.$ 选(B)

4. $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-1=(\lambda-1+1)(\lambda-1-1)=\lambda(\lambda-2).\quad \lambda_1=0.\ \lambda_2=2.$

$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0\\0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)=0.\quad \lambda_1=0.\ \lambda_2=1$

A与B特征值不同 $\Rightarrow$ A与B不相似.

由定理8.1, A与B都是实对称阵. ∃正交阵. P. Q 使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix} \quad Q^{-1}BQ=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

P. Q 是正交阵. $P'=P^{-1}.\ Q'=Q^{-1} \quad P'AP=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix} \quad Q'BQ=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 合同. A与 $\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}$ 合同. B与 $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 合同.

合同有传递性 $\Rightarrow$ A与B合同, 选(B)

2013年

二、选择

5. A, B 是正定矩阵, 正定矩阵一定是对称阵,

但 $(AB)'=B'A'=BA$ 不一定等于 AB, $\Rightarrow$ AB不一定是正定矩阵, (A)(B)(D) 错误.

$\forall X\neq\vec{0}$

$X'(A+B)X=X'AX+X'BX>0$ (由A.B正定) $\Rightarrow$ A+B 正定 选(C)

哈工大2012年秋季学期
《代数与几何》期末试卷A

此卷满分50分 2013-1-11 8:00-

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总
分数									

(本试卷中A^*、A^{T}、$R(A)$分别表示矩阵A的伴随矩阵、A的转置矩阵、A的秩；E表示单位阵)

一、填空题（每小题2分，共10分）

1. 已知3阶矩阵A有3个互异特征值，且A不可逆，则$R(A)$=______.

2. 已知向量组$\alpha_1=(1,0,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(-1,-4,-8,t)^{\mathrm{T}}$线性相关，则$t=$______.

3. 在空间直角坐标系中方程$x^2+2y^2-4z^2+16=0$的图形是______.

4. 设A为3阶方阵，且$R(A)=2$，则方程组$A^*X=0$的基础解系中含有__个线性无关的解向量.

5. 设实二次型$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$的秩为5，正惯性指数为4，则其规范形为________.

二、选择题（每小题2分，共10分）

1. 设A是$m\times n$矩阵，且$R(A)=r$，对于方程组$AX=b$，下列结论正确的是【 】

(A) 当$r=m$时，有解； (B) 当$r=n$时，有唯一解；

(C) 当$m=n$时，有唯一解； (D) 当$r<n$时，有无穷多解.

2. 已知向量组

$\alpha_1=(1,-1,2,4)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(0,3,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(3,0,7,14)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(1,-2,2,0)^{\mathrm{T}}$，

$\alpha_5=(2,1,5,10)^{\mathrm{T}}$，则该向量组的极大无关组是【 】

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$； (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$；

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$； (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$.

设 A,B 是 n 阶方阵，下列结论中错误的是 【 】

(A) 若 A,B 都可逆，则 $A^{\mathrm{T}}B$ 也可逆；

(B) 若 A,B 都是实对称正定矩阵，则 $A+B^{-1}$ 也是实对称正定矩阵；

(C) 若 A,B 都是正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵；

(D) 若 A,B 都是实对称矩阵，则 AB 是实对称矩阵.

4. 若实方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的列向量是正交向量组，则下列结论错误的是【 】

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中不含零向量； (B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关；

(C) $A^{\mathrm{T}}A$ 是数量阵； (D) $A^{\mathrm{T}}A$ 是对称阵.

5. 设 4 元实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+(x_3+a_3x_4)^2+(x_4+a_4x_1)^2,$$

则有 【 】

(A) 当 $a_1a_2a_3a_4\neq 1$ 时二次型 f 正定； (B) 当 $a_1a_2a_3a_4=1$ 时二次型 f 正定；

(C) 二次型 f 不正定； (D) 二次型 f 正定.

三、(本题 5 分)

求直线 $L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$，在平面 π：$x+2y-z=0$ 上投影的直线方程..

四、(本题 5 分) 设 R^3 中一组基为 $\alpha_1=(1,-2,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(3,2,1)^T$，

向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 x_1,x_2,x_3，ξ 在另一组基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 y_1,y_2,y_3. 且有，$y_1=x_1-x_2-x_3,y_2=-x_1+x_2,y_3=x_1+2x_3$.

求基 β_1,β_2,β_3.

五、(本题 6 分) 已知线性方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+kx_3=3 \\ x_1+kx_2+3x_3=2 \end{cases}.$$

求出 k 的值，使方程组有无穷多解，并求出通解.

(本题 6 分) 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

(1) 求矩阵 A 的特征值和特征向量；

(2) 求出正交阵 P 和对角阵 Λ，使 $P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda$.

七、(本题 5 分) 设 $A=(a_{ij})$ 为 3 阶非零实矩阵，且 $a_{ij}=A_{ij}$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 在

$|A|$

中的代数余子式. 证明：A 为正交矩阵.

八、(本题 3 分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵，且满足 $A^2=A$,

证明：$B=E+A+A^2+\cdots+A^m$ 是正定矩阵.（其中 m 为正整数）

参考答案

一、填空题

1. 2；　2. 2；　3. 双叶双曲面；　4. 2；　5. $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2-y_5^2$.

二、选择题

1. A；　2. B；　3. D；　4. C；　5. A.

三、解：过 L 的平面束为 $2x-y+z-1+\lambda(x+y-z+1)=0$

$\vec{n}_1=(2+\lambda,\ \lambda-1,\ 1-\lambda)$，　$\vec{n}=(1,\ 2,\ -1)$

$\vec{n}\cdot\vec{n}_1=0,\ \lambda=\dfrac{1}{4}$，得　$\pi_1:\ 3x-y+z-1=0$

所求投影直线的方程为：$\begin{cases}3x-y+z-1=0\\ x+2y-z=0\end{cases}$

软件分享群

626648181

四、解：设　$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$

又　$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

考研交流群

189868951

所以　$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$　求得　$$P=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&3&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

故　$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&0&3\\-2&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\2&3&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-4&-3&-1\\3&4&2\end{pmatrix}.$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

五、解：

$$(A|\beta)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 2 & 3 & k & \vdots & 3\\ 1 & k & 3 & \vdots & 2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & k+2 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 6-k\quad k^2 & \vdots & 2-k\end{pmatrix}$$

当 $R(A)=R(A|\beta)<3$ 时，方程组有无穷多解

此时 $k=2$ 方程组有无穷多解

当 $k=2$ 时，

$$(A|\beta)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & \vdots & 1\\ 2 & 3 & 2 & \vdots & 3\\ 1 & 2 & 3 & \vdots & 2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -5 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$$

得同解方程组为 $\begin{cases}x_1-5x_3=0\\ x_2+4x_3=1\end{cases}$

$$\xi=\begin{bmatrix}5\\-4\\1\end{bmatrix},\quad \eta_0=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

通解为 $X=k\xi+\eta_0=k\begin{bmatrix}5\\-4\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$k\in R$

六、解：(1)求 A 的特征值

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & -2\\ 2 & \lambda+3 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+8)$$

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-8$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次方程组 $(E-A)X=0$

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，

属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的全部特征向量 $X=k_1\xi_1+k_2\xi_2$（k_1，k_2 不同时为零）

对于 $\lambda_3=-8$，解齐次线性方程组 $(-8E-A)X=0$

$$-8E-A=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，属于 $\lambda_3=-8$ 的全部特征向量 $X=k\xi_3$（k 不为零）

(2) 将 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ 规范正交化得 $P_1=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\0\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt5}{15}\\\frac{4\sqrt5}{15}\\\frac{\sqrt5}{3}\end{pmatrix}$

将 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，单位化得 $P_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，

令 $P=(P_1\ P_2\ P_3)=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt5}&\frac{2\sqrt5}{15}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4\sqrt5}{15}&\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt5}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 为正交阵，$\therefore P^TAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-8\end{pmatrix}$

七、证明：$\because\ a_{ij}=A_{ij}$，$\therefore\ A'=A^*$

又 $AA^*=AA'=|A|E$

$\because A\neq 0$，$\exists a_{ij}\neq 0$，$\therefore |A|=a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2\geq a_{ij}^2>0,(i=1,2,3)$

对 $AA'=|A|E$ 两边取行列式 $|A|^2=|A|^3$，得 $|A|=1$

$AA'=E$；A 为正交阵。

八、证明：$\because A'=A$，$\therefore B'=B$，

设 λ 为 A 的特征值，则 $\lambda^2=\lambda$，$\therefore \lambda=1$ 或 $\lambda=0$

A 是 n 阶实对称矩阵，A 可以相似对角化，存在正交阵 P，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}1+\lambda_1+\lambda_1^2+\cdots+\lambda_1^m & & & \\ & 1+\lambda_2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1+\lambda_n+\lambda_n^2+\cdots+\lambda_n^m\end{pmatrix}$$

$1+\lambda_i+\lambda_i^2+\cdots+\lambda_i^m$（$i=1,2,\cdots n$）为$B$的特征值且都大于零，所以$B$是正定矩阵

哈工大 2012 年秋季学期

《代数与几何》期末试卷 B

此卷满分 50 分

2013-1-11　10:30-12:30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

(本试卷中 $A^*, A^T, R(A)$ 分别表示矩阵 A 的伴随矩阵、A 的转置矩阵、A 的秩；E 表示单位矩阵)

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, 5，则 $\left|4A^{-1}-E\right|=$ ____________.

2. 设向量组 $\alpha_1=(a,\ 2,\ 10)^T$, $\alpha_2=(-2,\ 1,\ 5)^T$, $\alpha_3=(-1,\ 1,\ 4)^T$, $\beta=(1,\ 2,\ 0)^T$，

   则当 a 满足条件________时，向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示.

3. 曲线 $\begin{cases} x^2=z \\ y=0 \end{cases}$，绕 z 轴旋转一周所形成的旋转曲面方程为____________.

4. 设 n 阶矩阵 A 正定, X 是任意 n 维非零列向量. 则 $R\begin{pmatrix} A & X \\ X^T & 0 \end{pmatrix}=$ ________.

5. 若方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0 \end{cases}$ 仅有零解，则常数 $a,\ b,\ c$ 应满足关系为

   ________________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设非齐次线性方程组为 $AX=\beta$，其导出组为 $AX=0$，则有　　【　　】

   (A) $AX=\beta$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $AX=0$ 只有零解；

   (B) $AX=\beta$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow$ $AX=0$ 有非零解；

   (C) 若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=\beta$ 有无穷多解；

   (D) 若 $AX=\beta$ 有唯一解，则 $AX=0$ 只有零解.

大物实验群
290028380

2. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是　　【　　】

   (A) $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3-\alpha_1$;

   (B) $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$;

(C) $\alpha_1+2\alpha_2$, $2\alpha_2+\alpha_3$, $3\alpha_2+\alpha_1$;

(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3$, $3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$.

3．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 A 与 B 之间 【 】

（A）合同，且相似；（B）不合同，但相似；

（C）合同，但不相似；（D）既不合同，也不相似.

4．设 A 为 $m\times n$ 阶实矩阵，则下列结论错误的是 【 】

（A）若 $R(A)=n$，则有 A^TA 正定；（B）$|A^TA|\neq 0$；

（C）$AX=0$ 与 $A^TAX=0$ 是同解线性方程组；（D）$R(A)=R(A^TA)$.

5．实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-tx_2x_3+4x_3^2$ 正定，则 t 的取值范围是 【 】

（A）$-4<t<4$；（B）$-3<t<3$；

（C）$-2<t<2$；（D）$-1<t<1$.

大物实验群
290028380

三、(本题5分)

求直线 $L:\begin{cases}3x-2z-6=0\\x+y-2z+1=0\end{cases}$，在平面 $\pi:x+y+2z-5=0$ 上投影的直线方程.

四、(本题 5 分) 如果矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & x & 2 & 2\\ 0 & 1 & y & 3\\ 0 & 0 & 2 & z\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 可以相似对角化，求出 x、y、z 的值.

五、(本题 6 分) 线性方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\ x_1-2x_2+x_3=p\\ x_1+x_2-2x_3=p^2\end{cases}$$

中的 p 取何值时，方程组无解、有无穷多解？有无穷多解时，求出通解.

(本题 6 分) 设 3 阶实对称矩阵 A 的每行元素的和都为 6，且 $R(3E-A)=1$，

（1）求一个正交变换 $X=PY$ 将二次型 $f(X)=X^{T}AX$ 化为标准形；

（2）问 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示几何空间中何种曲面.

读书交流群
735695322

大物实验群
290028380

七、(本题 5 分) 设 A 为 n 阶方阵，且满足 $A^2=A$，令 $B=A^2-5A+6E$

证明：B 为可逆矩阵.

八、(本题 3 分) 已知 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_m \end{pmatrix}$$

其中方阵 A_i 与 B_i 相似 $(i=1,2,\cdots,m)$，证明：矩阵 A 与 B 相似.

参考答案

一、填空题

1. $-\dfrac{3}{5}$　　2. $a\neq -4$　　3. $x^2+y^2=z$　　4. $n+1$　　5. a,b,c 互不相等

二、选择题

1. D　　2. C　　3. D　　4. B　　5. A

三、解：过 L 的平面束为 $3x-2z-6+\lambda(x+y-2z+1)=0$

$$\vec{n}_1=(3+\lambda,\ \lambda,\ -2-2\lambda),\quad \vec{n}=(1,\ 1,\ 2)$$

$$\vec{n}\cdot\vec{n}_1=0,\ \lambda=-\frac{1}{2}.$$

得　π_1：$5x-y-2z-13=0$

所求投影直线的方程为：$\begin{cases}5x-y-2z-13=0\\ x+y+2z-5=0\end{cases}$

四、解：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -x & -2 & -2\\ 0 & \lambda-1 & -y & -3\\ 0 & 0 & \lambda-2 & -z\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=\lambda_4=2$

$\lambda_1=\lambda_2=1$，代数重数为 2，几何重数也为 2，$\therefore\ R(E-A)=2$

$$E-A=\begin{pmatrix}0 & -x & -2 & -2\\ 0 & 0 & -y & -3\\ 0 & 0 & -1 & -z\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & -x & -2 & -2\\ 0 & 0 & -1 & -z\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $x=0$。

$\lambda_3=\lambda_4=2$ 代数重数为 2，几何重数也为 2，$\therefore\ R(2E-A)=2$.

$$2E-A=\begin{pmatrix}1 & -x & -2 & -2\\ 0 & 1 & -y & -3\\ 0 & 0 & 0 & -z\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $z=0$。y 为任意实数。

五 解：$(A\vdots b)=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & \vdots & -2\\ 1 & -2 & 1 & \vdots & p\\ 1 & 1 & -2 & \vdots & p^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \vdots & p\\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 2p-2\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & p^2+p-2\end{pmatrix}$

当 $p\neq1$ 且 $p\neq-2$ 时，$R(A)=2\neq R(A\vdots b)=3$，方程组无解.

当 $p=1$ 时，$(A\vdots b)\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$ 方程组有无穷多解

得同解方程组为 $\begin{cases}x_1=1+x_2\\ x_3=x_2\end{cases}$

$$\therefore \eta^*=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \xi=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 通解 $X=\eta^*+k\xi=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$， $k\in R$.

当 $p=-2$ 时，$(A\vdots b)\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$ 方程组有无穷多解

得同解方程组为 $\begin{cases}x_1=x_2\\ x_3=x_2-2\end{cases}$

$$\therefore \eta^*=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix},\ \xi=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}，\text{或 }\eta^*=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},$$

$\therefore$ 通解 $X=\eta^*+k\xi=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，或. $X=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，　　$k\in R$

六、解：（1）$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\lambda=6$ 是 A 的特征值，$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 是对应的特征向量。单位化

得 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

$\because R(3E-A)=1$，$\therefore |3E-A|=0$，$\lambda=3$ 是 A 的 2 重特征值.

设 $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 是 $\lambda=3$ 对应的特征向量，$(X,\xi_1)=0$，$x_1+x_2+x_3=0$

得 $\xi_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，规范正交化得 $\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

令 $P=(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$为正交阵，$\therefore P^{T}AP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{pmatrix}$

令 $X=PY$，则 $f=6y_1^2+3y_2^2+3y_3^2$

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=6y_1^2+3y_2^2+3y_3^2=1$ 为椭球面.

七、证 1：$A^2=A$，$B=A-5A+6E=-4A+6E$

$AB=A^2-5A^2+6A=A-5A+6A=2A$

$\therefore 2AB=4A$，$\therefore 2AB-4A+6E=6E$

$2AB+B=6E$，$\therefore \dfrac{2A+E}{6}B=E$，$\therefore B$ 为可逆矩阵

证 2：$A^2=A$，则 $\lambda^2=\lambda$，$\therefore \lambda=1$ 或 $\lambda=0$

$B=A^2-5A+6E=(A-2E)(A-3E)$

$|B|=|A-2E\,||A-3E|\neq 0$

故 B 可逆矩阵.

八、证：$\because A_i$ 与 B_i 相似，$\therefore$ 存在可逆阵 T_i，使得 $T_i^{-1}A_iT_i=B_i$

令 $T=\begin{pmatrix}T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_m\end{pmatrix}$，$|T|\neq 0$，$T$ 可逆，且

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}T_1^{-1} & & & \\ & T_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_m^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_m\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}T_1^{-1}A_1T_1 & & & \\ & T_2^{-1}A_2T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_m^{-1}A_mT_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_m\end{pmatrix}=B$$

$\therefore$ 矩阵 A 与 B 相似.

2012年代几期末考试试题

一、填空题

1. 曲线$\begin{cases}2y^2-z=1\\x=0\end{cases}$绕z轴旋转而成的旋转曲面方程为________。

2. 设向量组$a_1=(1,1,1)$，$a_2=(1,2,3)$，$a_3=(1,3,t)$,当t=________时，a_1,a_2,a_3线性相关。

3. 若n阶方阵A满足$|A|=0$，$A^*\neq 0$,则$A^*X=0$（A^*为A的伴随矩阵）的基础解系一定是由________个线性无关的解向量构成。

4. 设n维向量组a_1，a_2，a_3线性相关，则向量组a_1+a_2，a_2+a_3，a_3+a_1线性________。

5. R^2的基$\alpha_1=(1,1)^T$，$\alpha_2=(0,1)^T$到基$\beta_1=(1,-1)^T$，$\beta_2=(1,\ 2)^T$的过渡矩阵为________。

6. 二阶方阵A与B相似，A的特征值为1,2，则$3A^2-2A+E$的全部特征值分别为________，$|B^2+2E|=$________。

7. 设矩阵 A=$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，若A与B相似，则 x=________，y=________。

8. 设 f=$x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3=2x_2x_3$是正定二次型，则a的取值范围是________。

二、选择题

1.设A、B都n是阶矩阵，下列结论错误的是（　　）

（A）若A、B都是可逆矩阵，则AB也是可逆矩阵

（B）若A、B都是正交矩阵，则AB也是正交矩阵

（C）若A、B都是正定矩阵，则AB也是正定矩阵

（D）若A、B都是正交矩阵，则$A^{-1}B^{-1}$也是正交矩阵

2.设A是$m\times n$矩阵，AX=0是非齐次线性方程组AX=β的导出组，则（　　）

（A）若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=\beta$ 有唯一解

（B）若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=\beta$ 有无穷多解

（C）若 r（A）=n,则 $AX=\beta$ 必有唯一解

（D）若 $AX=\beta$ 有无穷多解，则 $AX=0$ 必有非零解

3.若 n 阶方阵 A 与 B 相似，则（　　）

（A）$\lambda E-A=\lambda E-B$

（B）A 与 B 有相同的特征值与特征向量

（C）A 与 B 相似于同一对角阵

（D）对任意常数 t，tE-A 与 tE-B 相似

4.设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，则（　　）

（A）A 与 B 既合同又相似

（B）A 与 B 合同但不相似

（C）A 与 B 相似但不合同

（D）A 与 B 既不相似又不合同

5.若 n 阶方阵 A 正定，则下列结论不正确的是（　　）

（A）A 的所有元素全为正

（B）A^{-1} 也是正定矩阵

（C）$|A|>0$

（D）A 为满秩矩阵

三、已知线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = b \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$，当 a，b 为何值时，方程组（1）无解；（2）有唯一解；（3）有无穷多解。并在无穷多解时求其通解。（13 分）

四、设向量组 $\alpha_1=(1,2,3,0)^T$，$\alpha_2=(7,0,14,3)^T$，$\alpha_3=(2,-1,0,3)^T$，$\alpha_4=(5,1,6,2)^T$，$\alpha_5=(2,-1,4,1)^T$，

（1）求向量组的秩；（2）求向量组的一个极大无关组。（8 分）

五、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，

（1）用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准型，并求所作正交变换。

（2）方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面。（16 分）

六、设 A 为实对称阵，B 为正定阵，若 BA 的特征值都大于零，证明 A 为正定阵。（3 分）

2012年代几期末考试试题答案

一. 填空题

1. $2x^2+2y^2-z-1=0$
2. 5
3. n-1
4. 相关
5. $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$
6. 2，9　18
7. 0，1
8. A>5

二. 选择题 1.C 2.D 3 D 4.B 5.A

三．解：系数矩阵 A= $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & b\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & a & 0 & b-1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

(1) $R(A)+1=R(B)$时，方程组无解，得 $a=0$，$b\neq 1$

(2) $R(A)=R(B)=3$ 时，方程组有唯一解，得 $a\neq 0$，b 为任意常数

(3) $R(A)=R(B)<3$ 时，方程组有无穷解，得 $a=0$，$b=1$

由 A=$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,B=$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$得其同解方程组为$\begin{cases}x_1+x_3=1\\ x_2-x_3=0\end{cases}$

令$x_3=0$得其特解为$\alpha=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$，*由于*$3-R(A)=1$,

令$x_3=1$，*得其导出组的基础解系为*$\beta=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

通解为 $X=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$，k 为任意常数

四．

解：（1）$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]=\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\2&0&-1&1&-1\\3&14&0&6&4\\0&3&3&2&1\end{bmatrix}$，化简可得 $R(A)=4$

（2）故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为向量组的一个极大无关组

五．

解：（1）二次型的矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\lambda-5&\lambda-5&\lambda-5\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$

知 A 的特征值为-5，-1，-1

对于 $\lambda_1=5$ 解 $\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$，得 $T_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，单位化得 $p_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix}$

对于 $\lambda_2=\lambda_3=-1$，解 $\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$，得 $T_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$，$T_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

正交化得 $\beta_1=T_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$，$\beta_2=T_3-\frac{(\beta_1,T_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

单位化得 $P_2=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$，$P_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$，则正交矩阵 $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$

(2)旋转双叶双曲面

六．证：由 B 正定知 $B=C^TC$，C 为可逆阵，$BA=C^TCA=C^TCAC^{-1}C$，可知 CAC^{-1} 与 BA 合同，故 CAC^{-1} 也为正定阵，由此得 A 为正定阵

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2011 级期末试题及答案

（此卷满分 50 分）

注：本试卷中 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵，$R(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵和 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 均不可逆，则 $|3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=$________.

2. 直线 l：$\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$ 与平面 π：$x+2y-5z-11=0$ 的交点为________

3. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,-2,6)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,t,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(4,-1,-5,10)^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则 $t=$________.

4. 设两个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 正交且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，则 $|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=$________.

5. 设向量 $X_0=(1,1,k)^{\mathrm{T}}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵的特征向量，则 $k=$________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则必有（　　）.

(A) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

(B) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

(D) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

2. 已知向量组(I)：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则与(I)等价的向量组是（　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

3. 设有三个平面 π_1：$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$，π_2：$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$，π_3：$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$，如果 $R\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1&\cdots&d_1\\a_2&b_2&c_2&\cdots&d_2\\a_3&b_3&c_3&\cdots&d_3\end{pmatrix}=$

年　月　日

2,则三个平面的位置关系为(　　).

(A) 相交于一点　　(B) 相交于一条直线

(C) 重合　　(D) 无公共点

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实方阵,则下列命题错误的是(　　).

(A) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$,则 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值

(B) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 0

(C) 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}$ 没有实特征值

(D) 若 $|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})|=0$,则 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值

5. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$ 正定,则常数 a 的取值范围是(　　).

(A) $-\sqrt{\frac{7}{2}}<a<\sqrt{\frac{7}{2}}$

(B) $-\frac{1}{\sqrt{2}}<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$

(C) $-1<a<1$

(D) $-2<t<2$

三、(5 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}$,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

四、(5 分) 设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似,求 x,y.

五、(6 分) 当 k 为何值时,方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-2x_4=0\\2x_1-x_2-x_3+x_4=1\\3x_1+x_2-2x_3-x_4=k\end{cases}$ 无解;有解;在有无穷多解时,求出通解.

六、(6 分) 设 4 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,1)$,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) 问矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否能相似对角化?若能,求出可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$.

七、(5 分) 设向量组(I):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,且可由向量组(II):$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性表示.

证明:(1) 向量组(II) 线性无关;

(2) 向量组(I) 与(II) 等价.

八、(3 分) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 合同,证明:$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 合同.

心得 体会 拓广 疑问

年　　月　　日

2011年期末填空选择详解.

一、填空题.

1. 由题 $|A|=|A-E|=|A+2E|=0$. $|0E-A|=0$, $|1\cdot E-A|=0$, $|(-2)E-A|=0$

A的三个特征值, $\lambda_1=0$. $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-2$

$3A-E$ 的特征值, $3\lambda_1-1=-1$, $3\lambda_2-1=3-1=2$, $3\lambda_3-1=3(-2)-1=-7$.

$|3A-E|=$ 特征值的乘积 $=(-1)(2)(-7)=14$.

2. 求交点,用直线的参数方程

$$l:\begin{cases}x=2t+5\\ y=-2t-3\\ z=3t+1\end{cases}$$ 代入平面方程 $(2t+5)+2(-2t-3)-5(3t+1)-11=0$

$-17t=17$. $t=-1$

交点 $x_1=2(-1)+5=3$. $y_1=-2(-1)-3=-1$. $z_1=3(-1)+1=-2$, $(3,-1,-2)$

3. 令 $A=[\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3]$, $\vec{\beta}$ 不能由 $\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 线性表示 $\Rightarrow$ $A\vec{x}=\vec{\beta}$ 无解.

$$B=[A\vdots\vec{\beta}]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&3&4\\0&-1&1&-1\\-1&-2&t&-5\\2&6&4&10\end{array}\right]\xrightarrow[r_4+(-2)r_1]{r_3+r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&3&4\\0&-1&1&-1\\0&0&t+3&-1\\0&2&-2&2\end{array}\right]\xrightarrow{r_4+2r_2}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-1&1&-1\\0&0&t+3&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$R(B)=3$. 无解 $\Rightarrow R(A)\neq R(B)\Rightarrow t+3=0$. $\underline{t=-3}$

4. $|kE-A|=|kE-\vec{\alpha}\vec{\beta}^T|=k^{n-1}|k\cdot 1-\vec{\beta}^T\vec{\alpha}|\overset{\text{由}\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\beta}^T\vec{\alpha}=0}{=\!=\!=}k^{n-1}(k)=k^n$

5. X_0 是 A^{-1} 的特征向量, 也是A的特征向量,

$$AX_0=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+2k\\3+2k\\4+k\end{bmatrix}\qquad \frac{1}{3+2k}=\frac{1}{3+2k}=\frac{k}{4+k}\Rightarrow(3+2k)k=4+k\Rightarrow k=1 \text{ 或 } -2$$

二、1. $AB=0$. $A_{m\times n}B_{n\times p}$, $R(AB)\geq R(A)+R(B)-n$ $\quad R(A)\leq n-R(B)<n$.

因为 $B\neq0$ $R(B)>0$ A不是列满秩, A的列向量组线性相关 $\boxed{C}$

2. 设另一向量组为(II), 由题,(II)可由(I)线性表示, 所以(I)与(II)等价 $\Leftrightarrow R(\text{I})=R(\text{II})$ 第四章作业14题.

选项D $\underbrace{[\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_3-\vec{\alpha}_4,\vec{\alpha}_4-\vec{\alpha}_1]}_{B}=\underbrace{[\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_3\ \vec{\alpha}_4]}_{A}\boxed{\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}}=C$

$$C\xrightarrow{r_2+(-1)r_1}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&-1&1&0\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

$R(C)=4$ C可逆

$R(A)=R(B)$.

$\Rightarrow R(\text{I})=R(\text{II})$

2011 选择

二，3. 系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩 方程组有解，解向量空间的维数 $=3-2=1$ 选 $\boxed{B}$

4. 1° $|A|=0$　$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=0$，0是A的一个特征值，　A命题正确

2° $A^2=A$，设 $AX=\lambda X$，$AX=A^2X=A(AX)=A(\lambda X)=\lambda AX=\lambda^2X$

$\lambda X=\lambda^2X \Rightarrow (\lambda-\lambda^2)X=\vec{0}$　$X\neq\vec{0}$（特征向量）　$\lambda-\lambda^2=0$．$\lambda(1-\lambda)=0$，

$\lambda=0$ 或 $\lambda=1$　B命题正确

3° $A^2+A+E=0$　$AX=\lambda X$．　$(A^2+A+E)X=A^2X+AX+X=(\lambda^2+\lambda+1)X=\vec{0}$

$\lambda^2+\lambda+1=0$　$\Delta=1-4<0$　C 命题正确

4° 设 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$　$|A|=0$．所以 $|A(E-A)|=0$

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-1=(\lambda-2)\lambda=0$．　$\lambda=2$ 或 $\lambda=0$

1不是A的特征值，D命题错误，选 $\boxed{D}$

5. f正定，二次型的矩阵的顺序主子式大于零

$A=\begin{bmatrix}1&a&0\\a&4&1\\0&1&2\end{bmatrix}$　$1>0$　$\begin{vmatrix}1&a\\a&4\end{vmatrix}=4-a^2>0$　$a^2<4$

$|A|=\begin{vmatrix}4&1\\1&2\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a&1\\0&2\end{vmatrix}=8-1-a(2a)>0$　$a^2<\frac{7}{2}$

所以 $a^2<\frac{7}{2}$　$-\sqrt{\frac{7}{2}}<a<\sqrt{\frac{7}{2}}$　选 $\boxed{A}$

心得 体会 拓广 疑问

参考答案

一、1. 14　2. $(3,-1,-2)$　3. -3　4. k^n　5. $-2,1$

二、1. C　2. D　3. B　4. D　5. A

三、解：由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|=1$，在等式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}$ 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$$

故

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

四、解：由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似知，$-1,2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 于是

$$|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -x-1 & -2\\ -3 & -1 & -2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x+1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2x=0$$

得 $x=0$. 再由 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$ 知 $-1=1+y$，故 $y=-2$.

五、解 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -2 & -1 & k\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-1\end{array}\right)$$

当 $k\neq 1$ 时，无解.

当 $k=1$ 时，有无穷多解. 此时

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -1 & -\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

故通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{1}{5}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\in\mathbf{R})$$

六、解：(1) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}|=(\lambda-1)^3\,|\lambda-1+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|$

年　月　日

$$=(\lambda-1)^3(\lambda-1+4)$$
$$=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1(3 重根),-3.

当 $\lambda=1$ 时

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

因此,属于 1 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$,$k_1,k_2,k_3$ 是不全为 0 的任意常数.

当 $\lambda=-3$ 时,对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

属于 -3 的全部特征向量为 $k_4\boldsymbol{\xi}_4$,$k_4\neq 0$. 因 $\boldsymbol{A}$ 有 4 个线性无关的特征向量,能相似对角化. 令 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\xi}_1\quad\boldsymbol{\xi}_2\quad\boldsymbol{\xi}_3\quad\boldsymbol{\xi}_4)$,则

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-3\end{pmatrix}$$

七、证:(1) 由题设知:$4=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\leqslant R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\leqslant 4$,故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关.

(2) 因向量组(I) 可由向量组(II) 线性表示,存在矩阵 $\boldsymbol{K}$ 使得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \boldsymbol{\beta}_3\ \boldsymbol{\beta}_4)\boldsymbol{K}$$

由向量组(I),(II) 都线性无关知 $\boldsymbol{K}$ 是可逆的,故

$$(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \boldsymbol{\beta}_3\ \boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{K}^{-1}$$

从而向量组(I) 与(II) 等价.

八、证:由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 合同,因此存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}$$

令 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{T}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

故结论成立.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

哈尔滨工业大学2011级《代数与几何》期末试题B

（此卷满分50分）

注：本试卷中E表示单位矩阵，$R(A)$、A^*、A^T分别表示A的秩，A的伴随矩阵和A的转置矩阵.

一、填空题（每小题2分，共10分）

1．已知A与$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$相似，则$|A^{-1}-E|=$________.

2．设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组$\beta_1=\alpha_1-\alpha_3$，$\beta_2=s\alpha_2-\alpha_1$，

$\beta_3=t\alpha_3-\alpha_2$线性相关的充要条件是________.

3．设A为3阶矩阵，且$|A+E|=0$，$|A-2E|=0$，$|3A+E|=0$，则$|A|=$________

4．若方程组$\begin{cases}x_1+x_2=a\\x_2+x_3=b\\x_3+x_4=c\\x_4+x_1=d\end{cases}$有解，则常数$a$，$b$，$c$，$d$应满足关系为________

5．设α为3维实单位列向量，且$A=E+k\alpha\alpha^T$为正定矩阵，则k的取值范围是________.

二、选择题（每小题2分，共10分）

1．设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，对于线性方程组$(AB)X=0$，下列结论正确的是 【 】

（A）当$m>n$时，仅有零解；（B）当$m>n$时，必有非零解；

（C）当$n>m$时，仅有零解；（D）当$n>m$时，必有非零解.

2．已知直线L：$\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$，及平面$\pi$：$4x-2y+z-2=0$，则必有 【 】

（A）L与π垂直；（B）L与π平行但不在π上；

（C）L与π斜交；（D）L在π上.

3．向量组$\alpha_1=(1,\ -1,\ 2,\ 4)^T$，$\alpha_2=(0,\ 3,\ 1,\ 2)^T$，$\alpha_3=(3,\ 0,\ 7,\ 14)^T$，

$\alpha_4=(1,\ -2,\ 2,\ 0)^T$ 的极大无关组是 【　】

(A) α_1,α_2； (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$； (C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$； (D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

4. 曲线 $\begin{cases}2x^2-y^2=2\\ z=0\end{cases}$，绕 x 轴旋转一周所形成的旋转曲面为 【　】

(A) 椭球面； (B) 抛物面； (C) 单叶双曲面； (D) 双叶双曲面.

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} c_3 & c_2 & c_1\\ b_3 & b_2 & b_1\\ a_3 & a_2 & a_1\end{pmatrix}$，则 A 与 B 之间 【　】

(A) 相似，但不合同； (B) 等价，但不相似；

(C) 相似合同，但不等价； (D) 等价、相似且合同.

三、(本题 5 分)

求直线 L：$\begin{cases}x-y+z+1=0\\ -3x+y+z-9=0\end{cases}$，在平面 π：$x+y+z=1$ 上投影的直线方程.

四、(本题 5 分)

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 及 β_1,β_2,β_3 都是 R^3 的基，且 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求由基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵.

五、(本题 6 分)

求线性方程组的通解：

$$\begin{cases}2x_1+4x_2-x_3+3x_4=9\\ x_1+2x_2+x_3=6\\ x_1+2x_2+2x_3-x_4=7\\ 2x_1+4x_2+x_3+x_4=\text{[illegible]}\end{cases}$$

六、(本题 6 分)

设实二次型 $f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2tx_2x_3+x_3^2$，

(1) 当 $R(A)=2$ 时，确定 t 的值；

(2) 求一个正交变换 $X=PY$，使二次型 f 化为标准形；

(3) 问 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示几何空间中何种曲面.

七、(本题 5 分)

设 A 为 n 阶矩阵，满足 $A^2-5A+6E=0$

(1) 证明：$R(A-2E)+R(A-3E)=n$；

(2) 证明：A 可相似对角化.

八、(本题 3 分)

设 A，B 是 n 阶正定矩阵，证明：$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 也是正定矩阵.

参考答案

一、填空题

1．0　　2．$st=1$　　3．$\dfrac{2}{3}$　　4．$a+c=b+d$　　5．$k>-1$

二、选择题

1．B　　2．A　　3．C　　4．D　　5．D

三、解：过 L 的平面束为 $x-y+z+1+\lambda(-3x+y+z-9)=0$

$\vec{n}_1=(1-3\lambda,\ \lambda-1,\ 1+\lambda)$，　$\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$

$\vec{n}\cdot\vec{n}_1=0$，$\lambda=1$，

得　π_1：$x-z+4=0$

所求投影直线的方程为：$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$

四、解：$\because(\beta_1\ \beta_2\ \beta_2)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

五、解：$(A\vdots b)=\begin{pmatrix}2&4&-1&3&\vdots&9\\1&2&1&0&\vdots&6\\1&2&2&-1&\vdots&7\\2&4&1&1&\vdots&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0&\vdots&6\\0&0&1&-1&\vdots&1\\2&4&-1&3&\vdots&9\\0&0&2&-2&\vdots&2\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&0&\vdots&6\\0&0&1&-1&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&1&\vdots&5\\0&0&1&-1&\vdots&1\\0&0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix},$$

得同解方程组为$\begin{cases}x_1=5-2x_2-x_4\\x_3=1+4x_4\end{cases}$

竞赛交流君羊
18986 8951

$$\therefore\eta^*=\begin{pmatrix}5\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

网盘计划
Q群953062322

$\therefore$ 通解 $X=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2=\begin{pmatrix}5\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$　$k_1,\ k_2\in R$.

六、解：(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&t\\1&t&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&t-1\\0&t-1&0\end{pmatrix}$，由$R(A)=2$得$t=1$

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$

A的特征值为$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$

对于$\lambda_1=0$，解齐次方程组$AX=0$，得$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，单位化得$\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

对于$\lambda_2=1$，解齐次线性方程组$(E-A)X=0$，

$$E-A=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得特征向量$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得$\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，

对于$\lambda=4$，解齐次线性方程组$(4E-A)X=0$

$$4E-A=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，单位化得$\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

令 $P=(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$为正交阵，$\therefore P^{\mathrm{T}}AP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$

令 $X=PY$，则 $f=y_2^2+4y_3^2$，

（3）$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=y_2^2+4y_2^2=1$ 为椭圆柱面.

七、证:（1）$(A-2E)(A-3E)=0$

$\therefore\ R(A-2E)+R(A-3E)\le n$

且 $R(A-2E)+R(A-3E)\ge R(E)=n$

$\therefore\ R(A-2E)+R(A-3E)=n$.

（2）由 $\lambda^2-5\lambda+6=0$ 知 A 的特征值为 2 或 3.

$\lambda=3$ 对应的线性无关的特征向量有 $n-R(A-3E)$ 个；

$\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量有 $n-R(A-2E)$ 个；

A 有 n 个线性无关的特征向量，能相似对角化.

八、证：$\because$ A, B 均为正定阵，$\therefore A$, B 都是实对称矩阵，且 A 与 B 的特征值全大于 0.

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

$\therefore\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是实对称的.

$$\left|\lambda E-\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} \lambda E_n-A & 0 \\ 0 & \lambda E_n-B \end{vmatrix}=|\lambda E_n-A||\lambda E_n-B|.$$

可见 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的特征值全大于 0，$\therefore$ 正定.

心得 体会 拓广 疑问

哈尔滨工业大学 2010 级期末试题及答案

（此卷满分 50 分）

注：本试卷中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$R(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}^*$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}_n$ 表示 n 阶单位矩阵.

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为________.

3. 方程 $3x^2-2y^2+z^2-6=0$ 表示的空间曲面是________.

4. 若 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关，则 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解向量空间 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ 的维数是________.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & a\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量，则常数 $a=$________，$\lambda_0=$________.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关

2. 设有两个平面

$$\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

若 $r\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix}=2$，则有（　　）.

(A) π_1 与 π_2 重合

(B) π_1 与 π_2 平行但不重合

(C) π_1 与 π_2 垂直

(D) π_1 与 π_2 相交为一条直线

3. 设向量组 I：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 II：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则下列命题正确的是（　　）.

(A) 当 $r>s$ 时，向量组 I 线性相关

(B) 当 $r<s$ 时，向量组 I 线性相关

(C) 当 $r>s$ 时，向量组 II 线性相关

年　　月　　日

(D) 当 $r < s$ 时，向量组 II 线性相关

4. 已知 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$，则与 $\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{E}$ 相似的矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

5. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正定的，则 $\boldsymbol{AB}$ 一定是(　　).

(A) 对称矩阵

(B) 正交矩阵

(C) 正定矩阵

(D) 可逆矩阵

三、(5 分) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，证明 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ 也是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，并求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

四、(5 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & a & -1 & 2 \\ 5 & 3 & b & 6 \end{pmatrix}$ 且 $r(\boldsymbol{A}) = 2$，求 a,b 的值.

五、(6 分) 求方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

六、(6 分) 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和都为 3，向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的两个解.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与全部的特征向量；

(2) 求正交阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda}$；

心得 体会 拓广 疑问

年　月　日

(3) 求 $\boldsymbol{A}$.

七、(5 **分**) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,证明:$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

八、(3 **分**) 设 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是 n 元实二次型,有 n 维实列向量 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$,使 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}>0$,$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}<0$,证明:存在 n 维实列向量 $\boldsymbol{\gamma}\neq\boldsymbol{0}$,使 $\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}=0$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

2010年填空选择详解.

一. 填空.

1. $A^2-4A+3E=0$ $A^2-4A=-3E$ $A(A-4E)=-3E$. $A[-\frac{1}{3}(A-4E)]=E$

$A^{-1}=-\frac{1}{3}(A-4E)$

2. $\vec{\alpha}^T\vec{\beta}=0 \Rightarrow (\vec{\alpha},\vec{\beta})=0 \Rightarrow (\vec{\beta},\vec{\alpha})=0 \Rightarrow \vec{\beta}^T\vec{\alpha}=0.$

$|\lambda E_n-\vec{\alpha}\vec{\beta}^T|=\lambda^{n-1}|\lambda E_1-\vec{\beta}^T\vec{\alpha}|=\lambda^{n-1}|\lambda\cdot 1-0|=\lambda^n=0$

$\Rightarrow$ 特征值 $\lambda=0$ (n重)

3. 平方项两正一负,单叶双曲面.

4. $A_{n\times m}$, $A^T_{m\times n}$. $(A^TA)_{m\times m}$; A的行向量组线性无关 $\Rightarrow R(A)=n$

$R(A^TA)\le R(A)=n$. $R(A^TA)\ge R(A^T)+R(A)-n=n+n-n=n$

$\Rightarrow R(A^TA)=n$ $\quad \dim N(A^TA)=m-R(A^TA)=m-n$

5. $A\vec{\xi}=\begin{bmatrix}4&-1\\-1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\a-1\end{bmatrix}=\lambda_0\vec{\xi}=\lambda_0\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_0\\\lambda_0\end{bmatrix}$ $\lambda_0=3$. $a-1=\lambda_0=3$. $a=4$.

二. 选择

1. $A_{m\times n}x=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n \Leftrightarrow$ A的列向量组线性相关 $\boxed{C}$

2. $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$ $R\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{bmatrix}=2<3$ 有无穷多解. 通解. $X=\vec{\eta}^*+t\vec{\xi}$, $t\in\mathbb{R}$

是一条直线, π_1,π_2 不一定垂直, 不选C. 选$\boxed{D}$

或:直接由两平面位置关系, $R\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{bmatrix}=2$ π_1,π_2不平行,必相交,选D

3. 定理4.3.逆否命题 $\boxed{A}$

或: $\underbrace{[\vec{\alpha}_1\,\vec{\alpha}_2\cdots\vec{\alpha}_r]_{n\times r}}_{A}=\underbrace{[\vec{\beta}_1\,\vec{\beta}_2\cdots\vec{\beta}_s]_{n\times s}}_{B}C_{s\times r}$ $\quad R(A)\le R(B)\le s<r$. A列向量组线性相关

4. 由特征值的性质, $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1(-1)(2)=-2\ne0$

$AA^*=|A|E$. $\quad A^*=|A|A^{-1}$ 由特征值的性质, λ是A的特征值, λ^{-1}是A^{-1}的特征值. $f(\lambda)$是$f(A)$的特征值。 A^{-1}的特征值, $\frac{1}{1},\frac{1}{-1},\frac{1}{2}$, A^*的特征值, $-2(\frac{1}{1}),(-2)\frac{1}{-1},(-2)\frac{1}{2}$, 即$(-2,2,-1)$ $\quad A^*-E$的特征值, $(-2-1,2-1,-1-1)$ 即: $(-3,1,-2)$, 选$\boxed{B}$

5. 正定阵一定是对称阵, A,B正定, AB不一定对称, A,C不选 正交与正定没有必然联系 不选(B) 正定阵一定可逆, $|A|\ne0$ $|B|\ne0\Rightarrow|AB|\ne0$, 选$\boxed{D}$

心得 体会 拓广 疑问

参考答案

一、1. $\dfrac{4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}}{3}$　2. 0(n 重根)　3. 单叶双曲面　4. $m-n$　5. $a=4$, $\lambda_0=3$

二、1. C　2. D　3. A　4. B　5. D

三、解:(1) $|\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&2&0\end{vmatrix}\neq 0$. 因此,$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基.

(2) 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\beta}_3)$,则 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

$$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&3\\1&0&0&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3&4\\1&1&1&1&2&3\\1&-1&1&1&4&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&1&-1&-1&-1\\0&0&2&-2&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&-1\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

四、解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\3&a&-1&2\\5&3&b&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&a+3&-4&-4\\0&8&b-5&-4\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&a+3&-4&-4\\0&5-a&b-1&0\end{pmatrix}$$

由 $r(\boldsymbol{A})=2$ 得

$$a=5,b=1$$

五、解

$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&2&1&1\\2&-1&1&2&3\\1&0&-1&1&2\\3&-1&0&3&5\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&2&1&1\\0&1&-3&0&1\\0&1&-3&0&1\\0&2&-6&0&2\end{array}\right)$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

$$\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&2&1&1\\0&1&-3&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&1&2\\0&1&-3&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

所以,方程组的通解为

$$X=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数})$$

六、解:(1) 由题设知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,即 $\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,且 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量. 再由 $\boldsymbol{A\xi}_1=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,0,3. 属于特征值 0 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$,$k_1,k_2$ 不全为 0. 属于特征值 3 的全部特征向量为 $k_3\boldsymbol{\xi}_3$,$k_3\neq 0$.

(2) 对 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1)}{(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1)}\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

对 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{|\boldsymbol{\varepsilon}_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_2}{|\boldsymbol{\varepsilon}_2|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{|\boldsymbol{\xi}_3|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1\quad\boldsymbol{\gamma}_2\quad\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$$

年　月　日

(3)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

七、证法 1:由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 知

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$$

因此

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n$$

又由 $2\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$,因而

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant r(\boldsymbol{E})=n$$

故 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

证法 2

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E} & 2\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & 2\boldsymbol{E}\\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

因此

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=n$$

八、证:设二次型的秩为 r,存在可逆变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 使 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 化为规范形

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

令

$$\boldsymbol{Y}_0=(1,0,\cdots 0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

则有

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}_0\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbf{R}^n$$

并且

$$f=\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2=1^2-1^2=0$$

哈尔滨工业大学2005级《代数与几何》期末试题

（此卷满分50分）

注：本试卷中A^{T}表示A的转置矩阵；$R(A)$表示矩阵A的秩，A^{*}表示矩阵A的伴随矩阵，E_n表示n阶单位矩阵.

大物实验群
290028380

一、填空题（每小题3分，共15分）

1. 行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}=$__________.

2. 设n阶矩阵A没有0特征值，α是n维列向量，b是常数，则矩阵$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{T} & b \end{pmatrix}$可逆的充要条件是__________.

3. yoz坐标面上的抛物线$\begin{cases} z^2=4y \\ x=0 \end{cases}$绕$y$轴旋转一周，所生成的旋转曲面方程为________.

4. 与直线$\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$，及$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$都平行且过原点的平面方程为______.

5. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维向量空间$R^3$的一组基，则由基$\alpha_1,\dfrac{1}{2}\alpha_2,\dfrac{1}{3}\alpha_3$到基$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为__________.

二、选择题（每小题3分，共15分）

1. 设A是$m\times n$矩阵，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{T}$，则下列结论正确的是 【 】

（A）若$R(A)<n$，则$AX=\beta$无解； （B）若$R(A)<m$，则$AX=\beta$无解；

（C）若$R(A)=n$，则$AX=\beta$有解； （D）若$R(A)=m$，则$AX=\beta$有解.

2. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是 【 】

（A）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$； （B）$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$；

（C）$\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_2+2\alpha_3$，$\alpha_3+2\alpha_1$； （D）$\alpha_1-2\alpha_2$，$\alpha_2-2\alpha_3$，$\alpha_3-2\alpha_1$；

3．设 A 是 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵，若 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量为 【 】

（A）$P\alpha$；（B）$P^{-1}\alpha$；（C）$P^T\alpha$；（D）$(P^{-1})^T\alpha$.

4．设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B_1=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$B_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&\frac{3}{2}\\0&0&0\\\frac{3}{2}&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$，$B_3=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$，$B_4=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

【 】

则有

（A）A 与 B_1 等价、相似且合同；（B）A 与 B_2 等价、相似且合同；

（C）A 与 B_3 等价、相似且合同；（D）A 与 B_4 等价、相似且合同.

5．实二次型 $f=(a_1x_1+x_2)^2+(a_2x_2+x_3)^2+(a_3x_3+x_4)^2+(a_4x_4+x_1)^2$ 正定的充要条件是 【 】

（A）$a_1a_2a_3a_4\neq 1$；（B）$a_1a_2a_3a_4=1$；

（C）$a_1a_2a_3a_4\neq -1$；（D）$a_1a_3a_3a_4=-1$.

三、(本题 9 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，求矩阵 X.

哈工大资源共享
QQ 2842305604

数学建模
Q群 636683950

四、(本题 9 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\-1&1&0&\cdots&0\\-1&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$，求（1）$|A|$；（2）$R(A)$.

网盘计划
Q群 953062322

五、(本题 10 分)

线性方程组 $AX=k\beta_1+\beta_2$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&-2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$，

讨论：1．k 取何值时，该方程组无解；

2．k 取何值时，该方程组有解，有解时求出通解.

六、(本题 12 分)

已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&\lambda\\1&\lambda&1\\\lambda&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，方程组 $AX=\beta$ 有无穷多解，求

(1) 常数 λ 的值；

(2) 求正交阵 P，使 $P^{T}AP$ 为对角阵；

(3) 写出正交变换，将二次型 $f=X^{T}AX$ 化为标准形；

(4) $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 在三维几何空间中表示何种曲面.

七、(本题 5 分)

设 n 阶矩阵 A 是正交阵，且 $|A|=-1$，证明 -1 是 A 的特征值.

八、(本题 5 分)

设 A 为 $m\times n$ 的实矩阵，$B=kE+A^{T}A$，试证：当 $k>0$ 时，矩阵 B 是正定的.

网盘计划

Q群953062322

参考答案

一、填空题

1. $(a+(n-1))(a-1)^{n-1}$.　　2. $\alpha^{T}A^{T}\alpha\neq b$、　　3. $x^2+z^2=4y$.

4. $x-y+z=0$.　　5. $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.

考研交流群

189868951

二、选择题

1、D.　2、B.　3、C.　4、B.　5、A.

三、解：$AA^{*}X=E+2AX$，$|A|X=E+2AX$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&0\\-1&1&1\\0&0&2\end{vmatrix}=4$$

读书交流群

735695322

$$(|A|E-2A)X=E$$

$$(4E-2A)X=E,\ X=(4E-2A)^{-1}$$

$$4E-2A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$$

$$(4E-2A \vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$X=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

四、解：$|A|=\begin{vmatrix} 1+2+3+\cdots+n & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$R(A)=n$

五、解：(1) $AX=k\beta_1+\beta_2=\begin{pmatrix} 2k+1 \\ k+3 \\ 3k-1 \end{pmatrix}$

$$(A \vdots k\beta_1+\beta_2)=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 2k+1 \\ -1 & -2 & 1 & k+3 \\ 1 & -1 & -1 & 3k-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 2k+1 \\ 0 & -1 & 0 & 3k+4 \\ 0 & -3 & 0 & 4k+2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 2k+1 \\ 0 & 1 & 0 & -3k-4 \\ 0 & 0 & 0 & -5k-10 \end{array}\right)$$

$k \neq -2$ 时，方程组无解．

(2) $k=-2$ 时，方程组有无穷多解．

$$(A\vdots k\beta_1+\beta_2)\to\begin{pmatrix}1&1&-1&\vdots&-3\\0&1&0&\vdots&2\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&\vdots&-5\\0&1&0&\vdots&2\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}$$

通解为 $X=\begin{pmatrix}-5\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

六、解：(1) $(A\vdots\beta)=\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\vdots&1\\1&\lambda&1&\vdots&1\\\lambda&1&1&\vdots&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\vdots&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&\vdots&0\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&\vdots&-2-\lambda\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&\vdots&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&&0\\0&0&2-\lambda-\lambda^2&&-2-\lambda\end{pmatrix},$$

$\lambda=-2$, $\lambda=1$（舍去）

(2) $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+2&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&\lambda+2&-1\\1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&\lambda+3&-3\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)=0.$

$$\lambda_1=3,\ \lambda_2=-3,\ \lambda_3=0$$

$\lambda_1=3$ 时，解 $(3E-A)X=0$，得

$$(3E-A)\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=-3$ 时，解 $(-3E-A)X=0$，得

哈尔滨工业大学2008级《代数与几何》期末试题及答案

(此卷满分 50 分)

注：本试卷中 A^{T} 表示 A 的转置矩阵；$R(A)$ 表示矩阵 A 的秩，A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵，E_n 表示 n 阶单位矩阵.

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 若 n 阶矩阵 A 的元素都是 1，则 A 的非零特征值是________.

2、已知向量组 $\alpha_1=(1,2,t^2),\alpha_2=(1,t,2),\alpha_3=(1,t,t)$ 线性相关，则 $t=$ ________

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维向量空间 R^n 的一组基，$\alpha_{n+1}\in\mathrm{R}^n$，$\alpha_{n+1}$ 在这组基下的坐标为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，若 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 也是 R^n 的一组基，则由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 的过渡矩阵

$$P=$$

____

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&2&-2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$，

则 A，B，C 中与 D 既相似又合同的矩阵为__________.

5. 空间直角坐标系中曲线 $\begin{cases}9x^2-4y^2=36\\z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周，所生成的旋转曲面的方程为 __________________

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\1&1&a\\a&1&1\end{pmatrix}$，伴随矩阵 $A^*\neq 0$，且 $A^*x=0$ 有非零解，则 a 的值为

(A) 2;　　(B) -2;　　(C) 1;　　(D) -1.

2. 实二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 为正定二次型的充要条件是　　【　】

(A) f 的负惯性指数是0;　　(B) 存在正交阵 P 使 $A = P^{\mathrm{T}}P$;

(C) 存在实可逆阵 P 使 $A = P^{\mathrm{T}}P$;　　(D) 存在矩阵 B 使 $A = B^{\mathrm{T}}B$.

3. 设 A 是3阶方阵，A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，A 的特征值是 2，-2，1，则 $|A|^{-1}(A_{11}+A_{22}+A_{33})$ 的值为　　【　】

(A) 1;　　(B) -1;　　(C) 2;　　(D) -2.

4. 设 α_1,α_2 是 n 维向量，令 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$, $\beta_2=-\alpha_1+2\alpha_2$, $\beta_3=5\alpha_1+2\alpha_2$，则有　　【　】

(A) β_1,β_2,β_3 必线性无关;

(B) β_1,β_2,β_3 必线性相关;

(C) 仅当 α_1,α_2 线性无关时，β_1,β_2,β_3 线性无关;

(D) 仅当 α_1,α_2 线性相关时，β_1,β_2,β_3 线性相关.

5. 设 A 为 n 阶矩阵，α 为 n 维列向量.若 $R\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}=R(A)$，则对于下列方程组必有　　【　】

(A) $AX=\alpha$ 必有无穷多解;　　(B) $AX=\alpha$ 必有唯一解;

(C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}=0$ 只有零解;　　(D) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}=0$ 必有非零解.

三、(本题5分)

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & t-1 & -2 \end{pmatrix}$，3阶非零方阵 B 满足 $AB=0$，求 t 的值.

四、(本题5分)

求过点 $(-1,2,3)$，垂直于直线 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$，且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

（本题6分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & a & a\\ 1 & a & 0 & 1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$，已知齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间是 2 维的，求 a 及 $AX=b$ 的通解.

六、（本题6分）

设 A 为 3 阶实对称矩阵，A 有 0 特征值，X 为 3 维列向量，且线性方程组 $AX=3X$ 的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

(1) 用正交变换化二次型 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 为标准形，并求出所用的正交变换矩阵；

(2) $f(X)=1$ 表示空间中何种二次曲面.

七、（本题5分）

已知 A 与 B 相似，且 $A^2=E$，证明 $B^2=E$.

八、（本题3分）

设 n 阶矩阵 A 的非零互异特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，对应的特征向量分别为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$，又有齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$，试问：当 $1\le m\le s$ 时，向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m,\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_m+\eta_m$ 是否线性无关，证明你的结论.

参考答案

一、填空题

1、n. 2、2. 3、$\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_2\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_3\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n\end{pmatrix}$. 4、B. 5、$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2+z^2}{9}=1$.

二、选择题

1、B.　　2、C.　　3、A.　　4、B.　　5、D.

三、解：

$$\because B \neq 0, \; r(B) \geq 1,$$

$$AB = 0, \; r(A) + r(B) \leq 3, \therefore r(A) \leq 2.$$

$$\therefore |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & t-1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore t = 0.$$

四、解：所求直线 L 的方向向量 $s \perp s_0$，$s \perp n$.

所以 $s = (4,5,6) \times (7,8,9) = (-3,6,-3)$

所求直线方程为 $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$

五、解：(1) $\because r(A) = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a & a \\ 1 & a & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a & a \\ 1 & a-2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & (a-1)^2 & (a-1)^2 \end{pmatrix},$$

$$\therefore a = 1.$$

$$(2)(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{为任意常数.}$$

六、解：(1) 已知 $\xi_1 = (1,1,0)^T$，$\xi_2 = (1,0,1)^T$ 是 A 的属于特征值 3 的特征向量，

设 $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ 是 A 的属于特征值 0 的特征向量. 因 A 实对称知 X 与

$_1=(1,1,0)^T$; $\xi_2=(1,0,1)^T$ 正交，即

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1+x_3=0\end{cases}$$

解得 $\xi_3=(1,-1,-1)^T$, 规范化得：$\eta_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$

将 ξ_1,ξ_2 规范正交化得 $\eta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$，$\eta_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T$。

令 $P=(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则 P 为正交矩阵，

数学建模

Q群636683950

在正交变换 $X=PY$ 下，

$$f(X)=X^TAX=3y_1^2+3y_2^2.$$

(2) $f(X)=X^TAX=3y_1^2+3y_2^2=1$ 表示空间中的圆柱面

七、证：因 A,B 相似，所以存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$

$$B^2=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=P^{-1}A^2P=P^{-1}P=E.$$

八、证：设 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_m\xi_m+l_1(\xi_1+\eta_1)+l_2(\xi_2+\eta_2)+\cdots+l_m(\xi_m+\eta_m)=0$　　(1)

$$(k_1+l_1)\xi_1+(k_2+l_2)\xi_2+\cdots+(k_m+l_m)\xi_m+l_1\eta_1+l_2\eta_2\cdots+l_m\eta_m=0$$

因 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，用 A 在左边乘（1）式两边得

$$l_1A\eta_1+l_2A\eta_2\cdots+l_mA\eta_m=0$$
$$l_1\lambda_1\eta_1+l_2\lambda_2\eta_2\cdots+l_m\lambda_m\eta_m=0$$

网盘计划

Q群953062322

而由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 线性无关及 $\lambda_i\neq0\Rightarrow l_1=l_2=\cdots=l_m=0$，

由（1）知

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_m\xi_m=0$$

由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 是基础解系，从而线性无关，于是 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$.

故 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m,\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots\xi_m+\eta_m$ 线性无关.

哈尔滨工业大学2007级《代数与几何》期末试题及答案

（此卷满分50分）

注：本试卷中$R(A)$、A'、A^*分别表示A的秩，A的转置矩阵、A的伴随矩阵；E表示单位矩阵.

一、填空题（每小题2分，共10分）

1. 若矩阵A满足$A^2-4A+4E_n=0$，则A的特征值只能是________.

2. 在空间直角坐标系中方程$x^2+4y^2-z^2+16=0$的图形是________.

3. 向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}$的秩为________.

4. 若矩阵$A_{n\times n}$，$B_{n\times m}$满足$AB=B$，B是行满秩阵，则$A=$________.

5. 空间直角坐标系中曲线$\begin{cases}z=2y^2\\x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周，所生成的旋转曲面的方程为________.

二、选择题（每小题2分，共10分）

1. 设A是$m\times n$矩阵，则方程组$AX=\beta$有唯一解的充要条件是　　【　】

（A）$R(A)=R(A\vdots\beta)=n$；　　（B）$R(A)=n$；

（C）$R(A)=R(A\vdots\beta)$；　　（D）$R(A)=R(A\vdots\beta)<n$.

2. 设有n维列向量组（I）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由向量组（II）$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示，则　　【　】

（A）若（I）线性无关，则（II）线性无关；

（B）若（I）线性相关，则（II）线性相关；

（C）若（I）线性无关，则$s\le t$；　　（D）若（II）线性无关，则$s\le t$.

3. 设$A^2=E_n$，则必有　　【　】

（A）A是正交阵；　　（B）A是正定阵；

（C）A是对称阵；　　（D）$R(A+E)+R(A-E)=n$.

4. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_3)^2+x_2^2+(x_1+x_2+ax_3)^2$ 正定的充要条件是 【　】

(A) $a>1$；　(B) $a\neq 1$；　(C) $a<1$；　(D) $a=1$.

5. 设 A,B 都是 n 阶实对称矩阵，则下列结论正确的是 【　】

(A) 若 A 与 B 等价，则 A 与 B 相似；　(B) 若 A 与 B 相似，则 A 与 B 合同；

(C) 若 A 与 B 合同，则 A 与 B 相似；　(D) 若 A 与 B 等价，则 A 与 B 合同.

三、(本题5分)

已知列向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的基，$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$\alpha_2=-\varepsilon_2$，$\alpha_3=\varepsilon_2-\varepsilon_3$，也是 $\mathbb{R}^3$ 的基，求由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵，并求 $\beta=2\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

大物实验群
290028380

四、(本题5分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&x&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 与 $D=\begin{pmatrix}y&&\\&5&\\&&z\end{pmatrix}$ 相似，求 x,y,z.

五、(本题6分)

已知 $A^*B=E_4+B$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$，求 B.

六、(本题6分)

已知三阶实对称矩阵 A 的每行元素之和都等于2，且秩 $R(2E+A)=1$.

(1) 用正交变换将二次型 $f(X)=X'AX$ 化为标准形，并求所用的正交变换矩阵；

(2) 求 A^m，其中 m 是大于等于1的自然数.

七、(本题5分)

设 A 是 n 阶方阵，$R(A)=1$，试证：若存在自然数 m 使 $A^m=0$，则 $A^2=0$.

八、(本题3分)

设实矩阵 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n)_{m\times n}$，$R(A)=n$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 A 的列向量组. 实向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m-n}$ 是齐次线性方程组 $A'X=0$ 的基础解系. 试证：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m-n}$ 线性无关.

参考答案

一、填空题

1、2. 2、双叶双曲面. 3、$\begin{cases}2, & t=2,\\ 3, & t\neq 2.\end{cases}$ 4、E_n. 5、$z=2(x^2+y^2)$.

二、选择题

1、A. 2、C. 3、D. 4、B. 5、B.

三、解：由 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$

知由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$\beta=2\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为

$$Y=C^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$$

四、解：由 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&x&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 与 $D=\begin{pmatrix}y&&\\&5&\\&&z\end{pmatrix}$ 相似，知5是 A 的特征值，所以

$$\left|5E_3-A\right|=\begin{vmatrix}4&-2&-2\\-2&5-x&-2\\-2&-2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-2&-2\\-2&5-x&-2\\0&1-x&0\end{vmatrix}=12(x-1)=0,\quad x=1.$$

进而，$|A|=5$, $\mathrm{tr}(A)=3$. 由此得

$$\begin{cases}5yz=5,\\ y+z+5=3.\end{cases}$$

解得 $y=z=-1$.

五、解：$|A|=\begin{vmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{vmatrix}=1$. 由 $A^*B=E_4+B$，得 $B=A+AB$，

整理得 $(E-A)B=A$. 由

$$E-A=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}，知 E-A 可逆，$$

且
$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

故

$$B=(E-A)^{-1}A=(E-A)^{-1}[E-(E-A)]=(E-A)^{-1}-E=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}.$$

六、解：(1) 因 A 的每行元素之和都等于 2，所以 $(1,1,1)'$ 是 A 的属于特征值 2 的特征向量. 因 $R(2E+A)=1$，所以 -2 是 A 特征值，对应于 -2 有两个线性无关的特征向量.

设 $X=(x_1,x_2,x_3)'$ 是 A 的属于特征值 -2 的特征向量. 因 A 实对称知 X 与 $(1,1,1)'$ 正交，即

$$x_1+x_2+x_3=0,$$

解得 $T_1=(1,-1,0)'$，$T_2=(1,0,-1)'$ 是 A 的属于特征值 -2 的特征向量，规范正交化得

$$P_1=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0)',\ P_2=(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3})'.$$

将 A 的属于特征值 2 的特征向量 $(1,1,1)'$ 规范正交化得 $P_3=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})'$.

哈尔滨工业大学2006级《代数与几何》期末试题

（此卷满分 50 分）

注：本试卷中 $R(A)$、A'、A^* 分别表示 A 的秩，A 的转置矩阵、A 的伴随矩阵；E 表示单位矩阵.

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 若4阶方阵 A 的特征值为 0,1,2,3，且 A 与 B 相似,则行列式 $|B^2+E|=$ ________

2. 过点 $(-1,2,3)$，垂直于直线 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$ 且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程为________________

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是3维欧氏空间的标准正交基，则模 $|\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3|=$ ________

4. 若 A 为 4 阶方阵，且 $R(A)=3$，则方程组 $A^*X=0$ 的基础解系含________个线性无关的解向量.

5. yOz 坐标面上的抛物线 $\begin{cases} z^2=y \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周，所生成的旋转曲面的方程为________

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则线性方程组 $AX=b$ 有解的充分条件是 【 】

（A）$R(A)=m$； （B）A 的行向量组线性相关；

（C）$R(A)=n$； （D）A 的列向量组线性相关.

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 正定的充要条件为 【 】

（A）$t>1$； （B）$t>0$； （C）$t>-1$； （D）$t>\dfrac{1}{2}$.

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 6 & 2 & \\ 2 & 6 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 4 & 1 & \\ & 4 & 1 \\ & & 8 \end{pmatrix}$. 则 A 与 B 【 】

（A）A 与 C 相似且合同； （B）A 与 B 相似且合同；

（C）B 与 C 相似且合同； （D）B 与 C 相似但不合同.

4. 设 α,β 是 4 维非零列向量，$A=E+\alpha\beta^{T}$，则在 A 的特征值中，至少有 【 】

(A) 1个1；　　(B) 2个1；　　(C) 3个1；　　(D) 4个1.

5. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是3维向量，则下列命题正确的为　　【　】

(A) 如果α_1,α_2线性相关，α_3,α_4线性相关，则$\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_4$线性相关；

(B) 如果$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\alpha_1+\alpha_4,\alpha_2+\alpha_4,\alpha_3+\alpha_4$线性无关；

(C) 如果α_4不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；

(D) 如果α_3不能由α_1,α_2线性表示，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

三、(本题5分)

求过点$(3,1,-2)$且过直线$\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$的平面方程.

四、(本题5分)

设向量组：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\a-3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\a\\6\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$

求：(1) a为何值时，该向量组的秩等于3.

(2) 求该向量组的一个极大无关组.

(3) 用所求的极大无关组表示其余向量.

五、(本题5分)

当a等于何值时，方程组$\begin{cases}ax_1-x_2-x_3=1,\\-x_1+ax_2-x_3=-a,\\-x_1-x_2+ax_3=a^2.\end{cases}$无解，有唯一解，有无穷多解？当有无穷多解时，写出通解.

六、(本题5分)

已知实二次型$f(x,y,z)=3x^2+3y^2+2xy+4xz-4yz$，

1. 写出f的矩阵；

2. 求正交变换$X=PY$，将f化为标准形，并写出所用的正交矩阵P；

3. 方程$f(x,y,z)=1$表示空间直角坐标系中何种二次曲面.

七、(本题5分)

设n阶矩阵A正定，X是任意n维非零列向量. 证明：秩$\begin{pmatrix} A & X \\ X^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} = n+1$.

八、(本题5分)

设A，B是n阶矩阵，$f(\lambda)=|\lambda E-B|$是B的特征多项式. 证明:矩阵$f(A)$可逆的充分必要条件为B的特征值都不是A的特征值.

数学建模
Q群636683950

参考答案

一、填空题

1.100　　2.x+1=y-1/-2=z-3　3.3　4.3　5.y= x^2+z^2

二、选择题

1.A　2.D　3.B　4.C　5.C

三、解：因为 $\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}=8\vec{i}-9\vec{j}-22\vec{k}$

所以 $8(x-3)-9(y-1)-22(z+2)=0$

故所求的平面方程为 $8x-9y-22z-59=0$

四、因为

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & a & 2 \\ 2 & 2 & a-3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{a=3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以（1）$a=3$ 时该向量组的秩等于3；

（2）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 为向量组的一个极大无关组；

(3) $\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$，

五、解：因为 $|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}=(a-2)(a+1)^2$

所以（1）当 $a\neq 2$ 且 $a\neq -1$ 时，此方程组有唯一解；

（2）当 $a=2$ 时，$R(A)=2<R(A\vdots\beta)=3$，此方程组无解；

（3）当 $a=-1$ 时，$(A\vdots\beta)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R(A)=R(A\vdots\beta)=1<3$，此方程组有无穷多解；

$$X=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}，（k_1,k_2 为任意常数）$$

六、解：1．f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

2．（1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-3 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda+2)$

矩 A 特征值为 4,4,−2．

（2）对 $\lambda=4$，解 $(4E-A)X=0$．得 A 的属于特征值 4 的特征向量为

$$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}，标准正交化得：P_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

对 $\lambda=-2$，解 $(-2E-A)X=0$．得 A 的属于特征值 −2 的特征向量为

$$\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}，标准正交化得：P_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

（3）令 $P=\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ 为正交阵.

则正交变换 $X=PY$ 使二次型 f 化为标准形 $f=4x_1^2+4y_1^2-2z_1^2$

方程 $f(x,y,z)=1$，即 $4x_1^2+4y_1^2-2z_1^2=1$，

表示空间直角坐标系中的旋转单叶双曲面。

七、证：因为 $\begin{pmatrix}E & 0\\ -X^{\mathrm{T}}A^{-1} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & X\\ X^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & X\\ 0 & -X^{\mathrm{T}}A^{-1}X\end{pmatrix}$

又因为 A 正定，所以 A^{-1} 也正定，则

$$\begin{vmatrix}A & X\\ X^{\mathrm{T}} & 0\end{vmatrix}=|A||-X^{\mathrm{T}}A^{-1}X|\neq 0，$$

故秩 $\begin{pmatrix}A & X\\ X^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}=n+1$.

八、证法1：设 $\lambda_i(i=1\sim n)$ 是矩阵 B 的特征值，则

$$f(\lambda)=|\lambda E-B|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$$

$$f(A)=\prod_{i=1}^{n}(A-\lambda_i E)$$

$$|f(A)|=\prod_{i=1}^{n}|A-\lambda_i E|$$

所以

$f(A)$ 可逆 $\Leftrightarrow |f(A)|\neq 0 \Leftrightarrow |\lambda_i E-A|\neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i, i=1\sim n$ 都不是 A 的特征值.

证法 2：必要性

设 $\lambda_i(i=1\sim n)$ 是方阵 B 的特征值，设 $\mu_i(i=1\sim n)$ 是方阵 A 的特征值.

反证法　如果存在一个 B 的特征值也是 A 的特征值，不妨设 $\mu_1=\lambda_1$.

而 $f(\mu_i)(i=1\sim n)$ 又是 $f(A)$ 的特征值. 则

$$
\begin{aligned}
|f(A)| &= f(\mu_1)f(\mu_2)\cdots f(\mu_n)=|\mu_1E-B||\mu_2E-B|\cdots|\mu_nE-B| \\
&=|\lambda_1E-B||\mu_2E-B|\cdots|\mu_nE-B|.
\end{aligned}
$$

所以

$f(A)$ 可逆 $\Rightarrow|\lambda_1E-B||\mu_2E-B|\cdots|\mu_nE-B|\neq0$，而与 $|\lambda_1E-B|=0$ 矛盾.

故 $f(A)$ 可逆一定有 B 的特征值都不是 A 的特征值.

充分性

反证法　如果 $f(A)$ 不可逆，则由

$$|f(A)|=f(\mu_1)f(\mu_2)\cdots f(\mu_n)=|\mu_1E-B||\mu_2E-B|\cdots|\mu_nE-B|,$$

知，右端至少存在一个行列式等于零，不妨设为 $|\mu_1E-B|=0$

即说明方阵 A 的特征值中至少有一个也是 B 的特征值.

所以，如果方阵 B 的特征值都不是 A 的特征值,则矩阵 $f(A)$ 可逆.

哈工大网盘计划简介

1.项目初衷

鉴于（1）哈工大各类 QQ 群内学习资料多且繁杂，而文件文字太多会导致文件被 tx 屏蔽或者降低 QQ 群信用星级；（2）校内诚信复印和纸张记忆垄断；（3）很多营销号在卖资料且售价很高；（4）学长学姐的自编材料很好，还想分享给下一届；等问题，网盘计划应运而生！哈尔滨工业大学网盘计划**旨在将窝工的各类学习资料进行归类整理，并且以网盘的形式发出来**，历时一年，现已小成，扫描了上百份校内复印店试题文档，归类整理了近 40 个 G 的学习资料给大家，已经花费上千元，现入不敷出，如果您希望网盘计划继续运营下去的话，可通过以下方式进行捐赠。

QQ支付

推荐使用微信支付

2.网盘计划成就（密码 1920）

哈工大网盘计划

密码1920

微信公众号二维码

群名称:哈工大网盘计划（预）

群　号:953062322

腾讯自动屏蔽以上链接，请用浏览器扫一扫

心得 体会 拓广 疑问

综合练习 100 题

一、填空题

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{AA}'=\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\underline{0}$.

2. 若 4 阶行列式 D 的某一行的所有元素及其余子式都相等，则 $D=\underline{0}$.

3. 在一个 n 阶行列式中，如果等于零的元素多于 n^2-n 个，那么这个行列式 $D=\underline{0}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，若 $m>n$，则 $|\boldsymbol{AB}|=\underline{0}$.

5. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$，$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{B}=\underline{\boldsymbol{0}}$.

6. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}=\underline{\boldsymbol{E}}$.

7. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'=\underline{\boldsymbol{E}}$.

8. 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=1$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $|3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=\underline{-3^{n-1}}$.

9. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}|=0$，$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$，则 $R(\boldsymbol{A})=\underline{n-1}$.

10. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=1$，$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=2$，则 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{vmatrix}=\underline{2}$.

11. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$.

12. $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，则 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\end{vmatrix}=\underline{(-1)^{mn}ab}$.

13. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\underline{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})}$.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，其特征值为 $3,-1,2$，则 $|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}|=\underline{100}$.

15. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&1\\0&1&-1&0&0&1\\0&0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&-1&1\\-1&0&0&0&1&a\end{pmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{A})=\underline{\begin{cases}4, & \text{当 } a=-4 \text{ 时}\\5, & \text{当 } a\neq -4 \text{ 时}\end{cases}}$.

16. 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和都等于 0，且 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，则 $\boldsymbol{AX}=$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$\mathbf{0}$ 的通解为$k(1,1,\cdots,1)'$,k 为任意常数.

17. 矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 满足 $m<n$,$|\boldsymbol{AA}'|\neq\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系一定由$n-m$ 个线性无关的解向量构成.

18. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是0 或 1 或 -1.

19. 如果 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,-1)'$ 是方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量,则$a=-3$;$b=0$.

20. 已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,且 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}$,则 $|\lambda\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}|=$ $3(\lambda-1)(3\lambda-1)$.

21. 已知 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 的特征值为 1,2,3,则 $|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^*|=\frac{7^3}{6}$.

22. 已知 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,则 $|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}|=0$.

23. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量,$\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha\beta}'$ 的特征值为0(n 重).

24. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,则0 一定是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

25. 直线$\begin{cases}10x+2y-2x=27\\x+y-z=0\end{cases}$的单位方向向量为$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.

26. 已知 $D=\begin{vmatrix}2&7&6&8\\4&4&4&4\\2&4&7&9\\8&1&8&8\end{vmatrix}$,$A_{41},A_{42},A_{43},A_{44}$ 为 D 中第 4 行元素的代数余子式,则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0$.

27. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵,$\boldsymbol{X}$ 是 3 维列向量,使得 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{AX},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$ 线性无关,且 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$,记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{AX},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X})$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$.

28. 若两个非零几何向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

29. 直线 L:$\begin{cases}x+2y-z-6=0\\2x-y+z-1=0\end{cases}$的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{8}{5}-t\\y=\frac{11}{5}+3t\\z=5t\end{cases}$.

30. 圆$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0\\2x+2y+z+1=0\end{cases}$的半径 $R=3$.

二、选择题

1. 设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,则 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解的充要条件是(C).

年 月 日

(A)$r=n$

(B)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关

(C)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

(D)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是(C).

(A) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解

(B) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解

(C) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

(D)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的任两解之和还是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解

3. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的系数行列式为零，则(C).

(A) 方程组有无穷多解

(B) 方程组无解

(C) 若方程组有解，则有无穷多解

(D) 方程组有唯一解

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，对于线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$，下列结论正确的是(A).

(A) 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 m，则方程组有解

(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于 n，则方程组有无穷多解

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 n，则方程组有唯一解

(D) 若 $m>n$，则方程组无解

5. 设 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 3，则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为(C).

(A)3　　(B)4　　(C)0　　(D)2

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$n>2$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则下列结论正确的是(B).

(A)$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|$

(B) 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$

(C)$\boldsymbol{A}^*=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$

(D)$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^*)$

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}$ 非零，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则必有(D).

(A)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$　(B)$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$　(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$　(D) $|\boldsymbol{B}|=0$

8. 设有两个平面方程

$$\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

$$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2y+d_2=0$$

如果 $R\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$，则一定有(D).

(A)π_1 与 π_2 平行　　(B)π_1 与 π_2 垂直

(C)π_1 与 π_2 重合　　(D)π_1 与 π_2 相交

年　月　日

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征根，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征根之一是(D).

(A)λ^{n-1}　(B)$\lambda\ |\boldsymbol{A}|$　(C)λ　(D)$\lambda^{-1}\ |\boldsymbol{A}|$

10. n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的(B).

(A) 充分必要条件

(B) 充分而非必要条件

(C) 必要而非充分条件

(D) 既非充分条件也非必要条件

11. 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与某对角阵相似，则(C).

(A)$\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值

(B)$\boldsymbol{A}$ 一定是 n 阶实对称阵

(C)$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

(D)$\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量正交

12. 下列说法正确的是(D).

(A) 若有全不为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

(B) 若有一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\boldsymbol{0}$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

(C) 若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关

(D) 任意 4 个 3 维几何向量一定线性相关

13. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，满足：对任意 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 都有 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$，下列结论中正确的是(D).

(A) 若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

(B) 若 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}$

(C) 若 $\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

(D) 若 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

14. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵，则必有(B).

(A)$\boldsymbol{AB}$ 正定　(B)$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$ 正定　(C)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 正定　(D)$k\boldsymbol{A}$ 正定

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则(C).

(A)$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵　(B)$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵

(C) $(\boldsymbol{A}^*)^2=\boldsymbol{E}$　(D)$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=n^2$

16. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，下列结论中错误的是(D).

(A) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆，则 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}$ 也可逆

(B) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也是实对称正定矩阵

(C) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正交矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵

(D) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是实对称矩阵

17. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，下列结论中错误的是(B).

(A) 若 $\boldsymbol{A}$ 经列的初等变换化成 $\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$

(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 经行的初等变换化成 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}$

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 经行的初等变换化成 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解

(D) 若 $\boldsymbol{A}$ 经列的初等变换化成 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

18. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则必有(C).

(A) $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$ (B) $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$

(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ (D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

19. 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则(B).

(A) $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ (B) $|\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}|$

(C) $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{B}^*$ (D) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}$

20. 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则(D).

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆 (B) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ (D) $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$ 时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 不可逆

21. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(A).

(A) 合同且相似 (B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似 (D) 不合同且不相似

22. 实二次型 $f=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}$ 为正定二次型的充要条件是(C).

(A) f 的负惯性指数是 0

(B) 存在正交阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}$

(C) 存在可逆阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}$

(D) 存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$

23. 设 $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$，则下列结论中错误的是(D).

(A) 线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 正定

(B) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$

(C) $\boldsymbol{A}$ 的特征值大于等于 0

(D) $R(\boldsymbol{B})=m\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 正定

24. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$，则 $|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}^{-1}|$ 等于(C).

(A) a (B) $\dfrac{1}{a}$ (C) a^{n-2} (D) a^n

25. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，则必有(D).

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|^{-1}$

年 月 日

(B) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}$

(C) $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$

(D) $|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{BA}|$

26. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为(B).

(A) $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2}{2}$

(B) $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}$

(C) $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+\boldsymbol{\eta}_1$

(D) $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)$

27. 设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$，则 L_1 与 L_2 的夹角为(C).

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

28. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维列向量，且 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$ 等于(D).

(A) $m+n$　　(B) $-(m+n)$　　(C) $m-n$　　(D) $n-m$

29. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异($n>2$)，则(C).

(A) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$

(B) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$

(C) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$

(D) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$

30. 设矩阵 $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$ 的秩是 3，则直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$(A).

(A) 相交于一点　　(B) 重合　　(C) 平行但不重合　　(D) 异面

三、计算题

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^5$ 及 $|\boldsymbol{A}^{10}|$.

解　由

年　月　日

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & \lambda+1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & \lambda+1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3(\lambda+4)$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,\lambda_4=-4$.

对 $\lambda=0$,由 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=\boldsymbol{0}$,可解得三个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0,0)',\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1,0)',\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,0,-1)'$$

对 $\lambda=-4$,由 $(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=\boldsymbol{0}$,可解得特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_4=(1,-1,-1,1)'$$

令

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_3\boldsymbol{T}_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&-4\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{TD}$,得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{TDT}^{-1},\boldsymbol{T}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{T}|}\boldsymbol{T}^*=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\1&-1&-1&-3\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\1&-1&-1&-3\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\times\frac{1}{4}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{TD}^5\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&-4^5\end{pmatrix}\times$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\1&-1&-1&-3\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=2^8\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}=2^8\boldsymbol{A}$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

又 $\mathbf{A}^{10}=2^{16}\mathbf{A}^2$，$|\mathbf{A}^{10}|=|2^{16}\mathbf{A}^2|=2^{64}|\mathbf{A}^2|=2^{64}|\mathbf{A}|^2=0$.

2. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\a&0&c\\b&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

(1) a,b,c 满足什么条件时，$\mathbf{A}$ 的秩是 3；

(2) a,b,c 取何值时，$\mathbf{A}$ 是对称矩阵；

(3) 取一组 a,b,c，使 $\mathbf{A}$ 为正交阵.

解 (1) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\a&0&c\\b&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a&0&c\\0&1&0\\2b&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a-2bc&0&0\\0&1&0\\2b&0&1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}a-2bc&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

当 $a\neq 2bc$ 时，$\mathbf{A}$ 的秩是 3.

(2)

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix}0&a&b\\1&0&0\\0&c&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

要想 $\mathbf{A}$ 成为对称矩阵，应满足

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}'$$

即

$$a=1,b=c=0$$

(3) 要想 $\mathbf{A}$ 为正交阵，应满足

$$\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{E}$$

即

$$\begin{pmatrix}0&a&b\\1&0&0\\0&c&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\a&0&c\\b&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

亦即

$$\begin{cases}a^2+b^2=1\\ac+\frac{1}{2}b=0\\c^2+\frac{1}{2}=1\end{cases}$$

解得

$$a=\frac{1}{2},b=-\frac{\sqrt{3}}{2},c=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

3. 设有三维列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$$

问 λ 取何值时：

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一；

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表达式不唯一；

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解法1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}$$

由

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}0&-\lambda&-\lambda(\lambda+2)&-\lambda^2(\lambda+1)\\0&\lambda&-\lambda&\lambda(1-\lambda)\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}0&0&-\lambda^2-3\lambda&\lambda(1-2\lambda-\lambda^2)\\0&\lambda&-\lambda&\lambda(1-\lambda)\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda^2\\0&\lambda&-\lambda&\lambda(1-\lambda)\\0&0&-\lambda(\lambda+3)&\lambda(1-2\lambda-\lambda^2)\end{pmatrix}$$

(1) 当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$，此时 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一.

(2) 当 $\lambda=0$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1<3$，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式不唯一.

(3) 当 $\lambda=-3$ 时，$R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解法2 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}$$

则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3)$$

(1) 当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一.

(2) 当 $\lambda=0$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1<3$，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式不唯一.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

(3) 当 $\lambda=-3$ 时, $R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

4. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$$

对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$$

又

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$$

求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$($n$ 为正整数).

解 由于

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

又由于

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1=\lambda_1^n\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_2^n\boldsymbol{\xi}_2=2^n\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_3=\lambda_3^n\boldsymbol{\xi}_3=3^n\boldsymbol{\xi}_3$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}&=\boldsymbol{A}^n(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\\&=(\boldsymbol{\xi}_1,2^n\boldsymbol{\xi}_2,3^n\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2^n&3^n\\1&2^{n+1}&3^{n+1}\\1&2^{n+2}&3^{n+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$:

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;(2) 求 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

解 (1) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+5)=0.$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-5$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵, $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $1,1,-5$, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-5\end{pmatrix}$$

于是

年 月 日

$$T^{-1}A^{-1}T=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -\frac{1}{5}\end{pmatrix},T^{-1}(E+A^{-1})T=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

故 $E+A^{-1}$ 的特征值为 $2,2,\frac{4}{5}$.

6. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,k,1)'$ 是 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 的逆阵 A^{-1} 的特征向量,试求常数 k 的值.

解 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 A 的特征值为 λ 的特征向量,则 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,即

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ k\\ 1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\ k\\ 1\end{pmatrix}$$

亦即

$$\begin{cases}k+3=\lambda\\ 2k+2=\lambda k\end{cases}$$

解得

$$k^2+k-2=0$$

即 $k=1$ 或 -2.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$,已知线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,试求:

(1)a 的值;(2) 正交阵 P,使 $P'AP$ 为对角阵.

解 (1)$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & a & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ a & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & a & 1\\ 0 & a-1 & 1-a & 0\\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -2-a\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & a & 1\\ 0 & a-1 & 1-a & 0\\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & -2-a\end{pmatrix}$$

要使 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,必须

$$R(A)=R(B)<3$$

因此 $a=-2$.

(2) 此时

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

心得 体会 拓广 疑问

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 2\\ -1 & \lambda+2 & -1\\ 2 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$.

对于 $\lambda_1=0$,由

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{0}$$

得特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_2=3$,由

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}$$

得特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3=-4$,由

$$\begin{pmatrix}-4 & -1 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -4\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0}$$

得特征向量

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$$

此时 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵,并且 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AP}$ 为对角阵$\begin{pmatrix}0&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}$.

8. 已知线性方程组(I)$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=0\end{cases}$的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{12}\\b_{13}\\b_{14}\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}b_{21}\\b_{22}\\b_{23}\\b_{24}\end{pmatrix}$$

试求线性方程组(II)$\begin{cases}b_{11}y_1+b_{12}y_2+b_{13}y_3+b_{14}y_4=0\\b_{21}y_1+b_{22}y_2+b_{23}y_3+b_{24}y_4=0\end{cases}$的通解.

解 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}&b_{14}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}&b_{24}\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 为(I)的一个基础解系得 $\boldsymbol{AB}'=\boldsymbol{0}$. 由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关,所以 $R(\boldsymbol{B})=2$,又 $\boldsymbol{BA}'=\boldsymbol{0}$,所以

$$\boldsymbol{\eta}_1=(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14})',\boldsymbol{\eta}_2=(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24})'$$

是 $\boldsymbol{B}$ 的基础解系,通解为

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$$

k_1,k_2 为任意常数.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

9. 已知方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$$

有三个线性无关的解向量，求 a,b 的值及方程组的通解.

解 $$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&b-a&1+a\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&4-2a&b+4a-5&4-2a\end{pmatrix}$$

由于该非齐次线性方程组有三个线性无关的解向量，故

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta}),n-R(\boldsymbol{A})+1=3$$

其中 $n=4$. 于是

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=2$$

从而

$$a=2,b=-3$$

该方程组与方程组

$$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\x_2=x_3-5x_4-3\end{cases}$$

同解. 令

$$x_3=k_1,x_4=k_2$$

得该方程组的通解

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k_1+4k_2+2\\k_1-5k_2-3\\k_1\\k_2\end{pmatrix}$$

$$=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$，问当 k 为何值时，存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵，并求出一个 $\boldsymbol{P}$ 及相应的对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$.

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & 2\\ k & \lambda+1 & -k\\ -4 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 2\\ 0 & \lambda+1 & -k\\ \lambda-1 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & \lambda+1 & -k\\ 1 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)^2=0$$

解得特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-1$.

当 $\lambda=1$ 时

$$R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$$

$\boldsymbol{A}$ 有 1 个线性无关的特征向量.

当 $\lambda=-1$ 时

$$-1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 2\\ k & 0 & -k\\ -4 & -2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ k & 0 & -k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & \frac{k}{2} & -\frac{k}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵,所以

$$R(-1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$$

从而 $k=0$. 因此 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$,设对应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1$,由

$$\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & -2 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1=0$$

得

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,1)'$$

设对应于 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,由

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & -2 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$$

得

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,-2,0)',\boldsymbol{\xi}_3=(0,1,1)'$$

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆阵,相应的对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

11. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$,求 $\boldsymbol{B}$.

解 由

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$$

得

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$$

由于

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆,得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

12. 已知将 3 阶可逆阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行的 2 倍加到第 3 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$,求 $\boldsymbol{AB}^{-1}$.

解 令

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$$

由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 均可逆,故 $\boldsymbol{B}$ 可逆,所以

$$\boldsymbol{AB}^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

13. 设有线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3=0\\bx_1+ax_2+bx_3=0\\bx_1+bx_2+ax_3=0\end{cases}\quad (a,b\text{ 不全为 }0)$$

(1) a,b 为何值时方程组有非零解;

(2) 写出相应的基础解系及通解;

(3) 求解空间的维数.

解 (1) 齐次方程组有非零解的充要条件是系数行列式

$$\begin{vmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{vmatrix}=0$$

即

年　月　日

$$(a-b)^2(a+2b)=0$$

故 $a=b\neq 0$ 或 $a=-2b\neq 0$ 时,方程组有非零解.

(2) 当 $a=b\neq 0$ 时,方程组为

$$x_1+x_2+x_3=0$$

即

$$x_1=-x_2-x_3$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

通解为

$$k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数})$$

当 $a=-2b\neq 0$ 时,方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0\\x_1-2x_2+x_3=0\\x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$$

解得基础解系为

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

通解为

$$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(k\text{ 为任意常数})$$

(3) 当 $a=b\neq 0$ 时,解空间维数为 2;当 $a=-2b\neq 0$ 时,解空间维数为 1.

14. 设二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$$

经正交变换

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$$

化成

$$f=y_2^2+2y_3^2$$

其中

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)',\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,y_3)'$$

$\boldsymbol{P}$ 是 3 阶正交矩阵,求 a,b 及满足上述条件的一个 $\boldsymbol{P}$.

解 正交变换前后,二次型的矩阵分别为

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

故二次型可以写成

$$f=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

和

$$f=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$$

且

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似知

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$$

即

$$\lambda^3-3\lambda^2+(2-a^2-b^2)\lambda+(a-b)^2=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda$$

比较系数得

$$a=0,b=0$$

由

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0,1,2.

解方程组

$$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=\boldsymbol{0}$$

得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{P}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{|\boldsymbol{\xi}_1|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=\boldsymbol{0}$,得

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{\xi}_2$$

解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=\boldsymbol{0}$,得

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

年　月　日

单位化得

$$\boldsymbol{P}_3 = \frac{\boldsymbol{\xi}_3}{|\boldsymbol{\xi}_3|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}_1\ \boldsymbol{P}_2\ \boldsymbol{P}_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

15. 求直线 $L_1:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$ 的公垂线方程.

解 L_1 与 L_2 的标准式及参数形式分别为

$$L_1:\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1} \text{ 与 } \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

$$L_2:\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{0} \text{ 与 } \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-2 \end{cases}$$

L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(0,1,1)$,L_2 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(2,-1,0)$. 设 L_1 与 L_2 公垂线垂足为

$$A(1,t,t),B(2\lambda,-\lambda,-2)$$

则应有

$$\overrightarrow{AB}=(2\lambda-1,-\lambda-t,-2-t)$$

且

$$\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{s}_1=-\lambda-2t-2=0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{s}_2=5\lambda+t-2=0$$

解得

$$\begin{cases} t=-\frac{4}{3} \\ \lambda=\frac{2}{3} \end{cases}$$

所以

$$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(1,2,-2)$$

故公垂线方程为

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\frac{z-1}{1}=\frac{y+\frac{4}{3}}{2}=\frac{z+\frac{4}{3}}{-2}$$

16. 求直线 $L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi: x+2y-z=0$ 上的投影方程.

解 设通过直线 L 垂直于平面 π 的平面 π_0 的方程为

$$2x-y+z-1+\lambda(x+y-z+1)=0$$

π_0 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=(2+\lambda, -1+\lambda, 1-\lambda)$$

平面 π 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$$

由 $\pi_0\perp\pi$,知

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}=0$$

得

$$2+\lambda+2(-1+\lambda)-(1-\lambda)=0$$

解得 $\lambda=\frac{1}{4}$. 从而得 π_0 方程为

$$3x-y+z-1=0$$

所以所求直线 L_0 方程为

$$\begin{cases}3x-y+z-1=0\\x+2y-z=0\end{cases}$$

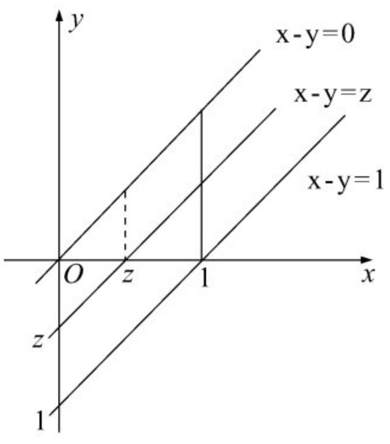


图 21

17. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求一个可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,所以有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$$

年 月 日

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-(5+a)\lambda^2+(5a+3)\lambda+6-6a$$

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-2)^2(\lambda-b)=\lambda^3-(b+4)\lambda^2+(4b+4)\lambda-4b$$

比较两式系数可得

$$\begin{cases}5a+3=4b+4\\ 6-6a=-4b\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=5\\ b=6\end{cases}$$

(2) 因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 6\end{pmatrix}$ 相似，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2，2，6

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

解

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 2 的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

解

$$(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 6 的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1\ \boldsymbol{\xi}_2\ \boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

18. 已知 3 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $3,2,-2$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{pmatrix}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 3,2 的特征向量，

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -2 的一个特征向量；

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 将二次型 $f=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{AX}$ 化为标准形.

解 (1) 设 -2 对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}$，则有

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{X})=0,(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{X})=0$$

可取

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

(2) 把特征向量规范正交化后得

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

则在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 下 f 化为 $f=3y_1^2+2y_2^2-2y_3^2$.

19. 已知二次型 $f=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，求 c 及此二次型对应矩阵的特征值，指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 代表三维几何空间中何种几何曲面.

解 二次型 f 所对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}$$

因 f 的秩为 2，即 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，故有 $|\boldsymbol{A}|=0$，所以 $c=3$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0$$

得特征值为 0,4,9. 与特征值相对应的单位特征向量分别为

$$\boldsymbol{P}_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)',\boldsymbol{P}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)',\boldsymbol{P}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)'$$

年 月 日

取正交变换阵

$$P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

则在正交线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 下，方程

$$f(x_1,x_2,x_3)=1$$

化为椭圆柱面

$$4y_2^2+9y_3^2=1$$

20. 设有数列 $a_0=0,a_1=1,a_2=a_0+a_1,a_3=a_2+a_1,\cdots,a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\cdots$，求 $a_{1\,000}$.

解法 1 由

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{pmatrix} a_{1\,000} \\ a_{999} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{999}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

并且

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

分别是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 的特征向量.

记

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^{999}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}^{999}\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000}\right] & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000}\times\frac{5-\sqrt{5}}{10}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000}\times\frac{5+\sqrt{5}}{10}\\ \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{999}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{999}\right] & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{999}\times\frac{5-\sqrt{5}}{10}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{999}\times\frac{5-\sqrt{5}}{10}\end{pmatrix}$$

所以

$$a_{1\,000}=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000}\right)$$

解法 2 考察

$$\widetilde{D}_n=\begin{vmatrix}1 & -1 & & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ & 1 & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 & -1\\ & & & & 1 & 1\end{vmatrix}$$

由行列式展开定理得

$$\widetilde{D}_n=\widetilde{D}_{n-1}+\widetilde{D}_{n-2}\,(n=3,4,\cdots)$$

补充定义 $\widetilde{D}_{-1}=0,\widetilde{D}_0=1$,于是

$$a_n=\widetilde{D}_{n-1}\,(n=0,1,\cdots) \tag{1}$$

为求 $\widetilde{D}_{999}$,引进辅助行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ & & & & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

将 D_n 按第一行展开可得

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n \tag{2}$$

由 α,β 的对称性可得

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n \tag{3}$$

若 $\alpha\neq\beta$,联立(2),(3)并解之

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} \tag{4}$$

若 $\alpha=\beta$,由(2) 或(3)

$$\begin{aligned}D_n=\alpha D_{n-1}+\alpha^n=\alpha(\alpha D_{n-2}+\alpha^{n-1})+\alpha^n=\cdots=\\(n-1)\alpha^n+\alpha^{n-1}D_1=(n+1)\alpha^n\end{aligned}$$

解

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\\alpha\beta=-1\end{cases}$$

得

$$\alpha_0=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\beta_0=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

由(1) 和(4) 知

$$a_{1\,000}=\widetilde{D}_{999}=\begin{vmatrix}\alpha_0+\beta_0 & \alpha_0\beta_0 & & & & \\ 1 & \alpha_0+\beta_0 & \alpha_0\beta_0 & & & \\ & 1 & \alpha_0+\beta_0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \alpha_0+\beta_0 & \alpha_0\beta_0 \\ & & & & 1 & \alpha_0+\beta_0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\alpha_0^{1\,000}-\beta_0^{1\,000}}{\alpha_0-\beta_0}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1\,000}\right]$$

四、证明题

1\. 证明 $D_n=\begin{vmatrix}6 & 9 & & & & \\ 1 & 6 & 9 & & & \\ & 1 & 6 & 9 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 6 & 9 \\ & & & & 1 & 6\end{vmatrix}=(n+1)3^n$($n$ 为正整数).

证 (1)$n=1$ 时,$D_1=6=(1+1)\times 3$.

(2) 假设当 $n\leqslant k$ 时结论成立,当 $n=k+1$ 时,若

$$k+1=2$$

由

$$D_2=\begin{vmatrix}6 & 9\\1 & 6\end{vmatrix}=36-9=27=(2+1)\times 3^2$$

知命题成立.

若 $k+1\geqslant 3$,将 D_{k+1} 按第一行展开得

年 月 日

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix}6 & 9 & & & \\ 1 & 6 & 9 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 6 & 9 \\ & & & 1 & 6\end{vmatrix}=6D_k-9D_{k-1}=6(k+1)3^k-9\times k\times 3^{k-1}$$

$$=(k+2)\times 3^{k+1}$$

由数学归纳法,对一切自然数 n 结论都成立.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵,证明:若存在大于等于 2 的自然数 m 使 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$.

证 因 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{0}$,所以 $|\boldsymbol{A}|^m=|\boldsymbol{A}^m|=0$,又 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵,故 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 1$. 所以 $\boldsymbol{A}$ 经初等变换可以化为

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

于是存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}(1\quad 0)\boldsymbol{Q}$$

取

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{V}'=(1\quad 0)\boldsymbol{Q}$$

则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}'$$

令 $\boldsymbol{V}'\boldsymbol{U}=k$,则

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}'=k\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}'=k\boldsymbol{A}$$

由 $\boldsymbol{A}^m=k^{m-1}\boldsymbol{A}=0$ 知 $k=0$,或者 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是幂等阵($\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$),试证:

(1)$\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 0;

(2)$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)=n$;

(3)$\boldsymbol{A}$ 可相似对角化;

(4)$R(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

证 (1) 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,则存在 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$. 于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}$$

由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 知,$\lambda^2\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$. 由 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda^2=\lambda$,故 $\lambda=1$ 或 0.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 知,$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$,于是

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n \tag{1}$$

由

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}_n$$

知

$$n=R(\boldsymbol{E}_n)\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) \tag{2}$$

年 月 日

综合(1),(2) 可得

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)=n$$

(3) 记

$$R(\boldsymbol{A})=r_1,R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)=r_2$$

当 $r_1=0$ 或 $r_2=0$ 时,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n$,命题显然成立. 以下设

$$r_1\neq 0,r_2\neq 0$$

由

$$r_1+r_2=n$$

知

$$0<r_1<n,0<r_2<n$$

取

$$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}$$

为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$$

的基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}$$

是

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

的基础解系,则

$$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r_1}$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量,故由

$$(n-r_1)+(n-r_2)=n$$

知 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r_1},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r_2}$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

(4) 由(1),(3) 可知存在可逆阵 $\boldsymbol{T}$ 使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \\ & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

于是 $R(\boldsymbol{A})=r=\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正定矩阵,证明:$\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于 0.

证 因 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 正定,则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$,使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P'}_1\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P'}_2\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P'}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P'}_2\boldsymbol{P}_2$$

$$\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P'}_1\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P'}_2=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P'}_2)'(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P'}_2)$$

因 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$ 可逆,则 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P'}_2$ 可逆,从而$(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2{}')'(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2{}')$ 正定,它的特征值全大于 0. 因 $\boldsymbol{AB}$ 与$(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2{}')'(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2{}')$ 相似,从而 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于 0.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,试证:

(1) 若 $\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关;

(2)$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解一定是 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解;

(3)$R(\boldsymbol{A}^{n+1})=R(\boldsymbol{A}^{n})$.

证 (1) 反证法:

若 $\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,则存在不全为零的数 $l_0,l_1,\cdots,l_k$,使

$$l_0\boldsymbol{\alpha}+l_1\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$$

设 l_i 是第一个不等于零的系数,即 $l_0=l_1=\cdots=l_{i-1}=0,l_i\neq 0$,则

$$l_i\boldsymbol{A}^{i}\boldsymbol{\alpha}+l_{i+1}\boldsymbol{A}^{i+1}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$$

两边乘以矩阵 $\boldsymbol{A}^{k-i}$,得

$$l_i\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}+l_{i+1}\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{2k-i}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}=0$,故对任意

$$m\geqslant k+1$$

都有

$$\boldsymbol{A}^{m}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$$

从而由上式得

$$l_i\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$$

但

$$\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$$

故 $l_i=0$ 与假设矛盾.

(2) 证明:假设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,但不是 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,即有

$$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}\text{ 但 }\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$$

由(1) 知 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关,与 $n+1$ 个 n 维向量 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关矛盾,故 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(3) 由(2) 知 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解一定是 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,且易知 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解一定是 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,所以方程 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 同解,所以 $R(\boldsymbol{A}^{n+1})=R(\boldsymbol{A}^{n})$.

6. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性无关,试证:向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_m,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m$$

线性无关.

证 假设有一组数 $l_1,l_2,\cdots,l_{m-1},l_m$ 使得

$$l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_{m-1}\boldsymbol{\beta}_{m-1}+l_m\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{0}$$

则有

$$l_1(\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_m)+l_2(\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_m)+\cdots+l_{m-1}(\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_m)+l_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

即

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+(l_1k_1+l_2k_2+\cdots+l_{m-1}k_{m-1}+l_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,所以

$$l_1=l_2=\cdots=l_{m-1}=l_1k_1+l_2k_2+\cdots+l_{m-1}k_{m-1}+l_m=0$$

所以

$$l_1=l_2=\cdots=l_{m-1}=l_m=0$$

年 月 日

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，m 为奇数，试证

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1$$

线性无关.

证 假设存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\beta}_{m-1}+k_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$$

则有

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+k_{m-1}(\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\boldsymbol{\alpha}_m)+k_m(\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

即

$$(k_1+k_m)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_{m-1}+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

又由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，所以

$$k_1+k_m=k_1+k_2=\cdots=k_{m-1}+k_m=0$$

因为 m 是奇数，所以线性方程组(1) 的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&1\\1&1&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{m+1}=2\neq0$$

$$\begin{cases}k_1+k_m=0\\k_1+k_2=0\\\quad\vdots\\k_{m-1}+k_m=0\end{cases}\tag{1}$$

故(1) 只有零解，所以

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

8. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，$n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个列向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$$

$$R(\boldsymbol{A})=n$$

问齐次线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 是否有非零解，证明你的结论.

证 当 n 为奇数时，齐次线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$，没有非零解. 当 n 为偶数时，$\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 有非零解.

由于 $R(\boldsymbol{A})=n$，所以 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

由上题知，当 n 为奇数时，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关，所以

$$R(\boldsymbol{B})=n$$

因此齐次线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 没有非零解.

但当 n 为偶数时，因

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n)-(\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$$

线性相关，所以 $R(\boldsymbol{B})<n$. 因此，齐次线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 有非零解.

9. 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于不同特征值的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\boldsymbol{\xi}_n$$

试证：$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个互不相同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$，则

$$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\boldsymbol{\xi}_n)=\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\boldsymbol{\lambda}_n\boldsymbol{\xi}_n$$

$$\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1^{n-1}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\lambda_n^{n-1}\boldsymbol{\xi}_n$$

设有一组数 $k_0,k_1,\cdots,k_{n-1}$，使得

$$k_0\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

即

$$\begin{aligned}&k_0(\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\boldsymbol{\xi}_n)+k_1(\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\xi}_n)+\cdots+\\&k_{n-1}(\lambda_1^{n-1}\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\lambda^{n-1}\boldsymbol{\xi}_n)=\mathbf{0}\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}(k_0+k_1\lambda_1+\cdots+k_{n-1}\lambda_1^{n-1})\boldsymbol{\xi}_1+(k_0+k_1\lambda_2+\cdots+k_{n-1}\lambda_2^{n-1})\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+\\(k_0+k_1\lambda_n+\cdots+k^{n-1}\lambda_n^{n-1})\boldsymbol{\xi}_n=0\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 线性无关，所以

$$\begin{cases}k_0+k_1\lambda_1+\cdots+k_{n-1}\lambda_1^{n-1}=0\\k_0+k_1\lambda_2+\cdots+k_{n-1}\lambda_2^{n-1}=0\\\qquad\vdots\\k_0+k_1\lambda_n+\cdots+k_{n-1}\lambda_n^{n-1}=0\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\lambda_n&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_0\\k_1\\\vdots\\k_{n-1}\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

又由于

$$\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\lambda_n&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0$$

所以

$$k_0=k_1=\cdots=k_{n-1}=0$$

即 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

10. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶实对称矩阵，试证 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等.

年 月 日

证 (1) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,记 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}$,则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}|=|\boldsymbol{T}^{-1}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{T}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$$

(2) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 因 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵,存在正交阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$$

即

$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1})=\boldsymbol{B}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵,证明当 $k>0$ 时,$k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 正定.

证 $$(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})'=(k\boldsymbol{E})'+(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})'=k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$$

即 $k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 是实对称阵. 对任意 n 维非零实列向量 $\boldsymbol{X}$,有

$$\boldsymbol{X}'(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=k(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

由于 $k>0$,所以 $k(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})>0$,又 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\geqslant 0$,所以

$$\boldsymbol{X}'(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}>0$$

即 $k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 正定.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵,证明

$$R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}')=R(\boldsymbol{A})$$

并举例说明 $\boldsymbol{A}$ 是复矩阵时,结论未必成立.

证 考察方程组

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

显然(2) 的解均为(1) 的解,因而

$$n-R(\boldsymbol{A})\leqslant n-R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})$$

即有

$$R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A}) \tag{3}$$

另一方面,对任意 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n$,如果 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})=0$,即

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})=0 \tag{4}$$

设

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$$

由(4) 知 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=0$,因为 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵,$\boldsymbol{X}$ 为实向量,故 a_i 均为实数,所以

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

即 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$,所以(1)的解也是(2)的解,故有

$$n-R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\leqslant n-R(\boldsymbol{A})$$

即

$$R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) \tag{5}$$

综合式(3),(5)知

$$R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$$

由 $R(\boldsymbol{A}')=R(\boldsymbol{A})$ 知

$$R(\boldsymbol{AA}')=R((\boldsymbol{A}')'\boldsymbol{A}')=R(\boldsymbol{A}')=R(\boldsymbol{A})$$

故有

$$R(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{AA}')=R(\boldsymbol{A})$$

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}'=(1,\mathrm{i})$,于是 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=0$,即 $\boldsymbol{A}$ 是复矩阵,结论不成立.

13. 若任意 n 维列向量都是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,试证:$\boldsymbol{A}$ 一定是标量矩阵.

证 先证 $\boldsymbol{A}$ 的任两个特征值都相等,否则,设 $\lambda_1,\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值,$\boldsymbol{X}\neq\mathbf{0}$,$\boldsymbol{Y}\neq\mathbf{0}$,使

$$\boldsymbol{AX}=\lambda_1\boldsymbol{X},\boldsymbol{AY}=\lambda_2\boldsymbol{Y}$$

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$,所以 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 线性无关

$$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\neq\mathbf{0}$$

依题意存在 k 使

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=k(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})$$

于是

$$(\lambda_1-k)\boldsymbol{X}+(\lambda_2-k)\boldsymbol{Y}=\mathbf{0},k=\lambda_1=\lambda_2$$

矛盾,故 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都相等,记为 λ.

令 $\boldsymbol{e}_j$ 为 n 阶单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 个列向量,$j=1,\cdots,n$,于是

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1\cdots\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_n)$$

由已知

$$\boldsymbol{Ae}_j=\lambda\boldsymbol{e}_j\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1\cdots\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_n)=\lambda(\boldsymbol{e}_1\cdots\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_n),\boldsymbol{AE}=\lambda\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵,试证:存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

证 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵,则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{D},\text{其中 }\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$$

令 $\delta_i=\sqrt{\lambda_i}(i=1,2,\cdots,n)$,则

年 月 日

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_1^2&&&\\&\delta_2^2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}$$

而

$$A=PDP^{-1}=P\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}P'$$

$$=P\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}P'P\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}P'$$

令

$$B=P\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}P'$$

易验证 B 为正定阵,且 $A=B^2$.

15. 设 α 是 n 维非零实列向量,证明:$E-\dfrac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'$ 为正交矩阵.

证 因为

$$\left(E-\frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'\right)'=E-\frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'$$

故

$$\left(E-\frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'\right)'\left(E-\frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'\right)$$

$$=\left(E-\frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'\right)\left(E-\frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'\right)$$

$$=E-\frac{4\alpha\alpha'}{\alpha'\alpha}+\frac{4}{(\alpha'\alpha)^2}\alpha(\alpha'\alpha)\alpha'=E-\frac{4\alpha\alpha'}{\alpha'\alpha}+\frac{4}{(\alpha'\alpha)^2}(\alpha'\alpha)(\alpha\alpha')$$

$$=E-\frac{4\alpha\alpha'}{\alpha'\alpha}+\frac{4\alpha\alpha'}{\alpha'\alpha}=E$$

因而 $E-\dfrac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'$ 为正交矩阵.

16. 设方程组 $AX=0$ 的解都是 $BX=0$ 的解,且 $R(A)=R(B)$,试证:

年 月 日

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解.

证 设 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 $n-r$ 个线性无关的向量,不妨设为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$. 有 $\boldsymbol{A\xi}_i=\boldsymbol{0}(i=1,\cdots,n-r)$.

又 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解必为 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解,从而

$$\boldsymbol{B\xi}_i=\boldsymbol{0}(i=1,\cdots,n-r)$$

因此 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 也是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解.

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 是 n 维列向量,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\beta}' & 0\end{pmatrix}$,若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解.

证 由于

$$R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta})\leqslant R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})$$
$$R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta})$$

所以 $R(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta})=R(\boldsymbol{A})$ 即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解.

18. 设

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})'\quad(i=1,2,\cdots,r,r<n)$$

是 r 个线性无关的 n 维实向量,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \qquad\vdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的实非零解向量. 试证:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

证 假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,由已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,必有

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r \tag{1}$$

又由 $\boldsymbol{\beta}$ 为方程组的解,从而

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i)=0\quad(i=1,\cdots,r)$$

于是

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r)=0$$

从而 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$,矛盾. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

19. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶正定矩阵,若 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量都是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量,则 $\boldsymbol{AB}$ 正定.

证 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶正定矩阵,因此 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 也必为实对称矩阵. 设 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个标准正交的特征向量,记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_n)$,则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix}k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n\end{pmatrix}$$

并且 $\lambda_i,k_i>0,(i=1,\cdots,n)$,所以

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{ABP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APP}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 k_1 & & & \\ & \lambda_2 k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n k_n\end{pmatrix}$$

且 $\lambda_i k_i > 0(i=1,\cdots,n)$. 再由 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}'$ 得$(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{AB}$,因此 $\boldsymbol{AB}$ 正定.

20. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,试证向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

证 设有一组数

$$k_0,k_1,\cdots,k_t$$

使得

$$k_0\boldsymbol{\beta}+k_1(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_t(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t)=\boldsymbol{0}$$

即

$$(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_t)\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\boldsymbol{0} \qquad (1)$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,所以 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 的线性组合,所以 $k_0+k_1+k_2+\cdots+k_t=0$,因此式(1)变为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关,所以 $k_1=k_2=\cdots=k_t=0$,进而 $k_0=0$,故向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

年 月 日

综合练习100题 填空选择详解， QQ 2842305604

一，填空题.

1. $AA'=E \Rightarrow |A||A'|=|E| \Rightarrow |A||A|=1$ 又 $|A|<0 \Rightarrow |A|=-1$

$|A+E| = |A+AA'| = |AE+AA'| = |A(E+A')| = |A||E+A'| = -|A'+E'| = -|A+E|$

$\Rightarrow |A+E|=0$

2. 设D的第i行所有元素及其余子式都相等， $a_{ij}=a$, $M_{ij}=M$, $1\le j\le 4$

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+a_{i4}A_{i4}$

$=a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}+a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2}+a_{i3}(-1)^{i+3}M_{i3}+a_{i4}(-1)^{i+4}M_{i4}$

$=(-1)^{i+1}aM+(-1)^{i+2}aM+(-1)^{i+3}aM+(-1)^{i+4}aM=0$

3. $D=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}\underline{a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}}$ ←不同行不同列元素的乘积

D中一共有 n^2 个元素，含 n^2-n 个为零，D中不存在不同行不同列的 n 个非零元，

所以 $D=0$

4. $A_{m\times n}$、$B_{n\times m}$ $R(AB)\le R(A)\le \min(m,n)=n<m$

AB 是 $m\times m$ 矩阵 $R(AB)<m \Rightarrow |AB|=0$

5. $AB=B \Rightarrow AB-B=0$ $(A-E)B=0$. $|A-E|\ne 0 \Rightarrow A-E$ 可逆

$(A-E)^{-1}(A-E)B=(A-E)^{-1}0 \Rightarrow B=0$

6. $A+AB=E$ $A(E+B)=E$ $A^{-1}=E+B$, $A^{-1}A=E \Rightarrow (E+B)A=E$

$\Rightarrow A+BA=E$

7. $ABC=E \Rightarrow (AB)C=E$, $C^{-1}=AB$ $CC^{-1}=E \Rightarrow C(AB)=E$

$(CAB)'=E' \Rightarrow B'A'C'=E$

8. 由 $|A^*|=|A|^{n-1}$ (A是n阶方阵) $|B^{-1}|=\frac{1}{|B|}$

$|3A^*B^{-1}|=3^n|A^*||B^{-1}|=3^n|A|^{n-1}|B|^{-1}=3^n1^{n-1}\frac{1}{(-3)}=-3^{n-1}$

9. $|A|=0$ $A_{n\times n}$. $\Rightarrow A$的n阶子式$=0$. $A^*\ne 0 \Rightarrow A$ 有 $n-1$ 阶非零子式.

A的非零子式的最大阶数为 $n-1$. 由秩的定义 $R(A)=n-1$

10. $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} A+B & O \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & E \\ B & A \end{pmatrix}\right|$

$=\begin{vmatrix} A+B & O \\ O & E \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E & E \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B|\begin{vmatrix} E & E \\ B & A \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+(-B)r_1} |A+B|\begin{vmatrix} E & E \\ O & A-B \end{vmatrix}$

$=|A+B||A-B|=1(2)=2$

11. $|A|=1(2)(3)=6\neq 0$ A可逆，由 $AA^*=|A|E$ $\quad \frac{A}{|A|}A^*=E \Rightarrow (A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$

$$(A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

12. $A_{m\times m}, B_{n\times n}$ $\quad \begin{vmatrix}O&A\\B&C\end{vmatrix} \xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j} (-1)^{mn}\begin{vmatrix}B&C\\O&A\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|B||A|=(-1)^{mn}ab$

13. $A^2+A-4E=0$ $\quad (A-E)(A+2E)=A^2+A-2E \Rightarrow (A-E)(A+2E)=4E-2E=2E$

$(A-E)\frac{A+2E}{2}=E. \Rightarrow (A-E)^{-1}=\frac{A+2E}{2}$

14. $f(A)=A^2+E$ 的特征值为 $f(\lambda)=\lambda^2+1$ 为 $3^2+1=10, (-1)^2+1=2, 2^2+1=5$.

$|A^2+E|=10(2)(5)=100$.（由特征值的性质）

15.
$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0&1\\0&1&-1&0&0&1\\0&0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&-1&1\\-1&0&0&0&1&a\end{bmatrix}\xrightarrow{r_5+r_1}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0&1\\0&1&-1&0&0&1\\0&0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&-1&1\\0&-1&0&0&1&a+1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_5+r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0&1\\0&1&-1&0&0&1\\0&0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&-1&1\\0&0&-1&0&1&a+2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_5+r_3}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0&1\\0&1&-1&0&0&1\\0&0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&-1&1\\0&0&0&-1&1&a+3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_5+r_4}\begin{bmatrix}\boxed{1}&-1&0&0&0&1\\0&\boxed{1}&-1&0&0&1\\0&0&\boxed{1}&-1&0&1\\0&0&0&\boxed{1}&-1&1\\0&0&0&0&0&a+4\end{bmatrix}\quad R(A)=\begin{cases}4 & a=-4\\5 & a\neq-4\end{cases}$$

16. A的各行元素和为0，于是

$A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\vec{0}$, $R(A)=n-1$. $A_{n\times n}$ $\Rightarrow \dim N(A)=n-(n-1)=1$. $AX=\vec{0}$ 的

基础解系只含有1个向量. 通解为 $k\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$. k为任意常数.

17. $A_{m\times n}$, AA'是$m\times m$矩阵. $|AA'|\neq 0$, $\Rightarrow R(AA')=m$

$R(A)\geq R(AA')=m$ 又A是$m\times n$矩阵. $R(A)\leq m$ $\Rightarrow R(A)=m$.

$\dim N(A)=n-R(A)=n-m$, 基础解系有$n-m$个解向量.

18. $A^3=A \Rightarrow A^3-A=0$, 若 $AX=\lambda X$. $X\neq 0$.

［一般地. $f(A)=0 \Rightarrow f(\lambda)=0$］

$(A^3-A)X=\vec{0}$

$A^3X-AX=\vec{0}$

$\lambda^3X-\lambda X=\vec{0}$ $\quad (\lambda^3-\lambda)X=\vec{0}$ $\quad X\neq 0 \Rightarrow \lambda^3-\lambda=0$ $\quad \lambda(\lambda^2-1)=0$

$\lambda=0, 1$ 或 -1.

19. $A\xi = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ a+2 \\ b+1 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ a = -3 \\ b = 0 \end{cases}$

20. A与B相似 ∃可逆阵 T 使得 $A = T^{-1}BT$

$|\lambda A^2 - A| = |\lambda(T^{-1}BT)^2 - T^{-1}BT| = |\lambda T^{-1}BTT^{-1}BT - T^{-1}BT|$

$= |T^{-1}\lambda B^2 T - T^{-1}BT|$

$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

$= |T^{-1}|\,|\lambda B^2 - B|\,|T|$

$= |\lambda B^2 - B|$

$= \left|\lambda\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right|$

$= \begin{vmatrix} 9\lambda-3 & 0 \\ 8\lambda-2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 3(3\lambda-1)(\lambda-1)$

21. 设 $AX = \lambda X$、$X \neq 0$ $A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$ $A^*X = \frac{|A|}{\lambda}X$

$\Rightarrow (A^{-1}+A^*)X = (\frac{1}{\lambda} + \frac{|A|}{\lambda})X$

A的特征值为 1.2.3. $A^{-1}+A^*$ 的特征值为 $1+6$, $\frac{1}{2}+\frac{6}{2}$, $\frac{1}{3}+\frac{6}{3}$,

$|A| = 1(2)(3) = 6$ 7, $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{3}$

$|A^{-1}+A^*| = 7(\frac{7}{2})(\frac{7}{3}) = \frac{7^3}{6}$

22. $A^2+A-6E = (A+3E)(A-2E)$. 2是A的一个特征值 $\Rightarrow |2E-A| = 0$.

$|A^2+A-6E| = |A+3E||A-2E| = 0$

23. $|\lambda E - \alpha\beta'| \xlongequal[\text{公式}]{\text{由降阶}} \lambda^{n-1}|\lambda - \beta'\alpha| = \lambda^{n-1}(\lambda-0) = \lambda^n = 0$ $\lambda = 0$.(n重)

24. $A_{n\times n}$ 行向量组线性相关 $\Rightarrow R(A) < n \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow$ 0是A的特征值

25. $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\cdot\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}$ $\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{(0,8,8)}{\sqrt{0^2+8^2+8^2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}(0,8,8)$

单位方向向量有两个. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$

26. $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$a_{21}A_{41} + a_{22}A_{42} + a_{23}A_{43} + a_{24}A_{44} = 0$

$4(A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}) = 0 \Rightarrow A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44} = 0$

27. $AP = [AX, A^2X, A^3X] = [X, AX, A^2X]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ X, AX, A^2X 线性无关 $\Rightarrow P$可逆

$AX = 0X + 1AX + 0A^2X$

$A^2X = 0X + 0AX + 1A^2X$

$A^3X = 0X + 3AX - 2A^2X$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

28. $|a+b|=|a-b| \Rightarrow |a+b|^2=|a-b|^2 \Rightarrow (a+b,a+b)=(a-b,a-b)$

$\Rightarrow (a,a)+2(a,b)+(b,b)=(a,a)-2(a,b)+(b,b)$

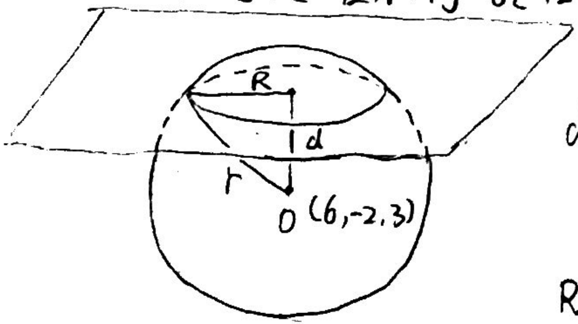
$\Rightarrow 2(a,b)=-2(a,b) \Rightarrow (a,b)=0 \Rightarrow a\perp b$, 夹角 $\frac{\pi}{2}$

29. $L=\begin{cases}\pi_1: x+2y-z-6=0 & n_1(1,2,-1)\\ \pi_2: 2x-y+z-1=0 & n_2(2,-1,1)\end{cases}$ $\quad s=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$

$\vec{s}=(1,-3,-5)$ 或 $(-1,3,5)$ (两向量是平行的)

取 $z=0$ 代入 L $\begin{cases}x+2y-6=0\\ 2x-y-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{8}{5}\\ y=\frac{11}{5}\end{cases}$ $\quad L: \begin{cases}x=\frac{8}{5}-t\\ y=\frac{11}{5}+3t\\ z=5t\end{cases}$

30. $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0 \Rightarrow (x-6)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$



$r=5$.

$d=$ O到平面的距离

$=\frac{|2(6)+2(-2)+3+1|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\frac{12}{3}=4$

$R=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

二、选择题

1. n元方程 $\Rightarrow$ A有 n列 $AX=\vec{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$

$R(A)<n$, A不是列满秩 $\Rightarrow$ A的列向量组线性相关。(C).

2. $A_{m\times n}$ $\quad B=(A\,\vdots\,\vec{\beta})$

$AX=\vec{\beta}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)=n$

$AX=\vec{\beta}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)<n$

$AX=\vec{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow R(A)=n$

$AX=\vec{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$

(A)选项, 反例 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}$ $\vec{\beta}=\begin{bmatrix}1\\ 5\\ 4\end{bmatrix}$ $B=[A\,\vdots\,\vec{\beta}]=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 3 & 4\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cc:c}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]$

$R(A)=2$. $R(B)=3$, 无解

(B)选项 反例 $B=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cc:c}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]$ $R(A)=1<2$. $AX=\vec{0}$ 有非零解

$R(B)=2\neq R(A)$ $\quad AX=\vec{\beta}$ 无解.

✓(C) $AX=\vec{\beta}$ 有无穷多解 $R(A)=R(B)<n$, $R(A)<n \Rightarrow$ A有非零解.

(D) $\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2$ 是 $AX=\vec{\beta}$ 的解. $A(\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2)=A\vec{\eta}_1+A\vec{\eta}_2=\vec{\beta}+\vec{\beta}=2\vec{\beta}\neq\vec{\beta}$ 不是 $AX=\vec{\beta}$ 的解

选择

3. $|A|=0$, $A_{n\times n}$ $\Rightarrow R(A)<n$, $B=(A\vdots\vec{\beta})$

若 $R(A)=R(B)<n$，方程组有解，且有无穷多解；若 $R(A)\neq R(B)$，方程组无解. [C]

4. $A_{m\times n}$

✓(A) 若 $R(A)=m$，A是行满秩. $B=(A\vdots\vec{\beta})$ B是 $m\times(n+1)$ 矩阵. $R(B)\leq m$

A是B的子矩阵，$m=R(A)\leq R(B)$ $\Rightarrow R(B)=m$. $\Rightarrow R(A)=R(B)$. $AX=\vec{\beta}$ 有解

(B) $R(A)<n$，若 $R(A)\neq R(B)$ 方程组无解.

(C) $R(A)=n$，若 $R(A)\neq R(B)$ 方程组无解.

(D) 反例. $\left[\begin{array}{cc:c}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{array}\right]$ 增广阵 有解 $x_1=1$. $x_2=1$ （不是唯一解）

5. $A_{5\times5}$. $R(A)=3$，A没有非零4阶子式. $M_{ij}=0$，$\Rightarrow A_{ij}=0$ $1\leq i,j\leq4$

$\Rightarrow A^*=0$ $\Rightarrow R(A)=0$ 选[C]

$$A_{n\times n}\quad R(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n\\ 1 & R(A)=n-1\\ 0 & R(A)<n-1\end{cases}$$

6. (A) $AA^*=|A|E$

✓(B) $|A^*|=|A|^{n-1}$，$|A|\neq0\Rightarrow|A^*|\neq0$

(C) 不正确，(D) 当 $R(A)=n,0$ 时 $R(A)=R(A^*)$

7. 矩阵乘法有零因子，即 $\exists A\neq0$、$B\neq0$，但 $AB=0$.

(A) 错误

(B) $A=\begin{bmatrix}2&4\\-3&6\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}$ $AB=0$ $BA=\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\-3&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16&-32\\-8&16\end{bmatrix}\neq0$

(C) $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A(A+B)+B(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

✓(D) $AB=0$，若 $|B|\neq0$ B可逆. $ABB^{-1}=0B^{-1}\Rightarrow A=0$ 矛盾，

所以 $|B|=0$

8. $R\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{bmatrix}=2$. π_1与π_2不平行 但不一定垂直，选[D]

9. λ是A的特征根，$\exists X\neq0$ $AX=\lambda X$. $A^*AX=\lambda A^*X$ $A^*A=|A|E$

$|A|EX=\lambda A^*X$，A可逆 $\Rightarrow\lambda\neq0$，所以 $A^*X=\dfrac{|A|}{\lambda}X$. 选[D]

10. 选B，由定理6.3，推论6.2

$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 可以相似对角化，$E^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}E=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 有两个相同的特征值，(不是必要条件)

11. 选[C] 由定理6.3 $\begin{bmatrix}2&3\\0&1\end{bmatrix}$ 可以相似对角化，不是实对称阵(B)错误，

(D)是实对称阵的性质

12. (A)中的线性无关应改为线性相关

(B) $1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\vec{0}$，但 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 线性相关，B错误

(C)中存在一组数，应改为存在一组不全为零的数，

✓(D) 若向量的个数 > 向量的维数，向量组线性相关，(推论4.2)

13. 选(D)

若$A'=A$，$B'=B$，A，B是实二次型的矩阵，由 $X'AX=X'BX$，$\forall X$，两个二次型相同，所以对应的矩阵也相同

14. A，B是正定阵，即A，B是实二次型的矩阵，A，B是对称阵，

$(AB)'=B'A'=BA$ 不一定等于AB，AB不一定对称，则AB不一定是正定阵 [A]错，

$(A^2+B)'=(A^2)'+B'=(A')^2+B'=A^2+B$，是对称阵 $(A^2)'=(A')^2=A^2$，A^2对称

A是实对称，则存在正交阵P，$P'AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$ $\lambda_1,\cdots\lambda_n$是$A$的特征值，$A$正定 $\lambda_i>0$

$P'A^2P=P^{-1}A^2P=P'APP'AP=(P'AP)^2=\begin{bmatrix}\lambda_1^2&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^2\end{bmatrix}\Rightarrow\lambda_1^2\cdots\lambda_n^2$ 是A^2的特征值，$\lambda_i^2>0$，$1\le i\le n$

由推论8.1，A^2正定

$X\neq\vec{0}$，$X'(A^2+B)X=X'A^2X+X'BX>0$，因为$X'A^2X>0$，$X'BX>0$ [B]正确，

(C)若$A=B$，$A-B=0$，不正定

(D)若$k=0$，$kA=0$，不正定，

15. (A)，$\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}^2=E$，但$\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$，特征值：$-1$，$1$，不是全大于零，不正定

(B) $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}$ $A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，但$A'A\neq E$，$A$不是正交阵

✓(C) $AA^*=|A|E$ $A^2=E$ $A\cdot A=E\Rightarrow A=A^{-1}$

$A^*=|A|A^{-1}$. $(A^*)^2=(|A|A^{-1})^2=|A|^2(A^{-1})^2=|A^2|A^2=|E|A^2=A^2=E$

(D) 若$A=E$，$A^2=E$，但，$tr(A)=n$，$\neq n^2$

16.(A) A.B都可逆 $\Rightarrow |A|\neq 0, |B|\neq 0$ $|A'B^*| = |A'||B^*| = |A||B|^{n-1}\neq 0 \Rightarrow A'B^*$可逆 结论正确.

(B) A,B 实对称正定 $\Rightarrow$ A, B^{-1} 实对称正定 $\Rightarrow$ $A+B^{-1}$实对称正定, 结论正确.

(C) A,B 正交, $A'A=E$, $B'B=E$ $(AB)'AB = B'A'AB = B'EB = B'B = E$. 结论正确,

✓(D) A,B实对称, $(AB)' = B'A' = BA$ 不一定是AB, 结论错误

17. (A) 初等变换不改变矩阵的秩, 结论正确.

✓(B) $\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ 可逆 可经初等行变换化为E. 但 $\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}\neq E^{-1}$ 结论错误

(C) $A \xrightarrow{\text{行}} B$, ∃可逆P $PA=B$ $AX=0 \Rightarrow PAX=0 \Rightarrow BX=0$

$BX=0 \Rightarrow PAX=0 \Rightarrow P^{-1}PAX=0 \Rightarrow AX=0$

(D) $A \xrightarrow{\text{列}} B$ ∃可逆Q $AQ=B$ ⇒B的列可由A的列线性表示

$A=BQ^{-1}$ ⇒A的列可由B的列线性表示,

⇒A的列向量组与B的列向量组等价.

18. 由A到B经过两次初等行变换, r_3+r_1, 和 $r_1\longleftrightarrow r_2$

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=P_2,\quad E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=P_1.$$

行变换, 初等阵乘在左, 先做的变换, 先乘. $B=P_1P_2A$ 选[C]

19. A与B相似

(A) $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}3&0\\0&-1\end{bmatrix}$ 相似, ($\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ 实对称, 可相似于 $\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}$)

但 $\lambda E-A\neq\lambda E-B$. ($\lambda E-A=\lambda E-B \Rightarrow A=B$)

✓(B) A与B相似 ∃可逆T. $B=T^{-1}AT$

$|\lambda E+B| = |\lambda E+T^{-1}AT| = |T^{-1}\lambda T+T^{-1}AT| = |T^{-1}||\lambda E+A||T| = |\lambda E+A|$

(C) $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ $A^*=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&0\\0&-1\end{bmatrix}$. $B^*=\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}$ $A^*\neq B^*$

(D) $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ $A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}3&0\\0&-1\end{bmatrix}$ $B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&-1\end{bmatrix}$. $A^{-1}\neq B^{-1}$

20. (A) $(-E)^2=E$ 但 $-E+E=0$ 不可逆

(B) $E^2=E$ 但 $A-E=E-E=0$ 不可逆

(C) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ $A^2=E$, 但 $A+E\neq 0$, $A-E\neq 0$.

✓(D) $A^2=E$. $A^2-E=0$ $(A+E)(A-E)=0$, 若 A+E 可逆

$(A+E)^{-1}(A+E)(A-E) = (A+E)^{-1}0 = 0$

$(A-E)=0$

$A=E$, 矛盾, $A\neq E$时 $A+E$可逆

21. $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

A与B 都是实对称阵，A,B 可以相似对角化.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}\lambda-4&\lambda-4&\lambda-4&\lambda-4\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3+r_1\\r_4+r_1}]{r_2+r_1}(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)\lambda^3=0$$

$\lambda_1=4,\ \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$

$\exists$ 正交 P, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\lambda_3&\\&&&\lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix}=B$

P是正交阵 $P^{-1}=P'$. $P'AP=B$, $\Rightarrow$ A与B 既相似又合同，选(A)

22. (A) 由定理8.3、结论错误，f的正惯性指数是n. $\Rightarrow$ f的秩是n，且负惯性指数为0.

由推论8.2. (B) (D) 错误 (C) 正确.

23. (A) "$\Rightarrow$" $A'=(B'B)'=B'(B')'=B'B=A$, A对称.

$\forall X\neq\vec{0}$ $X'AX=X'B'BX=(BX)'(BX)=|BX|^2$

由 $BX=\vec{0}$ 只有零解，$X\neq\vec{0}\Rightarrow BX\neq\vec{0}$. $X'AX=|BX|^2>0$. A 正定

"$\Leftarrow$"：若 A 正定 $X'AX>0$. $\forall X\neq\vec{0}$

即 $X'B'BX=|BX|^2>0$, $\Rightarrow BX\neq\vec{0}$. 对 $\forall X\neq\vec{0}$

$\Rightarrow BX=\vec{0}$ 只有零解.

(B) $BX=\vec{0}\Rightarrow B'BX=\vec{0}$

$B'BX=\vec{0}\Rightarrow X'B'BX=\vec{0}\Rightarrow (BX)'(BX)=\vec{0}\Rightarrow |BX|^2=0\Rightarrow BX=\vec{0}$

所以 $N(B)=N(B'B)$ $B_{m\times n}$ $(B'B)_{n\times n}$

$n-R(B)=n-R(B'B)\Rightarrow R(B)=R(B'B)=R(A)$

(C) 若 $AX=\lambda X$ $X\neq\vec{0}$ $|X|\neq0$

$B'BX=\lambda X\Rightarrow X'B'BX=\lambda X'X$ $|BX|^2=\lambda|X|^2$. $\lambda=\frac{|BX|^2}{|X|^2}\geq0$

✓(D) 由A, $R(B)=n\Leftrightarrow$ A正定.

24. $|A^*A^{-1}| = |A^*||A^{-1}| = |A|^{n-1}\frac{1}{|A|} = |A|^{n-2} = a^{n-2}$ 选[C]

25. $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ $B^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

(A) $|A+B^{-1}| = \left|\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix} = 0$. $|A|+|B|^{-1} = \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-1&0\\0&-1\end{vmatrix} = 2$

$|A+B^{-1}| \neq |A|+|B|^{-1}$

(B) 选项应为 $(A+B)^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$. $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

$(A+B)^{-1} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ $B^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

$B^{-1}+A^{-1} = \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix} \neq (A+B)^{-1}$

(C) $(AB)^2=ABAB$ $A^2B^2=AABB$、AB不一定等于BA，$(AB)^2$不一定等于A^2B^2

√(D) $|A'B| = |A'||B| = |A||B|$. $|BA|=|B||A|=|A||B| \Rightarrow |A'B|=|BA|$

26. $\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2$ 是 $AX=\vec{\beta}$ 的两个解. $A\left(\frac{\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2}{2}\right) = \frac{1}{2}A(\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2) = \frac{1}{2}(A\vec{\eta}_1+A\vec{\eta}_2) = \frac{1}{2}(\vec{\beta}+\vec{\beta}) = \vec{\beta}$

$\frac{\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2}{2}$ 是 $AX=\vec{\beta}$ 的特解， $\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$ 线性无关

若 $c_1\vec{\xi}_1+c_2(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2)=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $(c_1+c_2)\vec{\xi}_1+c_2\vec{\xi}_2=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $c_2=0$ $c_1+c_2=0$

$\Rightarrow c_1=c_2=0$, $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2$ 线性无关. 也是 $AX=\vec{0}$ 的基础解系.

通解 $k_1\vec{\xi}_1+k_2(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2)+\frac{\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2}{2}$ 选[B]

27. $\vec{s}_1=(1,-2,1)$ $\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&0\\0&2&1\end{vmatrix} = -\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k} = (-1,-1,2)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{1(-1)+(-2)(-1)+1(2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.\quad \theta=\frac{\pi}{3}$$ 选[C]

28. $|\vec{\alpha}_3\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_1\ \vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2|$ （习题全解打印错误）

$=|\vec{\alpha}_3\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_1\ \vec{\beta}_1|+|\vec{\alpha}_3\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_1\ \vec{\beta}_2|$

$=-|\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_3\ \vec{\beta}_1|-|\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_3\ \vec{\beta}_2|$

$=-|\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\alpha}_3\ \vec{\beta}_1|+|\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2\ \vec{\beta}_2\ \vec{\alpha}_3| = -m+n$ 选[D]

29. 1°若 $|A|=0$ $R(A^*)=\begin{cases}1 & R(A)=n-1\\0 & R(A)<n-1\end{cases}$ 当 $R(A)=n-1$ 时 $R(A^*)=1<n-1 \Rightarrow R(A^*)^*=0$

当 $R(A)<n-1$ 时 $A^*=0 \Rightarrow (A^*)^*=0$. 2°若 $|A|\neq 0$. A可逆.

$(A^*)^*A^*=|A^*|E$ $(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\frac{A}{|A|}=|A|^{n-2}A$ 选[C]

30. $\vec{s_1}=(a_1-a_2, b_1-b_2, c_1-c_2)$ $M_1(a_3, b_3, c_3)$

$\vec{s_2}=(a_2-a_3, b_2-b_3, c_2-c_3)$ $M_2(a_1, b_1, c_1)$

混合积 $[\vec{s_1}\ \vec{s_2}\ \overrightarrow{M_1M_2}]=\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_1-a_3 & b_1-b_3 & c_1-c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_1} \begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \end{vmatrix}=0$

L_1与L_2共面 由 $R\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}=3$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_3} \begin{bmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad 秩=3$$

行向量线性无关 $\vec{s_1} \not\parallel \vec{s_2}$ L_1与L_2共面且不平行 $\Rightarrow$ L_1与L_2交于一点,

选[A].