# 哈工大《线性代数与几何》

机考模拟题

期中模拟试题

期中真题试卷

数学建模
Q群636683950

大物实验群
290028380

读书交流群
735695322

网盘计划
Q群953062322

线代（密码1920）

# 哈工大网盘计划简介

## 1.项目初衷

鉴于（1）哈工大各类 QQ 群内学习资料多且繁杂，而文件文字太多会导致文件被 tx 屏蔽或者降低 QQ 群信用星级；（2）校内诚信复印和纸张记忆垄断；（3）很多营销号在卖资料且售价很高；（4）学长学姐的自编材料很好，还想分享给下一届；等问题，网盘计划应运而生！哈尔滨工业大学网盘计划**旨在将窝工的各类学习资料进行归类整理，并且以网盘的形式发出来**，历时一年，现已小成，扫描了上百份校内复印店试题文档，归类整理了近 40 个 G 的学习资料给大家，已经花费上千元，现入不敷出，如果您希望网盘计划继续运营下去的话，可通过以下方式进行捐赠。

QQ支付

推荐使用微信支付

## 2.网盘计划成就（密码 1920）

哈工大网盘计划
密码1920

微信公众号二维码

群名称:哈工大网盘计划（预）
群　号:953062322

***腾讯自动屏蔽以上链接，请用浏览器扫一扫***

# 线性代数期中机考模拟题（一）

（此卷满分 20 分，答题时间 20 分钟）

注：本试卷中 E 表示单位矩阵，R(A)，$A^*$，$A^T$分别表示 A 的秩，A 的伴随矩阵和 A 的转置矩阵.

1、过点(2,-1,3)且和平面π1: 2x-y+3z-1=0 与π2: 5x+4y-z-7=0 都平行的直线方程【A】

（A）$\frac{x-2}{11}=\frac{y+1}{-17}=\frac{z-3}{-13}$　　（B）$\frac{x-2}{-11}=\frac{y+1}{-17}=\frac{z-3}{13}$

（C）11x-17y-13z=0　　（D）11x+17y-13z=0

电工实验群
737678045

2、已知矩阵 A=$\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\-3&6&-6\end{pmatrix}$，则$A^{10}$=

（A）$\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\-3&6&-6\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&2^{10}&2^{10}\\2^{10}&4^{10}&4^{10}\\3^{10}&4^{10}&6^{10}\end{pmatrix}$　（C）0　（D）$\begin{pmatrix}-1&2&-2\\2&-4&4\\3&-6&6\end{pmatrix}$

3、设 A、B 为 n 阶方阵，下列推论不正确的是

（A）A 可逆，且 AB=0，则 B=0.　　（B）A,B 中有一个不可逆，则 AB 不可逆.

（C）A,B 可逆，则 A+B 可逆.　　（D）A,B 可逆，则$A^TB$可逆.

4、A=$\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_mb_1&a_mb_2&\cdots&a_mb_n\end{pmatrix}$，其中$a_i\neq0\ (i=1,2,\ldots,m)$，$b_j\neq0(j=1,2,\ldots,n)$

则矩阵 A 的秩 R（A）=

（A）0　　（B）1　　（C）m　　（D）n

5、设 A,B 都是 3 阶非零方阵，满足 AB=0，则 A 与 B 的秩为

（A）都等于 3.　（B）必有一个为 0.　（C）都小于 3.　（D）以上答案都不对.

6、已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则线性无关的向量组是

（A）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$　　（B）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

（C）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$　　（D）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

7、设 4 阶方阵 A =（α,X,Y,Z），B=(β,X,Y,Z)，|A|=4，|B|=1，则|A+B|=

（A）5　　（B）10　　（C）20　　（D）40

8、设 4 阶方阵 A、B 的伴随矩阵为$A^*$、$B^*$，且 R(A)=3，R(B)=4，则 R($A^*B^*$)=

（A）0　　（B）1　　（C）3　　（D）4

9、已知平面π：x+4y-z+5=0,直线 L：$\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{-4}=Z$，则必有

（A）L 与π垂直　　　　（B）L 与π相交于一点但不垂直

（C）L 在π上　　　　（D）L 与π平行，但不在π上

10、已知 A，B 均为 4 阶方阵，|A|=1,|B|=-2,则$\begin{vmatrix} 0 & 2A \\ -AB & 3B \end{vmatrix}$=

（A）-16　　（B）16　　（C）32　　（D）-32

11、设 A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$及 3 阶方阵 B≠0，且满足 AB=0，则 a=

竞赛交流群
189868951

（A）4　　（B）-4　　（C）3　　（D）-3

12、设 A 为 3 阶方阵，满足$A^*=A^T$，若$a_{31}=a_{32}=a_{33}>0$，则$a_{31}$=

（A）$\sqrt{3}/3$　　（B）3　　（C）1/3　　（D）$\sqrt{3}$

13、设 A，B 均为 n 阶可逆阵，满足$(AB)^2=E$，则下列各式未必正确的是

（A）$A=B^{-1}$　　（B）$ABA=B^{-1}$　　（C）$BAB=A^{-1}$　　（D）$(BA)^2=E$

$\vec{n}=(1,-2,-1)$

14、直线 L1：$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$与直线 L2：x-2=y=z-3 间的距离为

$\overrightarrow{AB}=(2,0,3)$

A(0,0,0)　　B(2,0,3)

（A）$5\sqrt{6}/6$　　（B）$\sqrt{3}$　　(C) $\sqrt{6}/6$　　(D) $\sqrt{6}$

15、设 A，P 为 3 阶矩阵，且$P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，若将 P 的第二列加到第一列得 Q，则$Q^TAQ$为

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

16、设 A 为 3 阶方阵，|A|=1/2，则$|(\frac{1}{3}A)^{-1}-10A^*|$=

（A）16　　（B）4　　（C）-16　　（D）-4

17、行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 5^2 & 4^2 & 2^2 & 3^2 \\ 5^3 & 4^3 & 2^3 & 3^3 \end{vmatrix}$=

（A）-18　　（B）18　　（C）-12　　（D）12

18、设 A 是 n 阶非零矩阵，且$A^2=0$，则有

（A）A-E 不可逆，A+E 不可逆　　（B）A-E 不可逆，A+E 可逆

（C）A-E 可逆，A+E 不可逆　　（D）A-E 可逆，A+E 可逆

19、如果向量α=(1,-2,3),β=(3,t,1),γ=(1,7,-5)共面，则 t=

(A) -9/8　　(B) 3　　(C) -3　　(D) -2

20. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，且满足 $AB=E_m$，$R(A)=r$,则有

(A) $r\geq m$　　(B) $r\leq m$　　(C) $r=m$　　(D) $r>n$

$2m \leq R(A)+R(B) \leq m+n \Rightarrow m\leq n$

$R(AB)\leq \{m, n\}$

$r\leq m$

$\cancel{R(AB)}\leq m$

数学建模

Q群636683950

张博越

# 线性代数期中机考模拟题（二）

(1) 若排列 $7i125j489$ 为奇排列，则排列 $ij45$ 的逆序数为（ C ）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(2) 平面 $\pi_1: x-y-2z=2$，与 $\pi_2: x+2y+z=8$ 的角平分面方程为（　　）　两个　AB

(A) $y+z-2=0$　　(B) $2x+y-z-10=0$

(C) $6x+y+18z-18=0$　　(D) 以上均错

(3) 设有两个 $3\times1$ 矩阵 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}-2\\1\\-2\end{bmatrix}$，且 $A=E-\alpha\beta'$，则 $|A^2-2A+2E|$ 值为（ B ）



(A) $-5$　　(B) 5　　(C) $-8$　　(D) 8

(4) 已知 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\2&1&1&1\\1&1&0&0\\1&2&2&1\end{vmatrix}$，则 $2016A_{41}+2017A_{42}+2018A_{43}+2019A_{44}=$（ B ）

(A) $-2020$　　(B) 2020　　(C) 4040　　(D) $-4040$

(5) 下列说法中正确的是（ C ）

(A) 若 $A$ 是 $n$ 阶方阵，$A^2=A$，则 $A=O$ 或 $A=E$

(B) 若 $A,B$ 都是 $n$ 阶单位阵，$C$ 满足 $C^2=AB$，则 $C=\pm A$

(C) 若 $A,B$ 均为 $n$ 阶逆阵，则 $A$ 可经初等行变换成为 $B$

(D) 若矩阵 $A$ 的秩为 $r$，则 $A$ 满足所有 $r$ 阶子式全不为0

(6) 正交矩阵 $A$ $(AA'=E)$，满足 $|A|<0$，则 $|A+E|=$（ C ）

(A) $-1$　　(B) 1　　(C) 0　　(D) $\sqrt{2}$

$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{matrix} 0 & A \\ B & 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} E & \\ & E \end{matrix}\right)$ 只能进行行变换. $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \\ \hline E & \\ & E \end{pmatrix}$ 只能进行列变换.

7. 设A、B均为2阶矩阵，$A^*$、$B^*$分别为A、B的伴随矩阵，若 $|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为（ B ）

(A) $\begin{pmatrix} 0 & \cancel{3B^*} \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$

8. 设A、B为3阶矩阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$（ B ）.

(A) 2 (B) 3 (C) 1 (D) 6

9. 下列命题中不正确的是 D ~~A~~ B

(A) 空间中几何向量 $\vec{\alpha}$ 与 ox, oy, oz 轴夹角依次为 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$，则 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$

(B) 空间中几何向量 $\vec{\alpha}$ 与 ox, oy, oz 轴夹角依次为 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$，则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

(C) 直线与三坐标平面的夹角分别为 $\lambda$、$\mu$、$\gamma$，则 $\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\gamma=2$

(D) ~~平面~~ 直线 与三坐标平面的交角分别为 $\lambda$、$\mu$、$\gamma$，则 $\sin^2\lambda+\sin^2\mu+\sin^2\gamma=1$

参錯而

(10) 若 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$A=\alpha\beta'$，B为4阶方阵，$r(B)=\cancel{4}\ 2$，则 $r(AB-2B)=$（ B ）

(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 0

共轭转置

(11) $A=\begin{bmatrix} i & 1 & 3 \\ 2 & i & 1-i \end{bmatrix}$，则 $A^H=$（ ）

(A) $\begin{bmatrix} -i & 1 & 3 \\ 2 & -i & i-1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -i & 1 & 3 \\ 2 & -i & 1+i \end{bmatrix}$ (C) $\Big[$

(12) 若向量组 $\alpha_1=(1,2,3)$，$\alpha_2=(2,-1,1)$，$\alpha_3=(3,\lambda,-1)$ 线性相关，则 $\lambda$ 的值为（ B ）.

(A) 4 (B) $-4$ (C) 3 (D) $-3$ A

(13) 设 A 为 4 阶可逆矩阵，将 A 的第一行乘 k 加到第二行得到矩阵 B，则 $|B^{+}A'|=$（ ）. C.

(A) $-1$ (B) 0 (C) 1 (D) k

$A^{+}A'$ $A^{+}A=E$ $|A^{+}A'|=1$.

$|A^{+}||A|=|E|$.

(14) 设 A 和 B 为 n 阶矩阵，且 $A^2=A$，$B^2=B$，$r(A+B-E)=n$，$r(B)=k$，则 $r(AB)+r(A)=$（ ）

$(A-2E)(A+E)=2E$

$(B-2E)(B+E)=2E$

(A) k (B) $n+k$ (C) $n+2k$ (D) $2n+k$

(15) 矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\0&-1\end{bmatrix}$ 的解是（ C ）.

(A) $X=\begin{bmatrix}-1&0\\0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$ (B) $X=\begin{bmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$ (C) $X=\begin{bmatrix}0&-1\\\frac{1}{4}&0\end{bmatrix}$ (D) $X=\begin{bmatrix}0&1\\\frac{1}{4}&0\end{bmatrix}$

(16) 经过直线 $\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+1}{2}$ 且垂直于平面 $x-4y+3z+7=0$ 的平面方程为（ ）

(A) $2x+3y-z+20=0$ (B) $5x+17y-21z+20=0$

(C) $2x-3y+z-20=0$ (D) $5x-17y+21z-20=0$

(17) 设 A 与 B 是两个 n 阶非零方阵，满足 $AB=0$，则 A 与 B 的秩是（ C ）.

(A) 都等于 n (B) 必有一个为 0 (C) 都小于 n (D) 和小于 n

(18) 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $A^{2016}=$（ B ）

(A) $\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&-1\\1&1&0\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1&-2&2\\0&-1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

(19) n阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & a \\ a & x_2 & a & \cdots & a & a \\ a & a & x_3 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & & x_{n-1} & a \\ a & a & a & & a & x_n \end{vmatrix} \quad (x_i \neq a)$$

的值为( B )

(A) $(1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-a})\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)$ (B) $(-1)^n(1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-a})\prod_{i=1}^{n}(a-x_i)$

(C) $(1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-a})\prod_{i=1}^{n}(a-x_i)$ (D) $(-1)^n(1+a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-a})\prod_{i=1}^{n}(a-x_i)$

---

(20) 设A为2阶方阵，存在 $m>2$ $(m\in N)$ 使 $A^m=0$，则( C )

(A) 总有 $A=0$ (B) $A=0$ 总不成立 (C) $A^2=0$ 总成立

(D) 不一定 $A^2=0$

# 参考答案

1．C　2．D　3．B　4．B　5．C

6．C　7．B　8．B　9．D　10．B

11．C　12．B　13．C　14．B　15．C

16．B　17．C　18．B　19．B　20．C

$R(A+B) \geq R(A)+R(B)-n$.

# 线性代数期中机考模拟题（三）

C

(1) 设A为n阶方阵，且$A^2=E$，则$R(A+E)+R(A-E)=$ ~~A~~ ______.

(A) 0　　(B) 1　　(C) n　　(D) n-1

(2) $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$ 化$D_4$为多项式，则正确的是 D ______.

(A) $D_4=-2(x+1)(x-1)(x-2)(x+2)$

(B) $D_4=-3(2-x^2)(9-x^2)$

(C) $D_4=-2(2-x^2)(9-x^2)$

(D) $D_4=-3(x+1)(x-1)(x-2)(x+2)$

软件分享群
626648181

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 11 & -7 \\ 5 & 4 & x & 1 \\ 3 & x & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 1 \end{vmatrix}$ 求$x^2$项系数为 C ______

网盘计划
Q群953062322

(A) 7　　(B) -7　　(C) 9　　(D) -9

(4) $\begin{vmatrix} a1 & a^2 & a3 \\ 2b1-a1 & 2b2-a2 & 2b3-a3 \\ c1 & c2 & c3 \end{vmatrix}=8$，求$\begin{vmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{vmatrix}$ B ______.

(A) 8　　(B) 4　　(C) 16　　(D) 2

(5) A、P为3阶矩阵，且$P^TAP=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$，若将P的第2列加到第1列得Q，则$Q^TAQ$为 D ______.

(A) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$　　(B) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$　　(C) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$　　(D) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

(6) 已知方阵A满足$A^2-A-E=0$，则$(A-E)^{-1}=$ ___C___

(A) $A^2$　(B) $A^2-A$　(C) $A^2+A$　(D) $2A$

(7) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 的逆为 ___B___

(A) $\begin{bmatrix}1&-2\\ \frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}-2&1\\ \frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&1\\ \frac{3}{2}&-2\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\ -2&1\end{pmatrix}$　$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\\2&-1&\\4&0&-1\end{pmatrix}$

(8) $AP=PB$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$，求$BA^5=$ ___B___

$BPB^5P^{-1}$

(A) $\begin{pmatrix}4&0&0\\2&0&0\\6&0&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\4&0&1\\1&0&4\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}6&0&0\\4&0&4\\0&0&1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-6&1&1\end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\1&1&1&1\\1&2&1&2\end{pmatrix}$ 的秩 ___B___.

(A) $R(A)=2$　(B) $R(A)=3$　(C) $R(A)=1$　(D) $R(A)=0$

(10) $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix}$，$A^{-1}=$ ___A___



(A) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\-1&2&1&0\\0&-1&2&1\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\-2&1&-2&1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&0&1&-2\\-2&1&0&1\end{pmatrix}$

(11) 下列命题错误的是（ C ）

(A) 矩阵A经过初等变换化为矩阵B，则A与B有相同的标准型.

(B) A与B是同阶可逆阵，则A可经过初等变换化成B

(C) 若矩阵A经初等行变换为矩阵B，则$|A|=|B|$.

(D) 可逆阵可只经过初等行变换为单位阵.

(12). $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ B为3阶可逆阵. $(BC^T-E)^T\times$

$(AB^{-1})^T+[(BA^{-1})^T]^{-1}=$ ______

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\4&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&4&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\4&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

---

(13) 已知(1) $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, 线性无关, 则下列线性无关向量组是

(A) $a_1+a_2$, $a_2+a_3$, $a_3+a_4$, $a_4+a_1$

(B) $a_1-a_2$, $a_2-a_3$, $a_3-a_4$, $a_4-a_1$

(C) $a_1+a_2$, $a_2-a_3$, $a_3+a_4$, $a_4-a_1$

(D) $a_1+a_2$, $a_2+a_3$, $a_3+a_4$, $a_4-a_1$

---

(14) A为3阶方阵, 满足$A^{-1}=A^T$, 若 $a_{31}=\frac{3}{5}$, $a_{32}=\frac{4}{5}$, 则

$a_{33}=$ ______

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{7}{5}$ (C) 1 (D) 0

---

(15) 若A为 $m\times n$ 矩阵, B为 $nm$ 矩阵, $R(A)=m$, 则下列说法正确的是 ______.

(A) A的任意一个m阶子式不为0 (B) $|A^*A|\neq 0$

(C) 若 $AB=0$. 则 $B=0$ (D) 若 $R(B)=n$, 则 $R(AB)=m$

---

(16) 已知空间四点, $A(1,0,-1)$ $B(1,-2,0)$, $C(1,1,1)$, $O(0,0,0)$. 则以O、A、B、C为顶点的四面体体积是 ______

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{6}$

---

(17) 已知的直线 $l_1$: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$, $l_2$: $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$.

经过 $l_1$ 且平行 $l_2$ 的平面方程是 ______

(A) $x-3y+z+2=0$ (B) $2x-3y+z+2=0$

(C) $x-2y+3z+2=0$ (D) $x-3y+2z+2=0$

(18) 平面Π垂直于平面$z=0$，并通过点$M_0(1,-1,1)$到直线
$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线，求Π的方程 ______

(A) $2x+y+1=0$ (B) $x+2y+1=0$ (C) $x+y+2=0$ (D) $2x+y+2=0$

---

(19) 求直线 $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$ 与 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1}$ 公垂线方程 ——

(A) $\frac{x-\frac{1}{3}}{1}=\frac{y-\frac{7}{3}}{-2}=\frac{z-1}{1}$ (B) $\frac{x-\frac{1}{3}}{-2}=\frac{y-\frac{7}{3}}{1}=\frac{z-1}{1}$

(C) $\frac{x-\frac{7}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{3}}{-2}=\frac{z-1}{-1}$ (D) $\frac{x-\frac{1}{3}}{-1}=\frac{y-\frac{7}{3}}{2}=\frac{z-1}{1}$

---

(20) 已知 $a=i$，$b=j-2k$，$c=2i-2j+k$. 求d使 $a$，$b$、$d$共面，且 $d\perp c$

(A) $(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3})$ B. $(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3})$

(C) $(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ D $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$

## 参考答案

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1．C | 2．D | 3．D | 4．B | 5．D |
| 6．C | 7．B | 8．D | 9．B | 10．A |
| 11．C | 12．B | 13．D | 14．D | 15．D |
| 16．D | 17．A | 18．B | 19．C | 20．A |

# 大一线性代数期中

## 2014 年线性代数期中



1、（本题 20 分）计算行列式的值

（1）$|D|=\begin{vmatrix}2&1&1&1&1\\1&3&1&1&1\\1&2&4&1&1\\1&1&1&5&1\\1&1&1&1&6\end{vmatrix}$

（2）已知$A$是 3 阶矩阵，$B$是 4 阶矩阵，且$|A|=12$，$|B|=-6$，求矩阵

$D=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}A\\-B&C\end{pmatrix}$的行列式$|D|$的值.

2、（本题 20 分）已知$|\vec{a}+\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=18$，求$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$与$\vec{a}\cdot\vec{b}$.

3、（本题 20 分）

（1）已知 3 阶矩阵$A$满足：$A^3+A+E=0$，证明$A+2E$可逆，并求出$(A+2E)^{-1}$.

（2）3 阶矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，求$(A^*)^{-1}$.

4、（本题 20 分）已知直角坐标系中的 4 个点 $A(3,-1,0)$，$B(3,-1,0)$，$C(5,-\frac{5}{2},-1)$，问：这四个点是否在同一平面上？若是，请求出此平面方程；若不是，请说明理由.

5、（本题 20 分）设矩阵$A=(a_{ij})_{3\times3}$，满足条件$a_{33}=-1$及$a_{ij}=A_{ij}, i,j=1,2,3.$ 其中$A_{ij}$是元素$a_{ij}$的代数余子式.

（1）求$|A|$.（2）解线性方程组$Ax=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

# 2013 年线性代数期中

## 一、（10 分）计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2+3cosx_1 & 2+3cosx_2 & 2+3cosx_3\\ 4cosx_1+5cos^2x_1 & 4cosx_2+5cos^2x_2 & 4cosx_3+5cos^2x_3\end{vmatrix}$$

## 二、（10 分）

设$n$阶矩阵$A$与$B$均非单位阵$I$，且$AB=A+B-I$，求行列式$|A-I|$和$|B-I|$的值。

## 三、（10 分）

设$A$与$B$均为n阶正交矩阵（即$A^{-1}=A^T$，且为实矩阵），满足$|A|+|B|=0$，求行列式$|A+B|$的值。

## 四、（10 分）

在线性方程组$Ax=b$中，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)^T$，$A_{ij}$是$a_{ij}$的代数余子式。已知$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}A_{nk}=-1$，$\sum\limits_{k=1}^{n}b_kA_{kn}=3$，求x的第n个分量$x_n$的值。

## 五、（15 分）

设$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，试用两种方法求$A^{-1}$。

## 六、（15 分）

设有直线$L_1$:$\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-6}{-4}$和$L_2$:$\begin{cases}x-z=9\\y+4z=-17\end{cases}$，试判断这两条直线的位置关系。若共面，求它们所确定的平面方程；若还相交，求交点。

## 七、（15 分）

设$n$阶矩阵$A$满足$A^3=2I$，$B=A^2-2A+2I$，证明$B$可逆并求$B^{-1}$。

## 八、（15 分）

设$A$是$n$阶矩阵，$r$（$A$）$=r$，证明：必存在$n$阶可逆矩阵$B$及秩为$r$的$n$阶矩阵$C$满足$C^2=C$，使$A=BC$。

# 2011年线性代数期中

## 一、填空题（每题5分，共20分）

1. 设$A$为3阶方阵，且$\det(A)=2$，则$\det(3A^{-1}-2A^{*})=$____________

2. 设$A,B$为3阶方阵，且$\det(A)=9,\det(B)=2,\det(A^{-1}+B)=2$，则$\det(A+B^{-1})=$____________.

3. 设$A=\begin{bmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{bmatrix}$，若$r(A)=2$，则$k=$____________.

4. 平面$\pi_1$：$x+2y-z+8=0$与平面$\pi_2$：$2x+y+z-7=0$之间的夹角$\emptyset=$____________.

## 二、单选题（每题5分，共20分）

1. 设$A,B$是$n$阶矩阵，则下列结论中正确的是(　　　).

   (A) $AB\neq 0\Leftrightarrow A\neq 0$且$B\neq 0$

   (B) $\det(A)=0\Leftrightarrow A=0$

   (C) $\det(AB)=0\Leftrightarrow \det(A)=0$或$\det(B)=0$

   (D) $A=E\Leftrightarrow \det(A)=1$

2. 下列矩阵中，不是初等矩阵的是（　　）

   (A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1&3&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

3. 设$A$为$m\times n$矩阵，若$r(A)=r<m<n$，则（　　　）.

   (A) $A$的所有$r$阶子式都不为0

   (B) $A$的所有$r-1$阶子式都不为0

   (C) $A$经初等行变换可以化为$\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}$

   (D) $A$不可能是满秩矩阵

4. 点(2,1,0)到平面$3x+4y+5z=0$的距离$d=$（　　　）

   (A) $\sqrt{2}$　(B) 3　(C) 1　(D) $\sqrt{3}$

## 三、计算题和证明题：

1. (14分）若线性方程组$Ax=0$有非零解，求$\lambda$的值，其中

$$A=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1&1\\-1&\lambda&1&-1\\-1&1&\lambda&-1\\1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}.$$

2. （12分）$A$是实对称可逆矩阵，证明：$A$的伴随矩阵也是实对称可逆矩阵。

3. (12分)用初等行变换求方阵$A=\begin{bmatrix}0&2&1\\-1&1&4\\2&-1&-3\end{bmatrix}$的逆$A^{-1}$。

4.（14 分）直线$L$过点$P(2,1,3)$，且与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交，求直线$L$的方程。

# 2010 年线性代数期中

## 一、填空题（每题 6 分，共 24 分）

1. 设$A,B$均为 3 阶方阵，且$|A|=-1$，$|B|=3$，则$|2A^*B^{-1}|=$________。

2. 当矩阵$A=$________________，$B=$________________时，有

$A\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}1&3&2\\3&3&3\end{bmatrix}$成立.

3. 设$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}$，矩阵$X$满足$X=AX+B$，则

$X=$________________.

4. 已知两条直线$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$和$L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$$L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$，

则过$L_2$且平行于$L_1$的平面方程为________________.

## 二、选择题（每题 6 分，共 24 分）

1. 设$n$阶矩阵 $A,B,C$ 满足$ABC=E$，则下列一定正确的是(　　　).

(A) $ACB=E$　　(B) $BAC=E$　　(C) $CBA=E$　　(D) $CAB=E$

2. 设直线方程为$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\B_2y+D_2=0\end{cases}$，且$A_1,B_1,C_1,D_1,B_2,D_2$均不为 0，则该直线（　　　）

（A）过原点；　（B）平行于$z$轴；　（C）垂直于$y$轴；　（D）平行于$x$轴.

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三维列向量，记矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$,，

如果已知$|A|=-1$，则$|B|=$（　　　）.

（A）30；　（B）20；　（C）10；　（D）0.

4. 设$A,B$均为二阶矩阵，若$|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵$\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}$的伴随矩阵是（　　　）

（A）$\begin{bmatrix}2A^*&O\\O&3B^*\end{bmatrix}$；（B）$\begin{bmatrix}3B^*&O\\O&2A^*\end{bmatrix}$；（C）$\begin{bmatrix}2B^*&O\\O&3A^*\end{bmatrix}$；（D）$\begin{bmatrix}3A^*&O\\O&2B^*\end{bmatrix}$.

## 三、计算题和证明题：

1.（12 分）计算行列式$\begin{vmatrix}x&a&a&a\\a&x&a&a\\a&a&x&a\\a&a&a&x\end{vmatrix}$.

2.（12 分）设$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\2&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}$,且$AB=A+B$，证明$r(AB-BA+2A)=r(A)$

3. (14 分) 判断两直线$L_1$:$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$和$L_2$:$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$是否在同一平面上. 如果在同一平面上，求交点；如果不在同一平面上，求两直线间的距离.

4.（14 分）已知齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+\lambda x_2+3x_3+4x_4=0\\x_1+\lambda^2x_2+3^2x_3+4^2x_4=0\\x_1+\lambda^3x_2+3^3x_3+4^3x_4=0\\(4+\lambda)x_1+5x_2+(2+\lambda)x_3+(1+\lambda)x_4=0\end{cases}$有非零解，求$\lambda$的值.

# 参考答案

## 2014 年线代期中

**1、**（1）

$$|D|=\begin{vmatrix}2&1&1&1&1\\1&3&1&1&1\\1&2&4&1&1\\1&1&1&5&1\\1&1&1&1&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1&1&1\\-1&2&1&1&1\\-1&2&3&1&1\\-1&1&1&4&1\\-1&1&1&1&5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}&1&1&1&1\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&5\end{vmatrix}$$

$$=\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)*2*3*4*5=394$$

（2）（经过 12 次列对换后可化成分块下三角矩阵$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}A&0\\C&-B\end{pmatrix}$）

$$|D|=(-1)^{12}\left|\frac{1}{2}A\right||-B|=(\frac{1}{2})^3|A|\times(-1)^4|B|=-9$$

**2、** $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=4^2=16$ ①

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=18^2=324$ ②

① +②得：$2\left(|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right)=340$

① −②得：$4\vec{a}\cdot\vec{b}=-308$

$\therefore |\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2=170$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-77$

**3、**（1）$(A+2E)(A^2-2A+5E)=A^3+A+10E=9E$

$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{9}(A^2-2A+5E)$　　故可逆，值为$\frac{1}{9}(A^2-2A+5E)$

（2）$(A^*)^{-1} = \left|A^{-1}|A|\right|^{-1} = \frac{(A^{-1})^{-1}}{|A|} = \frac{A}{|A|}$

$|A| = 2\times 5\times 1 = 10$

$$\therefore (A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

4、$\overrightarrow{AB} = (-4,0,1)$ $\overrightarrow{AC} = (0,3,1)$ $\overrightarrow{AD} = (2,-\frac{3}{2},-1)$

$$\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -\frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\text{共面}$$

$\therefore A.B.C.D$四点共面

该平面法向量$(i,j,k)$为$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3,4,-12)//(3,-4,12)$

该平面为：$3x-4y+12z-13=0$



5、（1）由题意知：$A^* = A^T$，故有$AA^* = AA^T = A^TA = |A|E$

$\therefore |A|^2 = |A|^3$ （$|AA^{\mathrm{T}}| = |A|^2, \left||A|E\right| = |A|^3$）



$\therefore |A| = 0$或$1$

又$\because |A| = {a_{31}}^2 + {a_{32}}^2 + {a_{33}}^2 = 1 + {a_{32}}^2 + {a_{33}}^2 > 0$

$\therefore |A| = 1$

（2）$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^TAx = A^T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = A^T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\because A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & -1 \end{bmatrix}$ 故$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$



$\therefore x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



# 2013 年线代期中

一、

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+3cosx_1 & 2+3cosx_2 & 2+3cosx_3 \\ 4cosx_1+5cos^2x_1 & 4cosx_2+5cos^2x_2 & 4cosx_3+5cos^2x_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2-2r_1}{\underset{r_3-\frac{4}{3}r_2}{=====}} 15\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ cosx_1 & cosx_2 & cosx_3 \\ cos^2x_1 & cos^2x_2 & cos^2x_3 \end{vmatrix}$$

$=15(cosx_2-cosx_1)(cosx_3-cosx_1)(cosx_3-cosx_2)$（范德蒙德行列式）

二、由$AB=A+B-I$可得：$(A-I)(B-I)=0$

则$|A-I|=0$或$|B-I|=0$

若$|A-I|\neq 0$，则有$A-I$可逆，

于是$B-I=0(A-I)^{-1}=0$，即$B=I$，矛盾。所以$|A-I|=0$

同理，$|B-I|=0$。

三、$A^TA=A^{-1}A=I$，$|A|^2=|A||A^T|=|AA^T|=1$，

由$|A|+|B|=0$得，$|A||B|=-|A|^2=-1$

所以$|A+B|=|A(I+A^{-1}B)|=|A(B^{-1}+A^{-1})B|$

$=|A||A^T+B^T||B|=|A||B||A+B|=-|A+B|$

于是$|A+B|=0$



四、$x_n=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_kA_{kn}}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{nk}}=-3$



五、$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

方法一：$A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}A^*$（课本 P49）



方法二：$[A|B]\xrightarrow{\text{行变换}}[I|A^{-1}B]$（课本 P68）

方法三：设$\alpha=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

则$A^2=(I+\alpha\alpha^T)^2=I+2\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=I+5\alpha\alpha^T=I+5(A-I)$

(注：$\alpha^T\alpha=3$)

整理得：$A(A-5I)=-4I$



所以$A^{-1}=-\frac{1}{4}(A-5I)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}$

六、共面且相交

平面方程为$13x+6y+11z-15=0$

交点为（3,7，－6）



七、因为$A\frac{A^2}{2}=I$，所以$A^{-1}=\frac{A^2}{2}$

因为$A^3+8I=10I$，所以$(A+2I)^{-1}=\frac{A^2-2A+4I}{10}$



同理，$(A-I)^{-1}=A^2+A+\mathrm{I}$

于是

$B=A^2-2A+2I=A^2-2A+A^3=A(A+2I)(A-I)$

$B^{-1}=(A-I)^{-1}(A+2I)^{-1}A^{-1}=\frac{1}{10}(A^2+3A+4I)$

八、由秩标准型有关定理，必存在$n$阶可逆矩阵$P$、$Q$，使得

$A=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q=PQQ^{-1}\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q$

令$B=PQ$，$C=Q^{-1}\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q$，即为所求。

# 2011 年线代期中

一、1.$-\frac{1}{2}$　　2. 9　　3. -2　　4. $\frac{\pi}{3}$

二、1.C　2.C　3.D　4.A

三、1. $\lambda=1$或$-3$

2. 由$AA^*=\det(A)I$

若 A 可逆，则$A^*=\det(A)A^{-1}$

（1）A 为实对称矩阵，则$(A^*)^T=\det(A)(A^{-1})^T=\det(A)(A^T)^{-1}$
$=\det(A)A^{-1}=A^*$，于是$A^*$为实对称矩阵。

（2）$\det(A^{*})=[\det(A)]^{n}\det(A^{-1})=[\det(A)]^{n}[\det(A)]^{-1}\neq 0$

故$A^{*}$可逆。

3. $A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{vmatrix}1&5&7\\5&-2&-1\\-1&4&2\end{vmatrix}$



4. $L:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$

# 2010 年期中

一、1. $\frac{8}{3}$　　2. $A=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$　　3. $\begin{bmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{bmatrix}$

4. $x+2-3(y-1)+z=0$ 或者$x-3y+z+5=0$

二、1.D　2.C　3.A　4.D

三、1. $D_4=\begin{vmatrix}x+3a&x+3a&x+3a&x+3a\\a&x&a&a\\a&a&x&a\\a&a&a&x\end{vmatrix}$……(4 分)

$=(x+3a)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&x&a&a\\a&a&x&a\\a&a&a&x\end{vmatrix}$……(6 分)



$=(x+3a)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x-a&0&0\\0&0&x-a&0\\0&0&0&x-a\end{vmatrix}$……(10 分)$=(x+a)(x-a)^3$……(12 分)

2.证法 1：$AB=A+B\Rightarrow\begin{cases}B=A(B-I) & (1)\\A=(A-I)B & (2)\end{cases}$……(2 分)，

把（1）式代入（2）式，得$A=(A-I)A(B-I)=(A^2-A)(B-I)$　……(5 分)

由题设条件知，$A$可逆，上式两端左乘$A^{-1}$，得$(A-I)(B-I)=I$……(8 分)

于是有$(B-I)(A-I)=I$，从而$BA=A+B$，所以$AB=BA$……(10 分)

故　$r(AB-BA+2A)=r(2A)=r(A)$　……(12 分)

证法 2：先求$(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$……(5 分)

$AB=A(A-I)^{-1}A=\begin{bmatrix}2&2&0\\4&2&0\\0&0&4.5\end{bmatrix}$……(7 分)

$BA=(A-I)^{-1}A^2=\begin{bmatrix}2&2&0\\4&2&0\\0&0&4.5\end{bmatrix}$……(9 分)　$\therefore BA=AB$……(10 分)

故$r(AB-BA+2A)=r(2A)=r(A)$……(12 分)

3.设$L1$的方向向量为$\overrightarrow{a_1}=(1,1,2)$，$p_1=(-1,0,1)$在$L1$上；

$L2$的方向向量为$\overrightarrow{a_2}=(1,3,4)$，$p_2=(0,-1,2)$在 $L2$上.

$\because |\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{p_1p_2}|=2\neq 0$ $\therefore$两直线异面............(6 分)

两直线间距离为$d=\dfrac{|[\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{p_1p_2}]|}{\|\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_2}\|}$............(10 分) $=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.........(14 分)

$$4.D=\begin{vmatrix}1 & \lambda & 3 & 4\\ 1 & \lambda^2 & 3^2 & 4^2\\ 1 & \lambda^3 & 3^3 & 4^3\\ 5+\lambda & 5+\lambda & 5+\lambda & 5+\lambda\end{vmatrix}\text{.........(4 分)}$$

$$=-6(\lambda+5)(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda & 3 & 4\\ \lambda^2 & 3^2 & 4^2\end{vmatrix}\text{.........(7 分)}$$

$$=-6(\lambda+5)(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4)\text{........(10 分)}$$

当$D=0$,即$\lambda=1$或$\lambda=3$或$\lambda=4$或$\lambda=-5$时齐次线性方程组有非零解.....(14 分)

# 哈尔滨工业大学 2004 级《代数与几何》期中试题

竞赛交流群
189868951

一、填空题（每小题 1 分，共 5 分）

1. 如果 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$，则 $x =$ $\frac{3}{2}$.

2. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -3 & 6 & -6 \end{bmatrix}$，则 $A^{10} =$ $-A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$

3. 设 $A$ 为方阵，且 $A^3 = E$，$E$ 为单位阵，则 $(A-2E)^{-1} =$ $-\frac{A^2+2A+4E}{7}$

4. 过点 $M(1,2,-1)$，且与直线 $\begin{cases} x = -t+2 \\ y = 3t-4 \\ z = t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是________.

5. $A = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{bmatrix}$ 其中 $a_i \neq 0(i=1,2,\cdots,m), b_j \neq 0(j=1,2,\cdots,n)$. 则矩阵 $A$ 的秩 $R(A) =$ 1

二、选择题（每小题 1 分，共 5 分）

1. $D = \begin{vmatrix} 8 & 27 & 64 & 125 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4)$，则必有（ A ）

（A）$D$=12.　（B）$D$=-12.　（C）$D$=16.　（D）$D$=-16.

2. 设 $n$ 阶方阵 $A,B,C$ 满足关系式 $ABC=E$, $E$ 为单位阵，则必有（ D ）

（A）$ACB=E$　（B）$CBA=E$.　（C）$BAC=E$.　（D）$BCA=E$.

3. 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则矩阵 $P^2AP^3$ 为（ B ）

（A）$\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$　（B）$\begin{bmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{bmatrix}$　（C）$\begin{bmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$　（D）$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

电影协会
Q群 725682926

4. 直线 $\begin{cases}2x+y-z+1=0\\3x-y+2z-8=0\end{cases}$ 与直线 $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-6}{-7}=\dfrac{z-7}{-5}$ 的位置关系是（

（A）相交于一点．（B）重合．（C）平行但不重合．（D）异面．

5. 设 $A,B$ 为 $n$ 阶方阵，下列论断$\boxed{\text{不正确}}$的是（ C ）

（A）$A$ 可逆，且 $AB=0$，则 $B=0$．（B）$A,B$ 中有一个不可逆，则 $AB$ 不可逆．

（C）$A,B$ 可逆，则 $A+B$ 可逆　　（D）$A,B$ 可逆，则 $A^TB$ 可逆

三、（本题 4 分）

已知 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，求矩阵 $X$．$\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

四、（本题 4 分）

计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a+1&b&c&d\\a&b+2&c&d\\a&b&c+3&d\\a&b&c&d+4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+1&b&c&d\\-1&2&0&0\\-1&0&3&0\\-1&0&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+1+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{4}d&b&c&d\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{vmatrix}$

$=24\left|a+1+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{4}d\right|$

$=24a+12b+8c+6d+24$

五、（本题 4 分）

设 $A=\begin{bmatrix}3&-1&2&4&1\\1&-1&2&3&1\\2&-3&6&9&4\\7&-2&4&8&1\end{bmatrix}$，求 $R(A)$．

$A=\begin{vmatrix}3&-1&2&4&1\\1&-1&2&3&1\\2&-3&6&9&4\\7&-2&4&8&1\end{vmatrix}$

$\begin{matrix}r_2-\frac{1}{3}r_1\\r_3-\frac{2}{3}r_1\\r_4-\frac{7}{3}r_1\end{matrix}$ $\begin{pmatrix}3&-1&2&4&1\\0&-\frac{2}{3}&\frac{4}{3}&\frac{5}{3}&\frac{2}{3}\\0&-\frac{7}{3}&\frac{14}{3}&\frac{19}{3}&\\0&&&&\end{pmatrix}$　$R(A)=3$

六、（本题 3 分）

求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程．

一区二手交易群
731429909

七、（本题 3 分）

设向量 $2\vec{a}+5\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，$2\vec{a}+3\vec{b}$ 与 $\vec{a}-5\vec{b}$ 垂直，其中 $\vec{a},\vec{b}$ 为非零向量，求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角．

八、（本题 2 分）

$\because R(A)=n-1\quad\therefore |A|=0$

$A$ 是 $n$ 阶方阵，$R(A)=n-1$，$A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵．试证：$R(A^*)=1$．

$R(A^*)+R(A)-n\le R(A^*A)=0$

$\therefore R(A^*)\le 1$

又 $\because R(A)=n-1\quad\therefore$ 必存在一个 $A_{ij}\ne 0\quad\therefore R(A^*)\ne 0$

$\therefore R(A^*)=1$

## 哈尔滨工业大学 2004 级

## 《代数与几何》期中试题解答

一、填空题（本题每小题 1 分，共 5 分）

1. $\frac{3}{2}$;  2. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$ （或 $-A$）;  3. $-\frac{1}{7}(A^2+2A+4E)$;

4. $-(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$ 或：$x-3y-z+4=0$  5. 1.

二、选择题（本题每小题 1 分，共 5 分）

1. A;  2. D;  3. B;  4. C;  5. C.

三、（本题 4 分）

解：将 $A^*X=A^{-1}+2X$ 等式两边左乘 $A$，得 $AA^*X=E+2AX$

则 $|A|X=E+2AX$，由 $|A|=4$

解得 $(4E-2A)X=E$ ………… （2 分）

所以 $4E-2A$ 可逆.

且 $X=(4E-2A)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ …………（4 分）

（不准确扣 1 分）

四、（本题 4 分）

解：$D=\begin{vmatrix} a+1 & b & c & d \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ …………（2 分）

$=\begin{vmatrix} a+1+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{4}d & b & c & d \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ …………（3 分）

$=24(1+a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{4}d)$ …………（4 分）

$=24+24a+12b+8c+6d$

五、（本题 4 分）

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 9 & 4 \\ 7 & -2 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -10 & -13 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 1\\0 & 1 & -2 & -3 & -2\\0 & 1 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 1\\0 & 1 & -2 & -3 & -2\\0 & 0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\therefore R(A)=3$ ………（4 分）

（不准确扣 1 分）

六、（本题 3 分）

解法一：过已知直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-2z-9=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$$2x-4y+z+\lambda(3x-2z-9)=0$$

设过已知直线和其投影直线的平面为 $\pi_0$，其方程为

$$2x-4y+z+\lambda_0(3x-2z-9)=0$$

所以 $(3\lambda_0+2,\ -4,\ -2\lambda_0+1)\cdot(4,\ -1,\ 1)=0$ ………（2 分）

解得 $\lambda_0=-\dfrac{13}{10}$.



$\pi_0$ 的方程为，$19x+40y-36z-117=0$

所求投影直线的方程为

$$\begin{cases}19x+40y-36z-117=0\\4x-y+z-1=0\end{cases}$$ ………（3 分）

解法二：$\vec{s}=(2,-4,1)\times(3,0,-2)=(8,7,12)$

垂面法向量　$\vec{n}=\vec{s}\times(4,-1,1)=(19,\ 40,\ -36)$ ………（2 分）

在直线上取一点 $(3,\ \dfrac{3}{2},\ 0)$ 得垂面方程：



$$19(x-3)+40(y-\frac{3}{2})-36z=0.$$

$\therefore$ 投影线方程：

$$\begin{cases}19x+40y-36z-117=0\\4x-y+z-1=0\end{cases}$$ ………（3 分）

七、（本题 3 分）



解：$\begin{cases}(2\vec{a}+5\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0\\(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-5\vec{b})=0\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=0\\2|\vec{a}|^2-7\vec{a}\cdot\vec{b}-15|\vec{b}|^2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{b}|^2\\|\vec{a}|=2|\vec{b}|\end{cases}$$ …………（2 分）

$\therefore \cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}$，故 $<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{2}{3}\pi$ …………（3分）

八、（本题2分）

证明：一方面：由 $R(A)=n-1$

所以 $|A|=0 \Rightarrow AA^{*}=|A|E=0$

$\Rightarrow R(A)+R(A^{*})\le n \quad \Rightarrow R(A^{*})\le 1$ …………（1分）

另一方面，由 $R(A)=n-1$.

所以，存在某余子式 $M_{ij}\ne 0$，即 $A_{ij}\ne 0$.

$\Rightarrow A^{*}\ne 0 \quad \Rightarrow R(A^{*})\ge 1$

$\therefore R(A^{*})=1$ …………（2分）

竞赛交流君羊
189868951

## 哈哈尔滨工业大学2005级《代数与几何》期中试题

注：本试卷中 $E$ 表示单位矩阵，秩$(A)$、$A^{*}$、$A'$ 分别表示 $A$ 的秩，$A$ 的伴随矩阵和 $A$ 的转置矩阵.

一、填空题（本题每小题1分，共4分）

一区二手交易君羊
731429909

1. $\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=$ <u>-6</u>.

2．设4阶方阵 $A$ 的秩为2，则其伴随矩阵 $A^{*}$ 的秩为 <u>0</u>.

3．已知 $A$，$B$ 都为3阶方阵, $|A|=2,|B|=-1$，则 $\begin{vmatrix}-A&A\\0&2B\end{vmatrix}=$ <u>16</u>.

4．$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}^{10}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{9}=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&3&2\\22&61&43\end{pmatrix}$.

二、选择题（本题每小题1分，共4分）

1．设4阶方阵 $A=(\alpha,X,Y,Z),B=(\beta,X,Y,Z),|A|=4,|B|=1$,
则 $|A+B|=$（ D ）

(A) 5. (B) 10.
(C) 20. (D) 40.

2．设 $A,B$ 为 $n$ 阶可逆阵, 满足 $(AB)^{2}=E$, 则下列各式不正确的是（ A ）

(A) $A=B^{-1}$. (B) $ABA=B^{-1}$.
(C) $BAB=A^{-1}$. (D) $(BA)^{2}=E$.

3．设 $A$、$B$ 都是3阶非零方阵，满足 $AB=0$，则 $A$ 与 $B$ 的秩为（ D ）

（A）都等于3. （B）必有一个为零.
（C）都小于3. （D）以上答案都不对.

根据偏工、偏理选做下列两道题中的一道题

4. *（偏工）设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面

$\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线 $L=$（　　）

（A）平行与 $\pi$.　　（B）在 $\pi$ 上.

（C）垂直与 $\pi$.　　（D）与 $\pi$ 斜交.

4. *（偏理）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则线性无关的向量组是（　　）

（A）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$.（B）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$.

（C）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$.（D）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$.

三、(本题 4 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}$，求秩(A)

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&0&0\\0&3&0&-4&1\\0&3&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&-4&1\\0&3&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&-4&1\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\therefore R(A)=3$$

四、(本题 5 分)

设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，满足 $A^2+3A-2E=0$，证明（$A+E$）可逆，并求 $A+E$ 的逆矩阵的表达式.

$\because A^2+3A-2E=0$

$(A+E)(A+2E)=4E$

$\therefore (A+E)\left(\frac{A+2E}{4}\right)=E$

$\therefore A+E$ 可逆，逆矩阵为 $\frac{A+2E}{4}$

五、(本题 5 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $B$ 满足 $A^{-1}=A^*B+B$，求 $B$.

$|A|=1$

$B=(A^*+E)^{-1}A^{-1}$

$=(|A|E+A)^{-1}$

6

$=(A+E)^{-1}$

$=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&6&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

六、(本题 4 分)根据偏工、偏理选做下列两道题中的一道题

* （偏工）求过点$(-1,2,3)$，垂直与直线 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$，且平行与平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

* （偏理）设有向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\4\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\-3\\1\\1\end{pmatrix}$，

求（1）该向量组的秩，

（2）该向量组的一个极大无关组.

$$? \Leftarrow \boxed{求 A} = \begin{vmatrix} x_1^2 & 1+x_1x_2 & \cdots & 1+x_1x_n \\ 1+x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & 1+x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_nx_1 & 1+x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{vmatrix}$$

七、(本题 2 分)

求$\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & 1+a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & 1+a_4b_4 \end{vmatrix}$

$= 1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_1b_1$

网盘计划
Q群953062322

电影城库
Q群725682926

八、(本题 2 分)

已知将 4 阶可逆矩阵 $A$ 的第一行乘 $k$ 加到第二行得到矩阵 $B$，试求 $AB^{-1}$ 及 $|B^{-1}A|$.

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\k&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}A=B$ $\qquad \therefore B^{-1}=A^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\k&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$

$\shortparallel$

$|A^{-1}|\times|\times|A|$

$\shortparallel$

$1$

$\therefore AB^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-k&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

# 尔滨工业大学2006级《代数与几何》期中试题及答案

（此卷满分30分）

注：本试卷中$E$表示单位矩阵，秩$(A)$、$A^*$、$A^T$分别表示$A$的秩，$A$的伴随矩阵和$A$的转置矩阵.



一、填空题（本题每小题1分，共4分）

1. $n$为自然数，则$\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\end{pmatrix}\right)^n=$ $3^{n-1}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\-6 & -3 & -6\\4 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

2. 设$A,B$都是$n$阶可逆矩阵，则$\begin{pmatrix}A & C\\0 & B\end{pmatrix}^{-1}=$ $\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\\0 & B^{-1}\end{pmatrix}$.

3. 设$A$为3阶方阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$，则$\left|(\dfrac{1}{3}A)^{-1}-10A^*\right|=$ $-16$.

4. 设4阶方阵$A$和$B$的伴随矩阵为$A^*$和$B^*$，且$r(A)=3$，$r(B)=4$，则$r(A^*B^*)=$ 1.

$R(A^*)=1$ $\quad$ $1+4-4\le \quad \le 1$

$R(B^*)=4$

二、选择题（本题每小题1分，共4分）

1. 设矩阵$A=(a_{ij})_{4\times4}$，$B=(b_{ij})_{4\times4}$，且$a_{ij}=-2b_{ij}$，则行列式$|B|$的值为 【 A 】

(A) $2^{-4}|A|$； (B) $2^{4}|A|$； (C) $-2^{-4}|A|$； (D) $-2^{4}|A|$.

2. 行列式$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\5 & 4 & 2 & 3\\5^2 & 4^2 & 2^2 & 3^2\\5^3 & 4^3 & 2^3 & 3^3\end{vmatrix}$的值为 $(4-5)(2-5)(3-5)(2-4)(3-4)(3-2)$ 【 C 】

(A) $-18$； (B) 18； (C) $-12$； (D) 12.

3. 若$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$A=\alpha\beta^T$，$B$是4阶方阵，$r(B)=2$，则$r(AB-2B)$为 【 B 】

$(A-2E)B$

$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 4\\1 & 0 & 3 & 4\\0 & 0 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ $\quad R(A-4E)=4$

(A) 4； (B) 2； (C) 1； (D) 0.



4. 设$A$为3阶方阵，将$A$的第1列与第2列交换得$B$，再把$B$的第2列加到第3列上得$C$. 则满足$AQ=C$的可逆矩阵$Q$为 【 D 】

$C=A\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad Q=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$； (B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$； (C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$； (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

三、(本题5分)

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & t \\ 0 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & t & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$，且 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ -4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $r(A) = 2$，求 $t$.　　$\therefore t = 3$

四、(本题5分)

计算行列式
$$D = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}.$$

五、(本题6分)

设 $A, B$ 为3阶方阵，$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B - 4E = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $(B-4E)^{-1} = ($ $A$ 满足 $2A^{-1}B = B - 4E$，求 $A$.

$2B = AB - 4A$
$= A(B - 4E)$

六、(本题4分)

$\therefore A = 2B(B-4E)^{-1} =$

设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，且 $A^T = A^{-1}$，$|A| < 0$，求 $|A+E|$.

$|A| = \frac{1}{|A|}$　$|A| = -1$　$|A+E| = |A + AA^T|$

七、(本题2分)

设 $A$ 和 $B$ 为 $n$ 阶矩阵，且满足 $A^2 = A$，$B^2 = B$，$r(A+B-E) = n$，证明：$r(A) = r(B)$

# 参考答案

一、填空题

1、$3^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -6 & -3 & -6 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. 2、$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$. 3、$-16$. 4、1.

二、填空题

1、A.　　2、C.　　3、B.　　4、D.



三、解：$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & t-3 & 0 \end{pmatrix}$，$t=3$.

四、解：

$$D=\begin{vmatrix} -m+\sum_{i=1}^{n}x_i & x_2 & \cdots & x_n \\ -m+\sum_{i=1}^{n}x_i & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -m+\sum_{i=1}^{n}x_i & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$=(-m+\sum_{i=1}^{n}x_i)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$=(-m+\sum_{i=1}^{n}x_i)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$



$$=(-m+\sum_{i=1}^{n}x_i)(-m)^{n-1}$$

五、解：因为$2A^{-1}B=B-4E$，所以$2B=AB-4A=A(B-4E)$.

而$B-4E$可逆，则$A=2B(B-4E)^{-1}$.



$$B-4E=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\quad (B-4E)^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

所以

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

六、解：因为 $|A+E|=|A+AA^{\mathrm{T}}|=|A||E+A^{\mathrm{T}}|=|A||A+E|$

$$(1-|A|)|A+E|=0,|A|<0,$$

所以
$$|A+E|=0.$$

七、证法1：因为 $A(A+B-E)=A^2+AB-A=AB$，

所以
$$(A+B-E)B=AB+B^2-B=AB,$$

因为
$$r(A+B-E)=n,$$

所以 $A+B-E$ 可逆.

$$r(A(A+B-E))=r(A)=r(AB),$$

$$r(A+B-E)B)=r(B)=r(AB),$$

故
$$r(A)=r(B).$$

证法2：因为 $A^2=A$，$A(A-E)=0$，

所以

$$r(A)+r(A-E)\le n=r(A+B-E)\le r(A-E)+r(B)$$

$\Rightarrow r(A)\le r(B)$.

同理因为 $B^2=B$，$B(B-E)=0$，

所以

$$r(B)+r(B-E)\le n=r(A+B-E)\le r(B-E)+r(A)$$

$\Rightarrow r(B)\le r(A)$.

故
$$r(A)=r(B).$$

# 哈尔滨工业大学2007级《代数与几何》期中试题及答案

（此卷满分30分）

注：本试卷中 $E$ 表示单位矩阵，秩$(A)$、$A^*$、$A^{\mathrm{T}}$分别表示 $A$ 的秩，$A$ 的伴随矩阵和 $A$ 的转置矩阵.

一、填空题（本题每小题1分，共5分）

1. 设矩阵 $A$ 满足 $A^2+A-4E=0$，则 $(A-E)^{-1}=$ ________.

2. 设 $|A|=\begin{vmatrix}1&x&x&x\\x&1&x&x\\x&x&1&x\\x&x&x&1\end{vmatrix}$，若 $r(A^*)=1$，则 $x=$ ________.

3. 设$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,则$\left|E_n-\beta\alpha^T\right|=$ ________.

4. 设$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$，则矩阵$X=$ ________.

5. 已知$\alpha,\beta,\gamma$为单位向量,且满足$\alpha+\beta+\gamma=0$，则$\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha=$ ________.

二、选择题（本题每小题1分，共5分）

1. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{pmatrix}$及3阶方阵$B\neq0$，且满足$AB=0$，则$\lambda$的值为 【 】

(A) 4； (B) $-4$； (C) 3； (D) $-3$.

2. 已知平面$\pi:x+4y-z+5=0$，直线$L:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-4}=z$，则必有 【 】

(A) $L$与$\pi$垂直； (B) $L$与$\pi$相交于一点但不垂直；

(C) $L$在$\pi$上； (D) $L$与$\pi$平行,但不在$\pi$上.

3. 已知$A,B$均为4阶方阵,$|A|=1,|B|=-2$，则$\begin{vmatrix}0&2A\\-AB&3B\end{vmatrix}$的值为 【 】

(A) $-16$； (B) 16； (C) 32； (D) $-32$.

4. 设$A,B$都是可逆矩阵，且$AB=BA$，则必有 【 】

(A) $A^{-1}B=B^{-1}A$； (B) $AB^{-1}=B^{-1}A$；

(C) $AB=B^{-1}A^{-1}$； (D) $\left|(A^{-1}+B^{-1})(A+B)\right|\neq0$.

5. 下列命题错误的是 【 】

(A) 若矩阵$A$和$B$可交换，则矩阵$AB^6$和$BA^6$可也交换；

(B) 若矩阵$A-B$和$A+B$可交换，则矩阵$A$和$B$也可交换；

(C) 若矩阵$AB$和$BA$可交换，则矩阵$A$和$B$也可交换；

(D) 若矩阵$A$和$B$可交换，则矩阵$A^T$和$B^T$也可交换.

大物实验群
290028380

三、(本题5分)

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -5\\0 & 1 & -1 & a\\-1 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$，求$r(A)$.

四、(本题5分)

求经过直线$\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+1}{2}$且垂直于平面$x-4y-3z+7=0$的平面方程

五、(本题6分)

设$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$B$满足$A^*BA-2A^*B=4E$，求$B$.

六、(本题2分)

设$A$为$m\times n$阶矩阵，$r(A)=n$. 证明:存在$n\times m$矩阵$B$，使$BA=E_n$.

七、(本题2分)

设$A$为$n$阶方阵，$A^2=A$，证明$A+E$可逆.

## 参考答案

一、填空题

1、$\dfrac{A+2E}{2}$. 2、1或$-\dfrac{1}{3}$. 3、$1-x_1y_1-\cdots-x_ny_n$. 4、$\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\1 & -4 & 7\\1 & -2 & 2\end{pmatrix}$. 5、$-\dfrac{3}{2}$.

二、选择题

1、B. 2、A. 3、D. 4、B. 5、C.

三、解：$A\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -5\\0 & 1 & -1 & a\\0 & 0 & 0 & a-1\end{pmatrix}$，$r(A)=\begin{cases}2, & a=1,\\3, & a\neq 1.\end{cases}$



四、解：$s=(5,1,2),n_1=(1,-4,-3)$,

$$n=\begin{vmatrix}i & j & k\\5 & 1 & 2\\1 & -4 & -3\end{vmatrix}=5i+17j-21k$$

$$5(x-2)+17(y+3)-21(z+1)=0,$$

故所求的平面方程为

$$5x+17y-21z+20=0.$$

五、解：因为 $AA^{*}BA-2AA^{*}B=4A$， $|A|B(A-2E)=4A$

$$|A|=2,\quad |A-2E|=2\neq 0,$$

所以 $A-2E$ 可逆，且

$$B=2A(A-2E)^{-1},$$





$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

所以

$$B=2A(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&4\\2&0&2\\2&2&4\end{pmatrix}.$$

六、证法 1：因为 $r(A)=n$，即 $A$ 为列满秩矩阵，存在 $m$ 阶可逆阵 $P$，使

$$PA=\begin{pmatrix}E_n\\0\end{pmatrix}$$

令 $$B_{n\times m}=(E_n\ \ 0)P$$

所以

$$B_{n\times m}A=(E_n\ \ 0)PA=(E_n\ \ 0)\begin{pmatrix}E_n\\0\end{pmatrix}=E_n.$$

证法 2：存在 $m$ 阶可逆阵 $P$，使 $PA=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$，其中 $A_1$ 为 $n$ 阶可逆阵.

令 $$B_{n\times m}=(A_1^{-1}\ \ 0)P$$

所以

$$B_{n\times m}A=(A_1^{-1}\ \ 0)PA=(A_1^{-1}\ \ 0)\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=E_n.$$

七、 解：因为 $A^2+A-2A=0$

$$A(A+E)-2(A+E)+2E=0$$

$$(A+E)(A-2E)=-2E$$

所以

$$(A+E)^{-1}=E-\frac{A}{2}.$$

# 哈尔滨工业大学2008级《代数与几何》期中试题及答案

（此卷满分30分）

注：本试卷中$E$表示单位矩阵，$r(A)$、$A^*$、$A^{\mathrm{T}}$分别表示$A$的秩，$A$的伴随矩阵和$A$的转置矩阵.

一、填空题（每小题1分，共5分）

1. 设$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_{n+1}\ \cdots\ \alpha_{n+m})$是$n+m$阶方阵，$|A|=a$. 则

$|\alpha_{n+1}\ \alpha_{n+2}\ \cdots\ \alpha_{n+m}\ \alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n|=$________.

2. 点$M(1,0,2)$到直线$L:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$的距离$d=$________.

3. 设$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}0&a&a&a\\a&0&a&a\\a&a&0&a\\a&a&a&0\end{pmatrix}$，则$r(A)=$________.

4. 已知$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，则$(E+A+A^2+A^3+A^4+A^5)^{-1}=$________.

5. 设$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix}0&A^*\\(B^{-1})^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}^{-1}=$________.

二、选择题（每小题1分，共5分）

1. 设$A,B$为$n$阶可逆阵，满足$(AB)^2=E$，则下列各式未必正确的是 【　】

（A）$A=B^{-1}$；（B）$ABA=B^{-1}$；（C）$BAB=A^{-1}$；（D）$(BA)^2=E$.

2. 设$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}+ka_{23}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}+ka_{33}&a_{33}\\a_{11}&a_{12}+ka_{13}&a_{13}\end{pmatrix}$,

$$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&k&1\end{pmatrix}$$，则必有 【　】

(A)$A=P_2^{-1}BP_1^{-1}$； (B)$A=P_1^{-1}BP_2^{-1}$； (C)$A=P_1^{-1}P_2^{-1}B$； (D)$A=BP_1^{-1}P_2^{-1}$.

3. 设有直线$L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$及平面$\pi:4x-2y+z-2=0$，则必有 【　】

(A) $L$平行于$\pi$；(B) $L$在$\pi$上；(C) $L$垂直于$\pi$；(D) $L$与$\pi$ 斜交.

4. 设$A$是$n$阶非零实矩阵，且$a_{ij}=A_{ij}(\forall i,j=1,2,\cdots,n)$，则矩阵$A$必为 【　】

(A) 对称矩阵； (B) 反对称矩阵； (C) 初等矩阵； (D) 可逆矩阵.

5. 设$A$是$n$阶非零矩阵，且$A^3=0$，则有 【　】

(A) $A-E$不可逆,$A+E$不可逆； (B) $A-E$不可逆,$A+E$可逆；

(C) $A-E$可逆,$A+E$不可逆； (D) $A-E$可逆,$A+E$可逆.

三、(本题5分)

设矩阵$A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&1\\1&0&0&3\end{pmatrix}$，求(1)$|A|$；(2)$r(A)$.



四、(本题5分)

求直线$L:\begin{cases}3x-2z-6=0\\x+y-2z+1=0\end{cases}$,在平面$\pi:x+y+2z-5=0$上的投影方程.

五、(本题6分)

设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵$B$满足$ABA^*=2BA^*+E$,求矩阵$B$.



六、(本题2分)

计算行列式$\begin{vmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_{n-1}&1+a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&1+a_2b_{n-1}&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n-1}b_1&1+a_{n-1}b_2&\cdots&a_{n-1}b_{n-1}&a_{n-1}b_n\\1+a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_{n-1}&a_nb_n\end{vmatrix}$.



七、(本题2分)

设$A$为$m\times n$矩阵,$r(A)=r$.证明:存在$m\times r$矩阵$P$,$r(P)=r$，$r\times n$矩阵$Q$,$r(Q)=r$，使$A=PQ$.

# 参考答案

一、$(-1)^{mn}a$;　$\dfrac{\sqrt{30}}{6}$;　$\begin{cases}0, a=0\\1, a\neq 0\end{cases}$;　$E-A=\begin{pmatrix}1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1\end{pmatrix}$;　$\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

二、1、A.　2、B.　3、C.　4、D.　5、D.

三、解:

$$|A|=3^4-1=80$$

$$r(A)=4.$$

四、解:

$$(3x-2z-6)+\lambda(x+y-2z+1)=0$$

$$n_1\cdot n=0,\quad \lambda=-\frac{1}{2}$$

$$5x-y-2z-13=0$$

$$\begin{cases}5x-y-2z-13=0,\\ x+y+2z-5=0.\end{cases}$$

五、解:

$$|A|=3$$

$$ABA^*A=2BA^*A+A$$

$$3AB=6B+A$$

$$(3A-6E)B=A$$

$$|3A-6E|=27\neq 0$$

$3A-6E$可逆.

$$B=(3A-6E)^{-1}A$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \\ & & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

六、解:

$$
\text{原式} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1+a_1b_n & a_1b_{n-1} & \cdots & a_1b_2 & a_1b_1 \\ a_2b_n & 1+a_2b_{n-1} & \cdots & a_2b_2 & a_2b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}b_n & a_{n-1}b_{n-1} & \cdots & 1+a_{n-1}b_2 & a_{n-1}b_1 \\ a_nb_n & a_nb_{n-1} & \cdots & a_nb_2 & 1+a_nb_1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left| E_n + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{pmatrix} \right|
$$

$$
= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (1 + a_1b_n + a_2b_{n-2} + \cdots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1).
$$

七、证:

因为 $r(A)=r$,所以存在 $m$ 阶可逆阵 $P_1$, $n$ 阶可逆阵 $Q_1$,使

$$
P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
A = P_1^{-1} \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} Q_1^{-1}
$$

令 $P_{m\times r} = P_1^{-1}\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}, r(P) = r, Q_{r\times n} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} Q_1^{-1}, r(Q) = r$

$$
A = P_{m\times r}Q_{r\times n}.
$$

# 哈尔滨工业大学 2010 级 期中试题及答案

(此卷满分 30 分)

注:本试卷中 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵,$R(\boldsymbol{A})$,$\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩,$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵和 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

**一、填空题(每小题 1 分,共 5 分)**

1. 如果行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & x & 1 \end{vmatrix}=0$,则 $x=$________.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^n=$________.

3. 过点 (1,1,1) 且与直线 $\begin{cases} y+z-2=0 \\ x+2y+z+4=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程为________.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=$________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵,$\boldsymbol{\beta}$ 是 $n\times 1$ 矩阵,$a,b,c$ 是常数,且 $|\boldsymbol{A}|=a$,$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & b \end{vmatrix}=0$,则行列式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} & c \end{vmatrix}=$________.

**二、选择题(每小题 1 分,共 5 分)**

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $4\times 3$ 矩阵,且 $R(\boldsymbol{A})=2$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,则 $R(\boldsymbol{AB})$ 的值为(　　).

(A)4　　(B)3　　(C)2　　(D)1

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$,则必有(　　).

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$　　(B) $|\boldsymbol{B}|\neq 0$

(C) $|\boldsymbol{A}^*|=0$　　(D) $|\boldsymbol{B}^*|\neq 0$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 中位于 $(i,j)$ 的元素为(　　).

(A) $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\boldsymbol{A}_{ki}$　　(B) $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{A}_{ki}$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

(C) $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\boldsymbol{A}_{ik}$　　　　(D) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{A}_{kj}$

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶可逆矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 $-1$ 倍加到第 3 行得 $\boldsymbol{B}$，则应有(　　).

(A) 将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1 行的 $-1$ 倍加到第 3 行得 $\boldsymbol{B}^{-1}$

(B) 将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1 列的 1 倍加到第 3 列得 $\boldsymbol{B}^{-1}$

(C) 将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 3 行的 $-1$ 倍加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}^{-1}$

(D) 将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 3 列的 1 倍加到第 1 列得 $\boldsymbol{B}^{-1}$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，满足 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，若 $a_{31} = a_{32} = a_{33} > 0$，则 $a_{31}$ 的值为(　　).

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) 3　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\sqrt{3}$

**三、(5 分)** 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x & x & x & x & y \\ x & x & x & y & x \\ x & x & y & x & x \\ x & y & x & x & x \\ y & x & x & x & x \end{pmatrix}$. 求(1) $|\boldsymbol{A}|$；(2) $R(\boldsymbol{A})$.

**四、(5 分)** 求直线 $l: \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ 在平面 $x + 2y - z = 0$ 上的投影直线的方程.

**五、(5 分)** 设 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{E}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

**六、(3 分)** 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 4 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}| = 2$，$|\boldsymbol{B}| = 3$，$|\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}| = 2$，求 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}|$.

**七、(2 分)** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A}) = r$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可表为 $r$ 个秩为 1 的矩阵的和.

年　　月　　日

心得 体会 拓广 疑问

# 参考答案

一、1. $\frac{3}{2}$　2. $(-4)^{n-1}\boldsymbol{A}$　3. $x-y+z-1=0$　4. $\begin{pmatrix}2&5&6\\1&4&6\\3&6&6\end{pmatrix}$

5. $a(c-b)$

二、1. C　2. C　3. B　4. D　5. A

**三、解**

$$\begin{vmatrix}x&x&x&x&y\\x&x&x&y&x\\x&x&y&x&x\\x&y&x&x&x\\y&x&x&x&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y&x&x&x&x\\x&y&x&x&x\\x&x&y&x&x\\x&x&x&y&x\\x&x&x&x&y\end{vmatrix}=(y+4x)(y-x)^4$$

$$R(\boldsymbol{A})=\begin{cases}0, x=y=0\\1, x=y\neq 0\\4, y=-4x\\5, y\neq x \text{ 且 } y\neq -4x\end{cases}$$

**四、解**：记投影直线为 $l_1$，则 $l_1$ 可视为它与直线 $l$ 所确定的平面 $\pi_1$ 与已知平面 $\pi$ 的交线. 过直线 $l$ 的平面束方程为

$$2x-y+z+\lambda(x+y-z+1)=0$$

即

$$(\lambda+2)x+(\lambda-1)y(1-\lambda)z+(\lambda-1)=0$$

由 $\pi_1\perp\pi$，有

$$(\lambda+2)+2(\lambda-1)-(1-\lambda)=0$$

解得

$$\lambda=\frac{1}{4}$$

因此，平面 $\pi_1$ 为

$$3x-y+z-1=0$$

所求投影直线 $l_1$ 的方程为

$$\begin{cases}3x-y+z-1=0\\x+2y-z=0\end{cases}$$

**五、解**：等式两边左乘以 $\boldsymbol{A}$ 得

$$\frac{1}{3}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

即

$$\frac{1}{3}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

因 $|\boldsymbol{A}|=1+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=6$，上式整理得

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$$

而

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

是可逆矩阵，因此

$$\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

**六、解**

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}| &=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}|\\ &=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{B}^{-1}|\\ &=2|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}|\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

**七、证**：由 $r(\boldsymbol{A})=r$ 知，存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使

$$\begin{aligned}\boldsymbol{PAQ}&=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\\ &=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2+\cdots+\boldsymbol{B}_r\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{B}_i(i=1,2,\cdots,r)$ 表示第 $i$ 行第 $i$ 列的元素为 1，其余元素均为 0 的 $m\times n$ 矩阵，因此有 $r(\boldsymbol{B}_i)=1$，并且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2+\cdots+\boldsymbol{B}_r)\boldsymbol{Q}^{-1}\\ &=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Q}^{-1}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Q}^{-1}+\cdots+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}_r\boldsymbol{Q}^{-1}\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆，知

$$r(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Q}^{-1})=r(\boldsymbol{B}_i)=1\quad(i=1,2,\cdots,r)$$

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

# 哈尔滨工业大学 2011 级期中试题及答案

（此卷满分 30 分）

注：本试卷中 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵，$R(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵和 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

**一、填空题（每小题 1 分，共 4 分）**

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=$________.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，则 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$________.

（注：用 $\boldsymbol{A}$ 表示即可）

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，且 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$，则 $a,b$ 应满足的条件为________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m$ 阶可逆矩阵，则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}^{-1}=$________.

**二、选择题（每小题 1 分，共 4 分）**

1. 过点 $(2,-1,3)$ 且和平面 $\pi_1: 2x-y+3z-1=0$ 与 $\pi_2: 5x+4y-z-7=0$ 都平行的直线方程为（　　）.

(A) $\dfrac{x-2}{11}=\dfrac{y+1}{-17}=\dfrac{z-3}{-13}$

(B) $\dfrac{x-2}{-11}=\dfrac{y+1}{-17}=\dfrac{z-3}{13}$

(C) $11x-17y-13z=0$

(D) $11x+17y-13z=0$

2. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}+2a_{11} & a_{33}+2a_{13} & a_{32}+2a_{12} \end{pmatrix}$$

年　　月　　日

心得 体会 拓广 疑问

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，则必有(　　).

(A)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$

(B)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$

(C)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3$

(D)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n>1)$ 阶方阵，则下列结论正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|$

(B)$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^*)$

(C)$\boldsymbol{A}^*=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{-1}$

(D) 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$

4. 设 $n\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=(\lambda\ 0\ \cdots\ 0\ \lambda)^{\mathrm{T}}$，常数 $\lambda>0$，且矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则 $\lambda$ 的值为(　　).

(A)1　　(B) $-1$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $-\dfrac{1}{2}$

**三、(6 分)** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&t\\3&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为 $4\times 3$ 的非零矩阵，且 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$. (1) 求 $t$ 的值；(2) 求 $R(\boldsymbol{B})$.

**四、(5 分)** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&2&1\\0&0&3&0&1\\0&4&0&0&1\\5&0&0&0&1\end{vmatrix}$.

**五、(6 分)** 已知空间中三点 $A(1,0,-1)$，$B(1,-2,0)$，$C(1,1,1)$.

(1) 求以 $OA$，$OB$ 为邻边的平行四边形的面积；

(2) 求以 $O,A,B,C$ 为顶点的四面体的体积.

**六、(3 分)** 设有两个 $3\times 1$ 矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=(1\ 2\ -1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(-2\ 1\ -2)^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，求 $|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$ 的值.

**七、(2 分)** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵，且满足 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^m=\boldsymbol{0}(m\geqslant 1)$，证明：$\boldsymbol{A}$ 可逆.

年　月　日

# 参考答案

一、1. 0　2. $\dfrac{A+3E}{2}$　3. $a\neq b$ 且 $a+2b=0$　4. $\begin{pmatrix}-B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$

二、1. A　2. B　3. D　4. C

三、解：(1) 由 $BA=0$，得 $R(A)+R(B)\leqslant 3$. 而 $B\neq 0$，知 $R(B)\geqslant 1$，故 $R(A)\leqslant 2$，得

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & t\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=5t-15=0$$

故 $t=3$.

(2) 因 $R(A)=2$，由 $R(A)+R(B)\leqslant 3$ 得 $R(B)\leqslant 1$. 故 $R(B)=1$.

四、解

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{5\times 4}{2}}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)5!$$

$$=120\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$

五、解：(1) $S=|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\left\|\begin{matrix}i & j & k\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{matrix}\right\|=|-2i-j-2k|=3.$

(2) $V=\dfrac{1}{6}\,|[\overrightarrow{OA}\ \ \overrightarrow{OB}\ \ \overrightarrow{OC}]|=\dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right\|=\dfrac{5}{6}.$

六、解

$$\begin{aligned}|A^2-2A+2E_3|&=|(A-E_3)^2+E_3|\\ &=|(-\alpha\beta^{\mathrm T})^2+E_3|\\ &=|(\alpha\beta^{\mathrm T})^2+E_3|\\ &=|(\beta^{\mathrm T}\alpha)(\alpha\beta^{\mathrm T})+E_3|\\ &=|2(\alpha\beta^{\mathrm T})+E_3|\\ &=|E_1+2\beta^{\mathrm T}\alpha|=|1+4|=5\end{aligned}$$

七、证：因为

$$(A+E)^m=0$$

即

年　月　日

$$\boldsymbol{A}^m + \mathrm{C}_m^1\boldsymbol{A}^{m-1} + \mathrm{C}_m^2\boldsymbol{A}^{m-2} + \cdots + \mathrm{C}_m^{m-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$$

则有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{m-1} + \mathrm{C}_m^1\boldsymbol{A}^{m-2} + \cdots + \mathrm{C}_m^{m-1}\boldsymbol{E}) = -\boldsymbol{E}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

# 哈尔滨工业大学2011级《代数与几何》期中试题B及答案

（此卷满分30分）

注：本试卷中 $E$ 表示单位矩阵，$R(A)$、$A^*$、$A^T$ 分别表示 $A$ 的秩，$A$ 的伴随矩阵和 $A$ 的转置矩阵.

## 一、填空题（每小题1分，共4分）

1. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1-a_1 & 2b_2-a_2 & 2b_3-a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=8$，则行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=$________.

2. 如果向量 $\alpha=(1,-2,3)$, $\beta=(3,t,1)$, $\gamma=(1,7,-5)$ 共面，则 $t=$________.

3. 设 $A$ 为4阶方阵，且 $R(A)=2$，则 $|3A^*-2A|=$________.



4. 设矩阵 $A$ 满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$，则 $A=$________

## 二、选择题（每小题1分，共4分）

1. 已知向量 $a$，$b$，$c$ 满足 $(a\times b)\cdot c=4$，则 $[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)$ 的值为【 】

（A）2；（B）4；（C）6；（D）8.

2. 设 $A$ 为 $m\times n$ 矩阵，$B$ 为 $n\times m$ 矩阵，且满足 $AB=E_m$，且 $R(A)=r$，则有【 】

（A）$r\geq m$；（B）$r\leq m$；（C）$r=m$；（D）$r>n$.

3. 设 $A$，$B$ 均为 $n$ 阶矩阵，则下列结论错误的是【 】

（A）若 $A^2=B^2$，则 $A=B$ 或 $A=-B$；（B）$|A^T+B^T|=|A+B|$；

（C）$E-A^2=(E+A)(E-A)$；（D）$|(AB)^k|=|A|^k|B|^k$.

4. 设 $A$ 为 $n$（$n>1$）阶矩阵，$B$ 为 $n$ 阶可逆矩阵，则 $\left|-2\begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}\right|$ 的值为【 】

（A）$\dfrac{(-2)^n|A|}{|B|}$；（B）$\dfrac{4^n|A|^{n-1}}{|B|}$；（C）$4^n|A|^{n-1}|B|$；（D）$(-2)^n|A||B|$.

三、(本题 6 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\t+1&2&3\end{pmatrix}$，问 $t$ 为何值时，$R(A)=2$；$t$ 为何值时 $R(A)=3$.

四、(本题 5 分)

求过点 $(1,0,1)$，且与平面 $\pi_1: x-2y+3z+2=0$ 及平面 $\pi_2: x+2y-3z-2=0$ 都垂直的平面方程.

五、(本题 6 分)

设矩阵 $A$, $B$ 满足 $A^*BA=2BA-8E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 $B$.

六、(本题 3 分)



设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$，(1) 求 $|A|$；(2) 证明 $A$ 可逆；

(3) 若 $A^{-1}=E+kB$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，求常数 $k$.

七、(本题 2 分)

设 $A$, $B$ 均为 $m\times n$ 矩阵，且 $R(A)=R(B)$；证明：$A$ 与 $B$ 等价.

## 参考答案



一、填空题

1. 4　2. 3　3. 0　4. $\begin{pmatrix}0&1&0&2\\1&0&-3&-8\\-10&0&31&83\end{pmatrix}$

二、选择题

1. D　　2. C　　3. A　　4. B

三、解：$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\t+1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&1\\t&1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\t&1\end{vmatrix}=t-1=0$

$\therefore$ 当$t=1$时，$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\2&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$R(A)=2,$$

当$t\neq1$时，$|A|\neq0$，$R(A)=3$.

四、解：平面$\pi_1$的法向量为$n_1=(1,-2,3)$，$\pi_2$的法向量为$n_2=(1,2,-3)$

所求平面的法向量为$n=n_1\times n_2=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&-2&3\\1&2&-3\end{vmatrix}=6j+4k$

故所求的平面方程为 $3y+2z-2=0$.

五、解：等式两边左乘$A$得：

$AA^*BA=2ABA-8A$

由$|A|=-2$知$A$可逆，上式两边右乘$A^{-1}$，得：

$-2B=2AB-8E$

$\therefore(A+E)B=4E$

$$A+E=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix},\ \therefore\ (A+E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&&\\&-1&\\&&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

故$B=4(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&&\\&-4&\\&&2\end{pmatrix}$.

六、解：(1)
$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}=5$$

或
$$|A|=\left|E_4+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 1\ 1\ 1)\right|=|E_1+4|=5.$$

(2) $\because |A|\neq 0 \therefore A$ 可逆

（3） $A^{-1}=E+kB$

$$B^2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 1\ 1\ 1)=4B$$

$$\begin{aligned}AA^{-1}&=(E+B)(E+kB)=E+(1+k)B+kB^2\\&=E+(1+k)B+4kB\\&=E+(1+5k)B\\&=E.\end{aligned}$$



所以 $1+5k=0$，故 $k=-\dfrac{1}{5}$.

七、证：设 $R(A)=R(B)=r$，所以存在可逆阵 $P_1$，$Q_1$，$P_2$，$Q_2$ 使
$$P_1AQ_1=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}_{m\times n}=P_2BQ_2$$

则有
$$P_1AQ_1=P_2BQ_2$$

即
$$P_2^{-1}P_1AQ_1Q_2^{-1}=B$$

而 $P_2^{-1}P_1$ 与 $Q_1Q_2^{-1}$ 均可逆，故 $A$ 与 $B$ 等价.

# 2012-2013 期中

一、填空题(每题 3 分，共 30 分)

1.设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&-1&-2\\4&3&3\end{pmatrix}$,则$[(-2A)^*]^{-1}=$______

2.设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵$A^*\neq 0$,若$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4$是非齐次线性方程组$AX=\beta$的互不相同的解，则对应的齐次线性方程组$AX=0$的基础解系含有____个向量

3.当$\lambda=$___时，直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$与$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$相交

4. 设$\alpha_1=(1+t,1,1),\alpha_2=(1,1+t,1),\alpha_3=(1,1,t+1),\beta=(0,t,t^2)$，当$t$___时$\beta$可用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且唯一

5.$A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$,则 A对应特征值$\lambda=2$的一个特征向量$\alpha=$___

6.$D=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=$______

7.$\begin{pmatrix}1&c&0\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}^n=$______

8.$A=\begin{pmatrix}2&1&0&1\\3&-1&-2&3\\4&3&1&-2\\9&3&-1&2\\1&3&2&-1\end{pmatrix}$,则$r(A)=$___

9.设$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}$,$\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$,且 A 相似于 Λ，则$a=$___,$b=$____

10.$\frac{x^2}{4}-y^2-z^2=-1$表示的曲面名称为______

二、选择题(每题 3 分，共 30 分)

1.下列结论错误的是 (　　)

(A)若 A 与 B 为 n 阶可逆矩阵，则 AB 可逆　(B)若 A 与 B 为 n 阶正交矩阵，则 AB 正交

(C)若 A 与 B 为 n 阶正交矩阵，则 AB 正定　(D)若 A 与 B 为 n 阶对称阵，则 AB 对称

2.假设 A 是 n 阶方阵，其秩$r<n$,则在 A 的 n 个行向量中， (　　)

(A)必有 r 个行向量线性无关

(B)任意 r 个行向量线性无关

(C)任意 r 个行向量都构成极大无关组

(D)任意一个行向量都可以由其他 r 个行向量线性表示

3.设$A,B$为方阵，分块对角阵$C=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$,则$C^*=$(　　)

(A)$\begin{pmatrix}A^*&0\\0&B^*\end{pmatrix}$　(B)$\begin{pmatrix}|A|A^*&0\\0&|B|B^*\end{pmatrix}$　(C)$\begin{pmatrix}|B|A^*&0\\0&|A|B^*\end{pmatrix}$　(D)$\begin{pmatrix}|A||B|A^*&0\\0&|A||B|B^*\end{pmatrix}$

4.设 A 是 n 阶矩阵，$\alpha$是 n 维列向量，且$r\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}=r(A)$,则线性方程组(　　)

(A)$AX=\alpha$必有无穷解　　(B) $AX=\alpha$必有唯一解

(C) $\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 仅有零解　　(D) $\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 必有非零解

5.设数域 F 上三维列向量空间 V 上线性变换$\phi$在基$\{e_1,e_2,e_3\}$下表示的

矩阵为$\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$,则$\phi$在基$\{e_3,e_2,e_1\}$下表示的矩阵是(　　)

(A)$\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$　(B)$\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&0&2\\2&1&-1\end{pmatrix}$　(C)$\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&0&2\\2&-1&1\end{pmatrix}$　(D)$\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$

6.设二次型$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$，则(　　)

(A)$0<t<1$时，$f$ 正定　　(B) $-2<t<1$时，$f$ 正定

(C)$-1<t<1$时，$f$ 正定　　(D)$-2<t<2$时，$f$ 正定

7.设 A 是 3 阶方阵，1，-2，-1 为三个特征值，特征向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，若$P=(3\alpha_2,2\alpha_3,-\alpha_1)$,

则$P^{-1}(A^*+E)P$等于(　　)

(A) $\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&3\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}-2&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$

8.设 A,B 均为 n 阶方阵，若 B 可逆矩阵且满足$A^2+AB+B^2=0$，则(　　)

(A) $A$可逆，$A+B$可逆　　(B) $A$可逆，$A+B$不可逆

(C) $A$不可逆，$A+B$可逆　　(D) $A$不可逆，$A+B$不可逆

9.设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 和 B(　　)

(A)合同且相似　(B)合同且不相似　(C)不合同，但相似　(D)不合同也不相似

10.已知$R^3$的两组基$B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$,$B_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，

其中$\alpha_1=(1,1,1)^T;\alpha_2=(0,1,1)^T;\alpha_3=(0,0,1)^T$;

$\beta_1=(1,0,1)^T;\beta_2=(0,1,-1)^T;\beta_3=(1,2,0)^T$,则$B_1$，$B_2$的过渡矩阵 A 为（　　）

(A)$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&-2&2\end{pmatrix}$ (B)$\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&2\end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

三、解答题(每题 8 分，共 40 分)

1.设 $A,B,AB-E$ 皆为 n 阶可逆矩阵，证明：(1)$A-B^{-1}$是可逆矩阵 (2)$(A-B^{-1})^{-1}$也可逆

2.已知向量组(Ⅰ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (Ⅱ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ (Ⅲ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$。

如果各向量组的秩分别为：$R(\text{Ⅰ})=R(\text{Ⅱ})=3,R(\text{Ⅲ})=4$

证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为 4

3.线性方程组$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3\end{cases}$。

试证：(1)若$a_1,a_2,a_3,a_4$两两不等，则此方程组无解。

(2)设$a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq0)$，且已知$\beta_1$，$\beta_2$是方程组的两个解，其中，$\beta_1=(-1,1,1)^T,\beta_2=(1,1,-1)^T$。写出该方程组的通解。

4.$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+Cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$，秩$(f)=2$,求：

(1) C (2)用正交变换化$f(x_1,x_2,x_3)$为标准型。

5.已知平面$\pi_1$：$x-y-2z=2;\pi_2$：$x+2y+z=8;\pi_3$：$x+y+z=0$,求过$\pi_1$与$\pi_2$的交线且与平面$\pi_3$垂直的平面的方程。

# 2012-2013 期中答案

一、填空题

1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$　　2. 1　　3. $\frac{5}{4}$　　4. $t \neq 0$ 且 $t \neq 3$　　5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. 81　　7. $\begin{pmatrix} 1 & nc & \frac{1}{2}n(n-1)C^2 \\ 0 & 1 & nC \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　8. 3　　9. 0,0　　10. 单叶双曲面

二、选择题

1-5 C和D ACDC　　6-10 BAAAB

三、解答题

1.(1)证明：$\because$ AB-E 及 B 可逆 $\therefore |AB-E| \neq 0$，$|B| \neq 0$

而 $|AB-E| = |(A-B^{-1})B| = |A-B^{-1}| \cdot |B| \neq 0$

$\therefore |A-B^{-1}| \neq 0$　$\therefore A-B^{-1}$ 可逆

(2) $(A-B^{-1})^{-1} - A^{-1} = (A-B^{-1})^{-1} - (A-B^{-1})^{-1}(A-B^{-1})A^{-1}$

$= (A-B^{-1})^{-1}[E-(A-B^{-1})A^{-1}] = (A-B^{-1})^{-1}(E-E+B^{-1}A^{-1})$

$= (A-B^{-1})^{-1}(AB)^{-1}$

$\because A-B^{-1}$，及 AB可逆　$\therefore (A-B^{-1})^{-1}$，$(AB)^{-1}$ 也可逆 $(A-B^{-1})^{-1} - A^{-1}$ 可逆

2.证明：$\because R(\text{I}) = R(\text{II})$ $\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关

$\therefore \alpha_4$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。　设 $\alpha_4 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$　①

令 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4(\alpha_5 - \alpha_4) = 0$

将①代入，得 $(k_1 - \lambda_1 k_4)\alpha_1 + (k_2 - k_2\lambda_4)\alpha_2 + (k_3 - \lambda_3 k_4)\alpha_3 + k_4\alpha_5 = 0$

$\because R(\text{III}) = 4$　$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关

$\therefore \begin{cases} k_1 - \lambda_1 k_4 = 0 \\ k_2 - k_2\lambda_4 = 0 \\ k_3 - \lambda_3 k_4 = 0 \\ k_4 = 0 \end{cases}$　$\therefore k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$　$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5 - \alpha_4$ 的秩为 4

3. (1)证明：设非齐次线性方程组的系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \\ 1 & a_4 & a_4^2 \end{pmatrix}$　$\therefore r(A) \leq 3$

增广阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{pmatrix}$，$|B|$ 是范德蒙行列式。

$|B| = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)(a_4 - a_3)(a_4 - a_2)(a_4 - a_1)$

$\because a_1,a_2,a_3,a_4$两两不等 $\therefore |B|\neq 0$ $\therefore r(B)=4$ $\because r(A)\neq r(B)\therefore$无解

(2)$\because a_1=a_3=k, a_2=a_4=-k(k\neq 0)$ $\therefore$原方程组可化解为$\begin{cases}x_1+kx_2+k^2x_3=k^3\\x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3\end{cases}$

此时$r(A')=r(B')=2$. 此方程组有解，且对应的齐次线性方程组的基础解系中含有

一个解向量。$\therefore \xi=\beta_1-\beta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$为对应的齐次线性方程组的解

故原方程组的通解$X=\beta_1+C\xi=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$(C 为任意常数)

4. (1)二次型$f$的矩阵$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&C\end{pmatrix}$ $\because r(A)=2$ $\therefore |A|=0$ $\therefore C=3$

(2)$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda&-1&3\\-1&5-\lambda&-3\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}\xRightarrow{r_1+r_2}\begin{vmatrix}4-\lambda&4-\lambda&0\\-1&5-\lambda&-3\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}$

$\xRightarrow{c_1-c_2}\begin{vmatrix}4-\lambda&0&0\\-1&6-\lambda&-3\\3&-6&3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$ $\therefore \lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$

通过求解得$\lambda_1$对应的特征向量，$X_1=(-1,1,2)^T$;

$\lambda_2$对应的特征向量，$X_2=(1,1,0)^T$;

$\lambda_3$对应的特征向量，$X_3=(1,-1,1)^T$

$X_1,X_2,X_3$单位化，得$e_1=\frac{\sqrt6}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$; $e_2=\frac{\sqrt2}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $e_3=\frac{-\sqrt3}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

令$C=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt6}{3}&0&\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}$,则 C 为正交阵。通过正交变换 X=CY.

得标准型$f=4y_2^2+9y_3^2$

5. 解：设过$\pi_1$与$\pi_2$交线的平面束方程为$x-y-2z-2+(x+2y+z-8)=0$

即$(\lambda+1)x+(2\lambda-1)y+(\lambda-2)z-2-8\lambda=0$

法向量$\overrightarrow{n_1}=(\lambda+1,2\lambda-1,\lambda-2)$

平面$\pi_3$的$\overrightarrow{n_2}=(1,1,1)$，由题知$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$得 $\lambda=\frac12$ $\therefore$平面方程$\frac32x-\frac32y-6=0$

# 哈尔滨工业大学2012级《代数与几何》期中试题A及答案

（此卷满分30分）

注：本试卷中$R(A)$、$A^{\mathrm{T}}$、$A^*$分别表示$A$的秩，$A$的转置矩阵、$A$的伴随矩阵，$E$表示单位矩阵.

## 一、填空题（每小题1分，共4分）

1．行列式$\begin{vmatrix}1&0&0&2\\2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\end{vmatrix}=$____________.

2．已知两直线$L_1: x-1=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$，$L_2:\dfrac{x+2}{2}=y-1=z$，则过$L_1$且平行于$L_2$的

平面方程为____________.

3．设$A$为$n$阶方阵，且$A^2=E$，则$R(A+E)+R(A-E)=$____________.

4．设$A,B$为$n$阶方阵，且$|A|=|B|=a\neq 0$，则$\left|\begin{pmatrix}0&A^*\\B&0\end{pmatrix}^{-1}\right|=$____________

## 二、选择题（每小题1分，共4分）

1．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-1&a\\0&0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$R(AB)$的值为　【　　】

（A）0；　（B）1；　（C）2；　（D）3.

2．设$A$为$n$阶非零矩阵，只要$A^2=0$，则必有　【　　】

（A）$E+A$可逆，$E-A$可逆；　（B）$E+A$不可逆，$E-A$可逆；

（C）$E+A$可逆，$E-A$不可逆；　（D）$E+A$不可逆，$E-A$不可逆.

3．设$A$为$n$阶方阵，且$A-E$可逆，则下列等式中未必一定成立的是　【　　】

（A）$AA^*=A^*A$；

（B）$A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}$；

（C）$(A+E)(A-E)=(A-E)(A+E)$；

（D）$(A+E)(A-E)^{-1}=(A-E)^{-1}(A+E)$.

4. 设 $A, P$ 为3阶矩阵，且 $P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，若将 $P$ 的第2列加到第1列得 $Q$，则 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为　　【　　】

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；　　(B) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；

(C) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；　　(D) $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

三、(本题6分)

求过点 $M_0(2,1,3)$ 且与直线 $L:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

四、(本题5分) 设矩阵 $A=E-\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$, $B=E+2\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$，其中 $\alpha=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，求 $AB$.

五、(本题6分) 设 $A$ 为3阶可逆方阵，满足 $2A^{-1}B=B-4E$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 $A$.

六、(本题3分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3+a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3&a_1b_4\\a_2b_1&3+a_2b_2&a_2b_3&a_2b_4\\a_3b_1&a_3b_2&3+a_3b_3&a_3b_4\\a_4b_1&a_4b_2&a_4b_3&3+a_4b_4\end{pmatrix}$，$a_i, b_i$ 都不为零，求 $|A|$.

七、(本题2分) 设 $A, B$ 为 $n$ 阶方阵，且 $A^2-AB=E$.

证明：(1) $A$ 可逆；(2) $R(AB-BA+A)=n$.

# 参考答案

## 一、填空题

1．$-15$　　2．$x-3y+z+2=0$　　3．$n$　　4．$(-1)^{n^2}a^{-n}$

## 二、选择题

1．C　　2．A　　3．B　　4．D

三、解：$L:\begin{cases}x=-1+3t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$

设过 $M_0$ 与 $L$ 垂直相交的直线为 $L_0$．

$L_0$ 与 $L$ 的交点为 $P_0(-1+3t_0,\ 1+2t_0,\ -t_0)$．

$L_0$ 的方向向量为 $\overline{P_0M_0}=(3t_0-3,\ 2t_0,\ -t_0-3)$．

$\because\ L_0\perp L$，$\therefore\ 3(3t_0-3)+2\times(2t_0)+(-1)\times(-t_0-3)=0$

解得 $t_0=\dfrac{3}{7}$，$\therefore L_0$ 的方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$



四、解：$\alpha\alpha^{\mathrm T}=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}AB&=(E-\alpha^{\mathrm T}\alpha)(E+2\alpha^{\mathrm T}\alpha)\\&=E-\alpha^{\mathrm T}\alpha+2\alpha^{\mathrm T}\alpha-2\alpha^{\mathrm T}\alpha\alpha^{\mathrm T}\alpha\\&=E+\alpha^{\mathrm T}\alpha-2(\alpha\alpha^{\mathrm T})\alpha^{\mathrm T}\alpha\\&=E+\alpha^{\mathrm T}\alpha-\alpha^{\mathrm T}\alpha\\&=E\end{aligned}$$



五、解：因为 $2A^{-1}B=B-4E$，两边乘 $A$ 得

$2B=AB-4A=A(B-4E)$

$B-4E=\begin{pmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，$|B-4E|\neq 0$

$B-4E$ 可逆

$$
(B-4E\mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{array}\right)
$$

$$
(B-4E)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.
$$

$$
\therefore A=2B(B-4E)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.
$$

六、解：$|A|=\left|3E_4+\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{pmatrix}(b_1\ \ b_2\ \ b_3\ \ b_4)\right|$

哈工大资源共享
QQ 2842305604

$$
=3^3\left|3E_1+(b_1\ \ b_2\ \ b_3\ \ b_4)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{pmatrix}\right|
$$

电工实验群
737678045

$$
=27(3+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)
$$

七、证：因 $A^2-AB=E$，所以 $A(A-B)=E$

则 $A$ 与 $A-B$ 都可逆，且互逆，

$(A-B)A=E$，即 $A^2-BA=E$

故 $AB=BA$

且 $R(AB-BA+A)=R(A)=n$.



2012-1秋-V

# 哈尔滨工业大学2012级《代数与几何》期中试题B及答案

（此卷满分30分）

注：本试卷中 $R(A)$、$A^{\mathrm{T}}$、$A^{*}$ 分别表示 $A$ 的秩，$A$ 的转置矩阵、$A$ 的伴随矩阵，$E$ 表示单位矩阵.

一、填空题（每小题1分，共4分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} =$__________.

2. 已知向量 $a = 2i - 3j + k$, $b = i - j + 3k$, $c = i - 2j$，则 $(a \times b) \cdot c =$__________.

3. 设 $A$ 为3阶矩阵，$|A| = 3$，若交换 $A$ 的第1行与第2行得 $B$，则 $|BA^{*}| =$__________.

4. 已知常数 $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$，则

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & & b_1 \\ & & & & & & b_2 & \\ & & & & & \iddots & & \\ & & & & b_n & & & \\ \hline a_1 & & & & & & & \\ & a_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & a_n & & & & \end{array}\right)^{-1} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

二、选择题（每小题1分，共4分）

1. 设 $A$ 为 $m \times n$ 矩阵，$B$ 为 $n \times m$ 矩阵，若 $n > m$，且 $AB = E$，则有 【 】

（A）$R(A) = m, R(B) = m$；（B）$R(A) = m, R(B) = n$；

（C）$R(A) = n, R(B) = m$；（D）$R(A) = n, R(B) = n$.

2. 设 $A, B$ 为 $n$ 阶矩阵，下列结论错误的是 【 】

（A）$A$ 可逆，且 $AB = 0$，则 $B = 0$；（B）$A, B$ 中有一个不可逆，则 $AB$ 不可逆；

（C）$A, B$ 可逆，则 $A + B$ 可逆；（D）$A, B$ 可逆，则 $A^{\mathrm{T}}B$ 可逆.

3. 设$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$A=\alpha\beta^{T}$，$B$ 是4阶方阵，且$R(B)=3$，则$R(AB-2B)$为

【　　】

（A）4；　　（B）3；　　（C）2；　　（D）1.

4. 设$A$为3阶矩阵，$B$为3阶可逆阵，且$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，若将$B$的第2列加到第1列得$P$，则$P^{-1}AP$为　　【　　】

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；　　（B）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；　　（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

三、（本题6分）

求过点$M_0(2,0,-3)$且与直线$L:\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$垂直的平面方程.

四、（本题5分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\3&1&6\\2&t-1&-4\end{pmatrix}$，且3阶非零矩阵$B$满足$AB=0$，求$t$的值.

五、（本题6分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵$B$满足$A^{-1}=A^{*}B+B$，求矩阵$B$.

六、（本题3分）设$\alpha=(1,\ 0,\ -1)^{T}$，矩阵$A=\alpha\alpha^{T}$，$n\in\mathrm{N}$，$k$为常数，求行列式$|kE+A^{n}|$的值.

七、（本题2分）设$A,B$为$n$阶方阵，且$|A|\neq 0$，$B-E$可逆，满足$(B-E)^{-1}=(A-E)^{T}$，证明$B$可逆.

# 参考答案

一、填空题

1. $-12$　　2. $2$　　3. $-27$　　4. $\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & \frac{1}{a_1} & & & \\ & & & & & \frac{1}{a_2} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \frac{1}{a_n} \\ \hline & & & \frac{1}{b_n} & & & & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & & \\ & \frac{1}{b_2} & & & & & & \\ \frac{1}{b_1} & & & & & & & \end{array}\right)$

二、选择题

1. A　　2. C　　3. B　　4. D

三、解：$L$ 的方向向量即为平面的法向量 $n$

$$\therefore n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=-16i+14j+11k$$

故所求平面方程为：$-16(x-2)+14y+11(z+3)=0$

$$16x-14y-11z-65=0$$

四、解：$\because B\neq 0$，　$\therefore R(B)\geq 1$

$$AB=0,\quad R(A)+R(B)\leq 3$$

所以 $R(A)\leq 3-R(B)\leq 3-1=2$，

$$|A|=0,\quad |A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & t-1 & 4 \end{vmatrix}=-12(t+1)=0$$

$\therefore t=-1$.

五、解：由 $AA^* = |A|E$，且 $|A| = 1$

故 $AA^* = E$， $A^* = A^{-1}$

$AA^{-1} = |A|B + AB = B + AB = (E+A)B$.

$B = (E+A)^{-1}$

$$(E+A \vdots E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$B = (E+A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

六、证：(1) $A \neq 0$, $1 \leq R(A) = R(\alpha\alpha^T) \leq R(\alpha) = 1$.（C 卷有）

$\therefore R(A) = 1$

(2)解 1: 因为 $\alpha^T\alpha = (1\ 0\ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$，$A^n = (\alpha\alpha^T)^n = (\alpha^T\alpha)^{n-1}(\alpha\alpha^T) = 2^{n-1}\alpha\alpha^T$.

$$|kE_3 + A^n| = |kE_3 + 2^{n-1}\alpha\alpha^T| = \left|kE_3 + 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}(1\ 0\ -1)\right|$$

$$= k^2\left|kE_1 + 2^{n-1}(1\ 0\ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= k^2|k + 2^{n-1} + 2^{n-1}|$$

$$= k^2(k + 2^n)$$

解 2：$|kE_3 + A^n| = \left|\begin{pmatrix} k & & \\ & k & \\ & & k \end{pmatrix} + 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} k+2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & k & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & k+2^{n-1} \end{vmatrix}$

$$=k^2(k+2^n)$$

七、证：因 $B-E$ 可逆，

$$(B-E)(B-E)^{-1}=(B-E)(A^{\mathrm{T}}-E)=BA^{\mathrm{T}}-A^{\mathrm{T}}-B+E=E$$

故 $B=(B-E)A^{\mathrm{T}}$，$|B|=|B-E||A^{\mathrm{T}}|\neq 0$

即 $B$ 可逆.

心得 体会 拓广 疑问

# 哈尔滨工业大学 2013 级<br>期中试题及答案

（此卷满分 30 分）

注：本试卷中 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵，$R(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵和 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

**一、填空题（每小题 1 分，共 4 分）**

1. 已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-1$，则 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A} \\ 2\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix}=$ ________.

2. 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程为________.

3. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $R((\boldsymbol{A}^*)^*)=$ ________.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则 $|2\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}|=$ ________.

**二、选择题（每小题 1 分，共 4 分）**

1. 在直角坐标系中，点 $A(2,4,3)$ 到直线 $x-1=y-2=z-3$ 的距离为（　　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $\sqrt{3}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=m$，则下列结论正确的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 $m$ 阶子式都不为 0

(B) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|\neq 0$

(C) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$

(D) 若 $R(\boldsymbol{B})=n$，则 $R(\boldsymbol{AB})=m$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列上得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为（　　）.

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

年　月　日

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，若 $a_{21}=a_{22}=a_{23}<0$，则 $a_{22}$

心得 体会 拓广 疑问

为(　　).

(A) $-3$　　(B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $-\frac{1}{3}$　　(D) $-\sqrt{3}$

**三、(5 分)** 求过点$(-1,2,3)$垂直于直线$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$且平行于平面$7x+8y+9z+10=0$的直线方程.

**四、(6 分)** 记 $A_{ij}$ 是 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

的 $i$ 行 $j$ 列位置元素的代数余子式.

(1) 计算 $D_n$;

(2) 计算 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$.

**五、(6 分)** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,且满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}$. 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

**六、(3 分)** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵$(n\geqslant 2)$,且满足 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\neq 2\boldsymbol{E}$.

(1) 说明 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆;

(2) 求 $|\boldsymbol{A}^*|$.

**七、(2 分)** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵,且 $R(\boldsymbol{A})=r$. 证明:存在两个列满秩的 $n\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{H}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}$.

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

# 参考答案

一、1. $-16$　2. $x-3y-z+4=0$　3. 0

4. $2^{n-1}(2-a_1b_1-a_2b_2-\cdots-a_nb_n)$

二、1. C　2. D　3. A　4. B

**三、解**：所求直线 $L$ 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 垂直于已知直线的方向向量 $\boldsymbol{s}_0$，且垂直于已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}$，所以

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_0\times\boldsymbol{n}=(4,5,6)\times(7,8,9)=(-3,6,-3)\ /\!/\ (1,-2,1)$$

于是，所求直线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$$

**四、解**

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-\frac{a_2}{2}-\frac{a_3}{3}-\cdots-\frac{a_n}{n} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$=n!\ (a_1-\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{k})$$

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$=n!\ (1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k})$$

**五、解**：等式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{XA}-4\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{X}$$

即

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{XA}-2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}=4\boldsymbol{A}$$

得

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=4\boldsymbol{A}$$

而 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=2\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆且 $\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$. 可求

年　月　日

出

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

**六、解** 1:(1) 由 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$,即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$,得 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\leqslant n$. 又因 $\boldsymbol{A}\neq 2\boldsymbol{E}$,即 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{0}$,知 $R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\geqslant 1$. 故 $R(\boldsymbol{A})\leqslant n-1$,从而 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(2) 由 $\boldsymbol{A}$ 不可逆,知 $R(\boldsymbol{A}^*)<n$,从而 $|\boldsymbol{A}^*|=0$.

解 2:(1) 在等式 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}^*$ 得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$$

即

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}=2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

从而

$$|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$$

因 $\boldsymbol{A}\neq 2\boldsymbol{E}$,即 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(2) 同解 1.

解 3:(1) 由 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$,从而 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$,这与题设矛盾. 故 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(2) 同解 1.

**七、证**:由 $R(\boldsymbol{A})=r$ 知,存在 $n$ 阶可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}(\boldsymbol{E}_r\quad \boldsymbol{0})\boldsymbol{Q}$$

令

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{F}$ 为 $n\times r$ 矩阵,$\boldsymbol{H}$ 也为 $n\times r$ 矩阵,$\boldsymbol{F},\boldsymbol{H}$ 都是列满秩矩阵,且

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}$$

心得 体会 拓广 疑问

# 哈尔滨工业大学 2014 级 期中试题及答案

（此卷满分 30 分）

注：本试卷中 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵，$R(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵和 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵.

**一、填空题（每小题 1 分，共 5 分）**

1. 设空间中几何向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $Ox$，$Oy$，$Oz$ 轴的夹角依次为 $\alpha,\beta,\gamma$，则 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$________.

2. 直线 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 与直线 $L_2:x-2=y=z-3$ 间的距离为________.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1\\-1&0\end{pmatrix}$，多项式 $f(x)=x^2+bx+c$. 若 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$，则 $f(a)=$________.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|=$________.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 7 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}$ 的行列式依次为 $a$ 和 $b$，$b\neq0$，则 $|\boldsymbol{AB}|=$________.

**二、选择题（每小题 1 分，共 5 分）**

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}b&a&a\\a&b&a\\a&a&b\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵的秩为 1，则必有（　　）.

(A) $a+2b=0$　　(B) $b+2a=0$

(C) $a=b\neq0$　　(D) $b^3+2a^3=0$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶非零矩阵，$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$，则下列说法中错误的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　(B) $|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$ 可逆　　(D) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则必有（　　）.

(A) $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$　　(B) $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$

年　月　日

(C)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　　　　(D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

4. 设 $M$ 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{MD}$ 等于(　　).

(A) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$　　　　(B) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

(C) $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$　　　　(D) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

5. 设有直线 $L$:$\begin{cases}3x+2y-8z+4=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$及平面 $\pi$:$4x-2y-z-2=0$,则必有(　　).

(A)$L$ 平行于 $\pi$　　　　(B)$L$ 在 $\pi$ 上

(C)$L$ 垂直于 $\pi$　　　　(D)$L$ 与 $\pi$ 斜交

**三、(5 分)** 求由点 $M_0(1,-1,1)$ 到直线$\begin{cases}x+y-z+1=0\\y-z+1=0\end{cases}$的垂线 $L$ 的方程.

**四、(5 分)** 已知 $x$ 为实数,行列式

$$\begin{vmatrix}x+2 & 2x & 0\\1 & x+2 & 2x\\0 & 1 & x+2\end{vmatrix}=0$$

求 $x$ 及

$$\begin{vmatrix}x+2 & 2x & 0 & 0\\1 & x+2 & 2x & 0\\0 & 1 & x+2 & 2x\\0 & 0 & 1 & x+2\end{vmatrix}$$

的值.

**五、解析题(每小题 2 分,共 10 分;判断对错,对的请证明,错的请举出反例)**

1. 设 2 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.

2. 若 $n$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵相等,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

3. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个几何向量,如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶方阵,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是存在 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\1 & 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$,若存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$,则 $a=-1$.

$$c_{12} - ac_{21} = 0$$
$$c_{12} + ac_{22} - ac_{11} = 1$$
$$c_{11} - c_{21} - c_{22} = 1$$

因此,$a = -1$.

心得 体会 拓广 疑问

年 月 日

# 参考答案

一、1. 0　2. $\dfrac{\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}}{2}$　3. $a\neq b$ 且 $a+2b=0$　4. $\begin{pmatrix}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$

二、1. A　2. B　3. D　4. C

三、解：(1) 由 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$，得 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant 3$. 而 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，知 $R(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，故 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$，得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & t\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=5t-15=0$$

故 $t=3$.

(2) 因 $R(\boldsymbol{A})=2$，由 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant 3$ 得 $R(\boldsymbol{B})\leqslant 1$. 故 $R(\boldsymbol{B})=1$.

四、解

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{5\times4}{2}}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)5!$$

$$=120\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$

五、解：(1) $S=|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{matrix}\right\|=|-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}|=3.$

(2) $V=\dfrac{1}{6}\,|[\overrightarrow{OA}\ \ \overrightarrow{OB}\ \ \overrightarrow{OC}]|=\dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right\|=\dfrac{5}{6}.$

六、解

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}_3| &=|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)^2+\boldsymbol{E}_3|\\ &=|(-\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})^2+\boldsymbol{E}_3|\\ &=|(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})^2+\boldsymbol{E}_3|\\ &=|(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})+\boldsymbol{E}_3|\\ &=|2(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})+\boldsymbol{E}_3|\\ &=|\boldsymbol{E}_1+2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}|=|1+4|=5\end{aligned}$$

七、证：因为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^m=\boldsymbol{0}$$

即

姓名班级学号

# 哈尔滨工业大学（威海）2015/2016 年秋季学期土木工程系期中考试

## 代数与几何

考试形式：闭卷 试卷分值：100 分 答题时间：120 分钟

遵守考试纪律 注意行为规范

### 一、填空题（每题 4 分，共 40 分）

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}=$______

2. 已知 $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x-2 & 6 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=0$，则 $x=$______

3. 已知 $D=\begin{vmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 8 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，$A_{31},A_{32},A_{33}$ 是 D 中第四行各元素的代数余子式，则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=$___

4. 已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为单位向量，且满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$______

5. 已知空间四点 $A(1,1,1)$, $B(4,4,4)$, $C(3,5,5)$, $D(2,4,7)$，则四面体 $ABCD$ 的体积为______

6. 已知 $A,B,C$ 均为 3 阶方阵，$|A|=1$，$|B|=2$，$|C|=3$，则 $\left|2\left(A^{T}BC^{-1}\right)^{3}\right|=$______

7. 已知 $A,B$ 均为 n 阶方阵，$|A+B|=1$，$|A-B|=2$，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=$______

8. 已知 $A,B$ 均为可逆矩阵，$|A|=1$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=3$，则 $|A+B^{-1}|=$______

9. 已知 $A,B$ 均为非零矩阵，$R(B)=1$，$AB=0$，则 $R(A)\leqslant$______

10. 已知 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且 $AB=2A+B$，则 $(A-E)^{-1}=$______

### 二、计算与证明题（共 60 分）

1.用克莱默法则解方程组 $\begin{cases} 5x+6y=1 \\ x+5y+6z=0 \\ y+5z=1 \end{cases}$（8 分）

2.计算下列行列式的值（10 分）

$$D_n=\begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ a & a & b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$$

3.解矩阵方程 $AX=B$,其中 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$（10 分）

4.过点 $M$ (-4,-5,3),且与直线 $L_1:\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ 和 $L_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$ 都相交的直线方程.（10 分）

5.设 $A$ 为 n 阶方阵,n 为奇数，$A^TA=E_n$, $|A|=1$,试证 $|E_n-A|=0$.（10 分）

6.证明以下结论（12 分）

设 A 为 n 阶方阵，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵,试证: $R(A^*)=\begin{cases} n & 当R(A)=n \\ 1 & 当R(A)=n-1 \\ 0 & 当R(A)<n-1 \end{cases}$

# 哈工大威海 2015/2016 土木工程系

## 一、 填空题

1. 12
2. -1或1或3
3. 0
4. $-\frac{3}{2}$
5. 3
6. $\frac{64}{27}$
7. 2
8. $\frac{3}{2}$
9. n-1
10. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

## 二、计算题

1. 解：系数行列式 D=$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$，$D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

则$x = \frac{D_1}{D} = \frac{55}{65} = \frac{11}{13}, y = \frac{D_2}{D} = -\frac{7}{13}, z = \frac{D_3}{D} = \frac{4}{13}$

2. 解：$D_n = \begin{bmatrix} b & a & a\cdots & a \\ a & b & a\cdots & a \\ a & a & b\cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a & a & a\cdots & b \end{bmatrix} = [b+(n-1)a]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\cdots & 1 \\ a & b & a\cdots & a \\ a & a & b\cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a & a & a\cdots & b \end{bmatrix}$

# 哈尔滨工业大学（威海）17/18 学年秋季学期

## 代数与几何（期中）试题

考试形式：闭卷 答题时间 60（分钟） 本卷面成绩占课程成绩 30%。每题 2 分，共 30 分。

1. 行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$=（　　　　　　）

2. 已知$\alpha_1$，$\alpha_2$为 2 维列向量，矩阵 A=（$3\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1-\alpha_2$），B=（$\alpha_1$，$\alpha_2$），若行列式|A|＝8，则|B|=（　　　　　　）

3. 设 A 是三阶矩阵，A* 是 A 的伴随矩阵，若行列式|A|＝2，则|-2A*|=（　　　　　　）

4. 设 A，B 是同阶可逆方阵，则矩阵$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}$的逆矩阵为（　　　　　　）

5. 已知平面 x-2y-5z+4=0 与直线$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{n}$垂直，则 n=（　　　　　　）

6. 直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$与平面 x-y+2z=10 的夹角为（　　　　　　）

7. 将曲线$\begin{cases} 2x^2-y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$绕 x 轴旋转一周所生成的曲面方程为（　　　　　　）

8. 设矩阵 A=$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$的秩为 2，则 k=（　　　　　　）

9. 设矩阵 A 满足 $A^4$＝0．则矩库 A+E，A-E，$A^2$+E，$A^2$-E 中可逆矩阵的个数为（　　）

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 0

10. 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列加到第 2 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 则 A＝（　）

(A) $P_1P_2$ (B) $P_1^{-1}P_2$ (C) $P_2P_1$ (D) $P_2P_1^{-1}$

11. 设 A 为 n 阶矩阵，经过若干次的矩阵的初等行变换得到矩阵 B，则必有（　）

(A) $|A|=|B|$ (B) $|A|\neq|B|$（C）若$|A|>0$，则$|B|>0$（D）若$|A|=0$则$|B|=0$

12. 设 AB 都是 3 阶方阵，r(A)=3，r(B)=2，则 $r\begin{pmatrix}A&E\\0&B\end{pmatrix}$=（　）

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 5 或 6

13. 两直线 l1: $\begin{cases}x=1\\y=z\end{cases}$，l2: $\begin{cases}z=-2\\x+2y=0\end{cases}$ 的位置关系是（　）

（A）平行（B）异面（C）相交（D）垂直

14. 方程 $x^2+y^2=1$ 在空间中的图形为

（A）圆（B）球面（C）柱面（D）以上都不对

15. 下列 4 个命题

（1）$x^2+y^2+z^2=1$ 是旋转面；（2）$x^2-y^2-z^2=0$ 是双叶双曲面

（3）$x^2+2y^2+3z^2=1$ 是椭球面；（4）$x^2-y^2=z$ 是双曲抛物面

正确命题的个数为（　　　）　(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

期中测试答案：$-(a-b)^2$，-2，8，$\begin{pmatrix}-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}$，5，$\frac{\pi}{6}$，$2x^2-y^2-z^2=1$，-2，

ADDBBCC