哈工大网盘计划简介

1.项目初衷

鉴于（1）哈工大各类 QQ 群内学习资料多且繁杂，而文件文字太多会导致文件被 tx 屏蔽或者降低 QQ 群信用星级；（2）校内诚信复印和纸张记忆垄断；（3）很多营销号在卖资料且售价很高；（4）学长学姐的自编材料很好，还想分享给下一届；等问题，网盘计划应运而生！哈尔滨工业大学网盘计划**旨在将窝工的各类学习资料进行归类整理，并且以网盘的形式发出来**，历时一年，现已小成，扫描了上百份校内复印店试题文档，归类整理了近 40 个 G 的学习资料给大家，已经花费上千元，现入不敷出，如果您希望网盘计划继续运营下去的话，可通过以下方式进行捐赠。

QQ支付

推荐使用微信支付

2.网盘计划成就（密码 1920）

哈工大网盘计划
密码1920

微信公众号二维码

群名称:哈工大网盘计划（预）
群　号:953062322

腾讯自动屏蔽以上链接，请用浏览器扫一扫

4'×2　4'　11'×2

线性代数　2T选择　1T填空　2T大题

No.
Date.　/　/

第一章　行列式 ⇒ 数或式子

1. 行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

2. 排列的逆序数 $\tau(p_1,p_2\cdots p_n)$　即两个元素比大小

$\tau(3,1,7,9)=1$　⇒ 逆序数为奇数 ⇒ 奇排列

—　—　为偶数 ⇒ 偶排列

eg1: 求 $\tau(1,2,3,\cdots n)=0$ → 偶排列

$\tau(n,n-1,\cdots 2,1)=0+1+2+\cdots+n-1=\frac{(n-1)n}{2}$

eg2: 设 $\tau(p_1,p_2\cdots p_n)=k$，求 $\tau(p_n,p_{n-1},\cdots p_2,p_1)$

$\tau(p_n,\cdots p_1)=C_n^2-k=\frac{n(n-1)}{2}-k$

注：对换一个排列中的某两个元素，逆序数的奇偶性一定改变。

3. n阶行列式：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots$$

$j_1 j_2\cdots j_n$ 为 $1,2\cdots n$ 的排列

a_{ij} 第i行第j列

注：n阶行列式为不同行不同列的n个元素乘积的代数和

eg3:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ ⇒ 上三角行列式

下三角行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & a_{22} & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

No.
Date. / /

定理：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{j_1 j_2 \cdots j_n \\ \text{为}1\cdots n\text{的排列}}} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} = \sum_{\substack{i_1\cdots i_n \\ \text{为}1\cdots n\text{的一个排列}}} (-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

$$= \sum_{\substack{i_1\cdots i_n \text{及} j_1\cdots j_n \\ \text{为}1,2\cdots n\text{的一个排列}}} (-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_n)} a_{i_1 j_1}\cdots a_{i_n j_n}$$

副对角线行列式

eg：计算 $\begin{vmatrix} & & & a_n \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n,n-1,\cdots,1)} a_n \cdot a_{n-1}\cdots a_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_1\cdots a_n$

4.行列式的性质：

三类初等变换

行变换 ①变换第i行与第j行 记为：$r_i \leftrightarrow r_j$

(或列变换) ②第i行乘以非零常数k 记为 kr_i

$c_i \leftrightarrow c_j$ ③第i行的k倍加到第j行上 $r_j + kr_i$

kc_i

$c_j + kc_i$

注：区别于矩阵的数乘

1) 交换行列式的某两行(或两列)，行列式变号。

2) 行列式的某一行或列乘以k，所得行列式为原来的k倍

3) 某一行(或列)的k倍加到另外一行(或列)上，所得行列式不变。

eg 求 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3+r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1\times(-1)\times 2\times 5 = -10$

No.

Date. / /

推论：行列式中某一行(或列)全为零或行列式有某两行(列)成比例 行列式为0，反之不对。

④ 行列式的转置行列式值不变。<所有行、列都换>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5)
$$i行 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式在进行拆分时，每次只能拆某一行或某一列。

5 行列式的展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1,2,3)} a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + (-1)^{\tau(1,3,2)} a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} + (-1)^{\tau(2,1,3)} a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + (-1)^{\tau(2,3,1)} a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}$$

$$+ (-1)^{\tau(3,1,2)} a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} + (-1)^{\tau(3,2,1)} a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{13}a_{22}\cdot a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$记 A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad |A| \triangleq \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 可记为 D_n

余子式：a_{ij} 为第 i 行第 j 列的元素，将原来的行列式去掉第 i 行及第 j 列，称所得 $(n-1)$ 阶行列式为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}

称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}

No.

Date.

→按某一行或某一列展开

定理. $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$, $\forall\ 1 \le i \le n$

$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$, $\forall\ 1 \le j \le n$

eg: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 按第一行展开 $= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}\cdot(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

注:(典型手段)

☆ 设 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式

则 $b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + \cdots + b_nA_{in}$ 为 $|A|$ 中第 i 行换成 $b_1, b_2 \cdots b_n$ 所得行列式。

eg: 已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & 9 & 9 & 9 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, A_{ij} 为代数余子式

求 $\frac{3}{2}A_{41} + \frac{3}{2}A_{42}$

解: $\frac{3}{2}A_{41} + \frac{3}{2}A_{42} + 0A_{43} + 0\cdot A_{44} + 0A_{45}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & 9 & 9 & 9 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

☆ 推论 $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A| & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}$

注: 为 $|A|$ 中为第 j 行换成第 i 行所得行列式。

$\therefore\ a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} |A| & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}$

常见行列式

① $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 箭头型 ⇒ 上下三角型

$$\xrightarrow[r_1-r_3]{r_1-\frac{1}{2}r_2} \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{13}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{13}{3} \times 2 \times 1 \times 3 = -26$$

② 设 A_{ij} 为 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$ 中 (i,j) 位置元素的代数余子式

求 $A_{11}+2A_{21}+\cdots+nA_{n1}$

C_1+2C_2

解: $A_{11}+2A_{21}+\cdots nA_{n} = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=2}^{n} i a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & -1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$

$$= (1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n)\cdot(-1)^{n-1}$$

③ 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \vdots & & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})$$

$$= \prod_{1\le i\le j<n} (a_j-a_i)$$

No.

Date. / /

证明: $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_{n-1}-a_n r_{n-2} \\ \vdots \\ r_2 - a_n r_1}]{r_n - a_n r_{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & & \cdots 1 & 1 \\ a_1-a_n & & a_2-a_n & & a_{n-1}-a_n \\ a_1^2-a_n a_1 & & a_2^2-a_n a_2 & & \\ a_1^{n-1}-a_n\cdot a_1^{n-2} & & a_2^{n-1}-a_n a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-1}-a_n a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$ 0 0 0

$= 1 \times (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} a_1-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n \\ a_1(a_1-a_n) & a_2(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}^2(a_{n-1}-a_n) \\ a_1^2(a_1-a_n) & a_2^2(a_2-a_n) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_1^{n-2}(a_1-a_n) & a_2^{n-2}(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_n) \end{vmatrix}$

$= (-1)^{1+n}(a_1-a_n)(a_2-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$

$= (-1)^{n+1}(-1)^{n+1}(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1}) D_{n-1}$

eg $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{3}\ 3 & 11 & 22 & 44 \\ 9 & 1 & 4 & 16 \\ 27 & 1 & 8 & 64 \end{vmatrix} = (1-3)(2-3)(4-3)(2-1)(4-1)(4-2)$

列也一样

Wengu® 4-64

3解.

解线性方程组（克莱姆法则）

定理：

若 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ 中 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

则方程组有唯一解且 $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$，其中 $|A_i|$ 为 $|A|$ 中第 i 列换成 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 所得行列式。

注：n个未知数 n个方程构成的线性方程组有唯一解

方阵

$\Updownarrow$

系数矩阵的行列式不等于零

eg：求解 $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

解：

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 125 - 30 - 30 = 65$

$= 5 \times (-1)^{1+1} \cdot (25-6) + 6 \times (-1)^{1+2} \times 5 = 65$

$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 60 - 6 = -41$

$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \times (-1)^{3+3} \times (10-1) = 45$

$|A_3| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{3+2} \times (10-1) = -9$

$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{41}{65} \\ x_2 = \dfrac{45}{65} = \dfrac{9}{13} \\ x_3 = -\dfrac{9}{65} \end{cases}$

Wengu®

No.
Date. / /

第二章 矩阵 数表

1. 矩阵定义

①长方形的数表 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 为m行n列的矩阵

a_{ij} 为第i行第j列的元素 记为 A 或 $A_{m\times n}$，简称为 $m\times n$ 矩阵
简记 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

②当 $m=n$ 时，$A_{n\times n}$ 称为方阵
当 $m=1$，$A=(a_1, a_2 \cdots a_n)$ 为 $1\times n$ 矩阵或行向量
当 $n=1$，$A=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 为 $m\times 1$ 矩阵或列向量.

③ 零矩阵：$O_{m\times n}$ 或 O $\quad O_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
⇓
不是唯一的 $O_{3\times 2} \neq O_{4\times 2}$
型号不同

④ 单位阵 $E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$ 为n阶方阵 主对角线上元素全为1，其余全为0

⑤定义 矩阵相等 矩阵 $A_{m\times n}$ 与矩阵 $B_{p\times q}$ 相等
⇕
$m=p,\ n=q$ 且 $a_{ij}=b_{ij}$

⑥n阶数量矩阵 $\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}_{n\times n} = a\cdot E_n$

Wengu 文谷 4-66

No.
Date. / /

⑦上三角矩阵　　　　　　　　下三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

7. 矩阵的运算

①数乘： $kA \triangleq \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} = \boxed{(ka_{ij})_{m\times n}}$

②加法： $\begin{cases} A=(a_{ij})_{m\times n} \\ B=(b_{ij})_{m\times n} \end{cases}$ $A+B \triangleq (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

1) $1\times A = A$

2) $(-1)\times A = -A = (-a_{ij})_{m\times n}$

3) $A-B \triangleq A+(-1)B = (a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$

易知， $A+B = B+A$ (交换律)

$(A+B)+C = A+(B+C)$ (结合律)

$(k_1\cdot k_2)\cdot A = k_1(k_2A) = k_2\cdot(k_1\cdot A)$ 其中 k_1、k_2 为数

$k(A+B) = kA+kB$

$(k+l)A = kA+lk$ 其中 k、l 为数

注： $\boxed{kA=0 \Leftrightarrow k=0 \text{ 或 } A=0}$

③乘法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{jk})_{n\times p}$

$A\times B \triangleq C$，其中 $C=(C_{ik})_{m\times p}$　$C_{ik} = a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}$

eg $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 求 AB 及 BA

解 $AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 18 & 8 & 11 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

4~67

No.
Date. / /

eg: $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0$

注：矩阵乘法中不成立的性质：① 交换律不成立 AB不一定等BA
② 消去律不成立 $AB=0 \not\Rightarrow A=0$ 或 $B=0$

性质：① $(AB)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ 结合律成立
② $k(AB)=(kA)\cdot B=A(k\cdot B)$
③ $A(B+C)=AB+AC$ 分配律成立
$(B+C)D=BD+CD$
④ $E_m\cdot A_{m\times n}=A_{m\times n}$
$A_{m\times n}\cdot E_n=A_{m\times n}$

证：$E_mA_{m\times n}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}_{m\times m}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&\cdots&\vdots\\\vdots&&&\vdots\\a_{m1}&-&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$

若 $AB=AC$ 且 $A\neq 0 \not\Rightarrow B=C$

eg $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

④方阵的幂

设A为n阶方阵，① $A^1 \triangleq A$ $A^0=E_n$.
$A^2 \triangleq A\cdot A^1$
$A^m\cdot A^k=A^{m+k}$
$\vdots$
当A可逆时 A^{-1} $A^k \triangleq A\cdot A^{k-1}$ 为A的k次幂
$A^{-2}=(A^2)^{-1}$
$A^0 \triangleq E_n$

设 $f(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$ 为x的一个m次多项式
规定 $f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E_n$
eg: 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$f(x)=5x^4+7x^3-6$

Wengu®

4-68

解: $A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$

$A^4=A\cdot A^3=0$

$f(A)=5\cdot A^4+7A^3-6E_3=\begin{pmatrix}-6&0&0\\0&-6&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$

eg: 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$，求 A^{10}

手法

秩为1.

解: $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1,2,3)$

$A^{10}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left[(1,2,3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]\cdots\cdots\left[(1,2,3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right](1,2,3)$

$=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot 14^9\cdot(1,2,3)=14^9\cdot A$

⑤ 注: 设 $f(x)$、$g(x)$ 分别为 x 的多项式，A 为 n 阶方阵

则 $f(A)\cdot g(A)=g(A)\cdot f(A)$

$\Uparrow$

$f(x)\cdot g(x)\big|_{x=A}$

⑥ $A^{m+n}=A^m\cdot A^n$

⑦ $(A^m)^n=A^{mn}$

⑧ $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=(A+B)A+(A+B)\cdot B$

$=A^2+BA+AB+B^2$ 不一定为 $A^2+2AB+B^2$

4-69

① 方阶的行列式

$A=(a_{ij})_{n\times n}$，称 $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为方阶 A 的行列式

① $|A^T|=|A|$

定理：设A,B为n阶方阶，则 ② $|kA|=k^n|A|$ 数乘公式

③ $|AB|=|A||B|=|BA|$ 乘法公式

$=|B|\cdot|A|$

证：$|KA|=K^n|A|$ 而 $|A+B|\neq|A|+|B|$

$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $|KA|=\begin{vmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} & \cdots & Ka_{1n} \\ \vdots & & & \\ Ka_{n1} & Ka_{n2} & \cdots & Ka_{nn} \end{vmatrix}=K^n\cdot|A|$

again

eg：设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，求 $|2(AB)^5|$ 及 $|A+B|$

解：$|2(AB)^5|=2^3|(AB)^5|$

$=8|AB|^5$

$=8(|A|\cdot|B|)^5$

$=8(-2\times5)^5=-800000$

$|(AB)^5|=|(AB)(AB)^4|$
$=|AB|\cdot|(AB)^4|$

$|A+B|=\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=6\times3-(-3)-6=15$

again

eg：设3阶方阶 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$|A|=2$

求 $B=(\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)$ 的行列式 $|B|$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

方法一

解：$|B|=|(\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)|$ 行列式的可拆性

$=|(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3)|+|(\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)|$

$=|(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2)|+|(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_3)|+|(\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_2)|+|(\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_3)|$

$=|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)|+0+0+0=|A|=2$

$A\neq0$

$(\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3)$ No. Date.

方法二：$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

$|B|=\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}\right|=|A|\cdot\begin{vmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&0&1\end{vmatrix}$

方阵

1. 可逆矩阵
① 何为逆阵？
② 逆阵存在否？
③ 逆阵如何求？

定义：设 A、B为 n阶方阵，E_n 为 n 阶单位阵，如果 $AB=BA=E_n$，则称 B为A的逆矩阵，记为 A^{-1}，称 A为一个可逆矩阵

eg: A为n阶阵，$A^2-A+2E=0$
① 求 A^{-1} ② $(A+E)^{-1}$
解：① $A(A-E)=-2E$ $A\cdot\frac{1}{2}(E-A)=E$
∴ $A^{-1}=\frac{1}{2}(E-A)$
② $(A+E)(A-2E)+4E=0$
$(A+E)\cdot\frac{1}{4}(2E-A)$
∴ $(A+E)^{-1}=\frac{1}{4}(2E-A)$

2. 转置：设 A为 m×n 矩阵，$A=(a_{ij})_{m\times n}$

A^T 或 $A'=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&&a_{mn}\end{pmatrix}$

性质：① $(A+B)^T=A^T+B^T$
② $(k\cdot A)^T=k\cdot A^T$
③ $(AB)^T=B^T\cdot A^T$ 证：

A^T
$A=$
AB

eg: $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&7&9\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&2\\2&7\\3&9\end{pmatrix}$

$B^TA^T=D=(d_{ij})_{n\times m}$ $=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}$

B^T的第i行 $(b_{1i},b_{2i}\cdots b_{si})$

A^T的第j列 $(a_{j1},a_{j2}\cdots a_{js})^T$ ∴

3. 伴随矩阵

方阵A的伴随 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&&A_{n2}\\\vdots&&\\A_{1n}&&A_{nn}\end{pmatrix}$，其中 A_{ij} 为 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式

$A^*=(A_{ij})^T$

4-71

Wengu

$(\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3)$ No. Date. / /

~~~~

方法二: $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

$|B|=\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}\right|=|A|\cdot\begin{vmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&0&1\end{vmatrix}$

方阵

1. 可逆矩阵
① 何为逆阵?
② 逆阵存在否?
③ 逆阵如何求?

定义: 设 A, B 为 n 阶方阵, E_n 为 n 阶单位阵, 如果 $AB=BA=E_n$, 则称 B 为 A 的逆矩阵, 记为 A^{-1}, 称 A 为一个可逆矩阵

2. 转置: 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, $A=(a_{ij})_{m\times n}$

A^T 或 $A'=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&&a_{mn}\end{pmatrix}$ 称为A的转置.

性质: ① $(A+B)^T=A^T+B^T$

② $(k\cdot A)^T=k\cdot A^T$

③ $(AB)^T=B^T\cdot A^T$

证: $A=(a_{ij})_{m\times s}$ $B=(b_{ij})_{s\times n}$

$A^T=(a_{ji})_{s\times m}$ $B^T=(b_{ji})_{n\times s}$

$AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$ $(AB)^T=(c_{ji})$

$B^TA^T=D=(d_{ij})_{n\times m}$ $=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}$

B^T 的第i行 $(b_{1i},b_{2i}\cdots b_{si})$

A^T 的第j列 $(a_{j1},a_{j2}\cdots a_{js})^T$

eg: $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&7&9\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&2\\2&7\\3&9\end{pmatrix}$

3. 伴随矩阵

方阵A的伴随 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&&A_{n2}\\\vdots&&\vdots\\A_{1n}&&A_{nn}\end{pmatrix}$, 其中 A_{ij} 为 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式

$A^*=(A_{ij})^T$

Wengu®
~~~~

No.

Date. / /

定理：$A^*A = AA^* = |A| \cdot E_n$

证明：$A^*A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E_n$　类似 $AA^* = |A| \cdot E_n$.

逆阵存在定理：

定理　n阶方阵A可逆 $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

当 $|A| \neq 0$ 时，$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* \Rightarrow A^* = A^{-1} \cdot |A|$

求逆矩阵ㄖ第一个方法：(不实用，用于三阶以下

证明：$\Longrightarrow$ 若A可逆，则∃n阶方阵B

s.t. $AB = BA = E_n$

$|AB| = |E_n| = 1$　$|A||B| = 1$　$|A| \neq 0$.

$\Longleftarrow$ 若 $|A| \neq 0$，则 $A^*A = AA^* = |A| E_n$

$\frac{1}{|A|}(A^* \cdot A) = \frac{1}{|A|}(A \cdot A^*) = E_n$

$(\frac{1}{|A|} \cdot A^*) \cdot A = A \cdot (\frac{1}{|A|} \cdot A^*) = E_n$.

即A可逆且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

注：A可逆与 $|A| \neq 0$ 不是一回事.

性质：1) 若A可逆，则其逆是唯一的

2) B为A的逆 $\Longleftrightarrow AB = E_n \Leftrightarrow BA = E_n$

3) 当 $k \neq 0$，A可逆，则 $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

$\Downarrow$

$(kA)(k^{-1}A^{-1}) = (k \cdot k^{-1}) \cdot A \cdot A^{-1}$

$= E_n$

$AB = E$，$AC = E$

$AB - AC = 0$

法二：$A(B-C) = 0$

$\Rightarrow r(A) + r(B-C) \leq n$

$r(A) = n$

$r(B-C) = 0$

$B - C = 0$

$B = C$

证：法一

$AB = BA = E$

$AC = CA = E$

$B = BE = B(AC)$

$= (BA) \cdot C$

$= E \cdot C$

$= C$

4-72

No.
Date. / /

eg: 已知 A, B, C 为 n 阶方阵，E_n 为 n 阶单位阵且 $(AB)C=E_n$，则 D

A: $(BA)C=E_n$ B: $C(BA)=E_n$
C: $(CA)B=E_n$ D: $(CA)B=E_n$.

$\Downarrow$ $C(AB)=E_n$.

$(CA)B=E_n$

$BCA=E_n$

4> 当 A, B 均可逆，则 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，一般地，
$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdot A_{m-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$

$\Downarrow$ $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=(AE_n)\cdot A^{-1}=E_n$ 好证明它

$\underset{8}{A}\cdot A^{-1}=E_n$

5> 当 A 可逆，$(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$
$(A^m)^n=(A^n)^m$

A 7 8

注：当 A 可逆时，则 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$，$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$，$(A^*)^T=(A^T)^*$

9 $(A^{-1})^{-1}=A$ $\Downarrow$

$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$

证：$A^T\cdot(A^{-1})^T=(A^{-1}\cdot A)^T=E^T=E$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*$

$A^*=A^{-1}\cdot|A|$

$(A^*)^{-1}=(|A|\cdot A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A$

eg: 设 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，求 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}$

解：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\cdot A^*$

$=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{vmatrix}$

4-73

Wengu

No.
Date. / /

注：A、B为m、n阶方阵

1) $\begin{vmatrix} A & \\ & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$

2) $\begin{vmatrix} & A \\ B & \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\cdot|A|\cdot|B|$

3) $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{pmatrix}$

4) $|A^*| = |A|^{n-1}$

5) 行列式问题中出现 A_{ij}

用 $\begin{cases} |A^*| = |A|^{n-1} \\ a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} = |A| \end{cases}$

eg: again $A_{3\times3}$ 第一行 $a, a, a\ (a>0)$，$a_{ij} = A_{ij}$，$a = ?$

解：1° $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = A^T$

$\Rightarrow |A^*| = |A^T|$

$|A|^2 = |A|$ 解得 $|A| = 0$ 或 $|A| = 1$

2° $|A| = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 3a^2 > 0$

$\therefore |A| = 1$

$3a^2 = 1 \quad a = \sqrt{3}$

eg: A, B为可逆阵，$(AB)^* = \underline{B^*\cdot A^*}$

解：$(AB)^* = |AB|\cdot(AB)^{-1}$

$= |A|\cdot|B|\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$

$= |B|\cdot B^{-1}\cdot|A|\cdot A^{-1}$

$= B^*\cdot A^*$

Wengu®

4·7A

Date. / /

eg: A、B为 m、n阶可逆阵，且 $|A|=a\neq 0, |B|=b\neq 0$

① $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^* =$ ② $\begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^* =$

解① $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} A & \\ & B \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1}$

$= |A|\cdot|B|\cdot\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$

$= ab\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} abA^{-1} & \\ & abB^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bA^* & \\ & aB^* \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} & A \\ B & \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^{-1} = (-1)^{mn}|A||B|($

4-25

No.

Date. / /

eg: 求 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

解: $|A| = -6$

$A_{11} = 0 \quad A_{12} = 0 \quad A_{13} = -2$

$A_{21} = 0 \quad A_{22} = -6 \quad A_{23} = 4$

$A_{31} = -3 \quad A_{32} = 6 \quad A_{33} = -3$

$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 6 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

eg: 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 求 $|(A^*)^* + 20(A^{-1})^* - 100A|$

Again

解: $|A| = 20$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* \qquad A^* = |A| \cdot A^{-1}$

$A \cdot A^{-1} = E \qquad (A^*)^* = |A^*| \cdot (A^*)^{-1} = \big||A| \cdot A^{-1}\big| \cdot (|A| \cdot A^{-1})^{-1}$

$|A| \cdot |A^{-1}| = |E| \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \qquad = |A|^3 |A|^{-1} |A|^{-1} \cdot A$

$= |A| \cdot A$

$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = (|A| \cdot A^{-1})^{-1} = |A|^{-1} \cdot A$

$|(A^*)^* + 20(A^{-1})^* - 100A| = |20A + 20 \times \frac{1}{20} A - 100A|$

$= |-79A|$

$= (-79)^3 \cdot |A|$

$= (-79)^3 \cdot 20$

矩阵的初等变换及初等矩阵

初等矩阵 → 由单位阵E经过一次初等变换得到的

$A=(a_{ij})_{m\times n}$

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B=\begin{array}{cl}\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \\ \text{—i行} \\ \text{—j行} \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}$$

第一类初等变换

$$A \xrightarrow{kr_i} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{i1} & & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第二类初等变换

$$A \xrightarrow{r_j+kr_i} \begin{array}{cc} \begin{matrix} \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{matrix}\right)\end{array}$$

第三类初等变换

初等变换 { 初等行变换 { ① ② ③ 是可逆的
初等列变换 { ① ② ③

初等矩阵 {
$E(i,j)$为E的i,j两行(列)互换 → 行等价
$E(i(k))$为E的第i行(列)乘以非零数k所得矩阵
$E(j+i(k))$为E的第i行乘以k倍加到第j行所得矩阵
第i列 …… 第j列

eg
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E(2,4)$$

4~77

$$E(3(2))=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad E(1+4(2))=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

eg: $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$ 求 $E_3(1,3)A$, $E_3(3(2))A$, $E_3(2+3(4))A$

解: $E_3(1,3)A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&\end{pmatrix}$

$E_3(3(2))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\2a_{31}&2a_{32}&2a_{33}&2a_{34}\end{pmatrix}$

eg1: $E^{2015}(1,2)=$ ___?

解 $E^{-1}(1,2)=E(1,2)$

$E=E^2(1,2)$ $\therefore E^{2015}(1,2)=E(1,2)$

eg2: A可逆, 对调A的i,j行成B 求 $AB^{-1}=$?

解: $B=E(i,j)A$; $AB^{-1}=A\cdot A^{-1}\cdot E(i,j)=E(i,j)$

eg3: A可逆, 对调A的i,j行成B, B^*与A^*的关系? $B^*=-A^*E(i,j)$

解: $B=E(i,j)A$ $B^*=|B|\cdot B^{-1}$

$-A^*E(i,j)\Leftarrow -|A|\cdot A^{-1}\cdot E(i,j)\Leftarrow |B|\cdot A^{-1}\cdot E(i,j)$

E 左乘初等行变换 E乘在右边为列变换

注: ① $E(i,j)A$ 是A交换i,j两行所得 $\Rightarrow |E(i,j)|=-1\neq 0\Rightarrow E(i,j)^{-1}=E(i,j)$

$AE(i,j)$ 是A交换i,j两列所得

② $E(i(k))A$ 是A的第i行乘以k所得 $\Rightarrow |E(i(k))|=k\neq 0\Rightarrow E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$

$AE(i(k))$ 是A的第i列 ....

③ $E(j+i(k))A$ 是由A的第i行的k倍加到第j行上所得

$AE(j+i(k))$ 是由A的第j列的k倍加到第i列上所得

$\Downarrow$ $|E(j+i(k))|=1\neq 0\Rightarrow E(j+i(k))^{-1}=E(j+i(-k))$

$$E(3(2))=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad E(1+4(2))=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

eg: $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$ 求 $E_3(1,3)A$，$E_3(3(2))A$，$E_3(2+3(4))A$

解: $$E_3(1,3)A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\end{pmatrix}$$

$$E_3(3(2))A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\2a_{31}&2a_{32}&2a_{33}&2a_{34}\end{pmatrix}$$

E 左乘初等行变换　E 乘在右边为列变换

注: ① $E(i,j)A$ 是 A 交换 i,j 两行所得 $\Rightarrow |E(i,j)|=-1\neq 0 \Rightarrow E(i,j)^{-1}=E(i,j)$
$AE(i,j)$ 是 A 交换 i,j 两列所得

② $E(i(k))A$ 是 A 的第 i 行乘以 k 所得 $\Rightarrow |E(i(k))|=k\neq 0 \Rightarrow E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$
$AE(i(k))$ 是 A 的第 i 列 . . . .

③ $E(j+i(k))A$ 是由 A 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行上所得
$AE(j+i(k))$ 是由 A 的第 j 列的 k 倍加到第 i 列上所得
△ $\Downarrow$ $|E(j+i(k))|=1\neq 0 \Rightarrow E(j+i(k))^{-1}=E(j+i(-k))$

eg: $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$ $|A|=0$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&5\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&5\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{列}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&5\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{列}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

eg: $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{100}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\cdots\\0&1&\cdots\\0&0&\cdots\end{pmatrix}$

解：原式 $=\begin{pmatrix}1+1\times2\times100 & 2+1\times2\times100 & 3+1\times\cdots\\ 1 & 1 & \\ 1 & -1 & \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}201 & 202 & 203+202\times3\times10\\ 1 & 1 & 1+1\times3\times10\\ 1 & -1 & 1+(-1)\times3\times10\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&1&3&1\\0&1&0&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

行阶梯形及行最简形

若矩阵A满足：

① 零行在非零行的下方

② 非零行左起第一个非零元素的所在列单调递增（往下走）

则称A为行阶梯矩阵

eg: $\begin{pmatrix}0&3&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ ×

若A为一个行阶梯形矩阵且非零行左起第一个非零元素为1，且该元素所在列只有它不为零，其余全为零，则称A为一个行最简形。

$\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

问：① A可逆，$A\xrightarrow{行}E$? ② $A_{m\times n}$，$A\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&0\end{pmatrix}$? ③ $A_{m\times n}\xrightarrow[列]{行}\begin{pmatrix}1&&&0\\&\ddots&&\\&&1&\\0&&&0\end{pmatrix}$

注：任何一个矩阵一定可以经过有限次初等行变换化为行阶梯形及行最简形，再经过初等列变换可化为标准形。

eg: 将 $A=\begin{pmatrix}0&1&3&2&6&0\\3&1&0&2&1&5\\3&2&3&4&5&9\\6&4&6&8&12&24\end{pmatrix}$ 化为行最简形

解 $A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}3&1&0&2&1&5\\0&1&3&2&6&0\\3&2&3&4&5&9\\6&4&6&8&12&24\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\begin{pmatrix}3&1&0&2&1&5\\0&1&3&2&6&0\\0&1&3&2&4&4\\0&2&6&4&10&14\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}3&1&0&2&1&5\\0&1&3&2&6&0\\0&0&0&0&-2&-6\\0&0&0&0&-2&-6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&1&0&2&1&5\\0&1&3&2&6&0\\0&0&0&0&-2&-6\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

4-79

eg: $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{100}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}^{10}$

解: 原式 $=\begin{pmatrix}1+1\times2\times100&2+1\times2\times100&3+1\times2\times100\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}^{10}$

$=\begin{pmatrix}201&202&203+202\times3\times10\\1&1&1+1\times3\times10\\1&-1&1+(-1)\times3\times10\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&1&3&1\\0&1&0&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

行阶梯形及行最简形

若矩阵 A 满足:

① 零行在非零行的下方

② 非零行左起第一个非零元素的所在列 单调递增. (往下走)

则称 A 为行阶梯矩阵

eg: $\begin{pmatrix}0&3&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ ✗

若 A 为一个行阶梯形矩阵且非零行左起第一个非零元素为 1,
且该元素所在列只有它不为零,其余全为零,
则称 A 为一个行最简形。

$\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

Q: ① A 可逆, $A\xrightarrow{行}E$? ② $A_{m\times n}$, $A\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0\\ 0 & & 0\end{pmatrix}$? ③ $A_{m\times n}\xrightarrow[列]{行}\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0\\ 0 & & 0\end{pmatrix}$

注: 任何一个矩阵一定可以经过有限次初等行变换化为行阶梯形及行最简形,再经过初等列变换可化为标准形。

eg: 将 $A=\begin{pmatrix}0&1&3&2&6&0\\3&1&0&2&1&5\\3&2&3&4&5&9\\6&4&6&8&12&24\end{pmatrix}$ 化为行最简形

解 $A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}3&1&0&2&1&5\\0&1&3&2&6&0\\3&2&3&4&5&9\\6&4&6&8&12&24\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\begin{pmatrix}3&1&0&2&1&5\\0&1&3&2&6&0\\0&1&3&2&4&4\\0&2&6&4&10&14\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}3&1&0&2&1&5\\0&1&3&2&6&0\\0&0&0&0&-2&-6\\0&0&0&0&-2&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&0&2&1&5\\0&1&3&2&6&0\\0&0&0&0&-2&-6\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

No.
Date. / /

证② $r(A)<n-1$, $\forall M_{ij}=0$
$\forall A_{ij}=0$, $A^*=0$ $r(A^*)=0$

形如 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为标准形

又: $r(A)=n-1$, $\exists M_{ij}\neq 0$
$\Rightarrow A_{ij}\neq 0 \Rightarrow A^*\neq 0$
$\Downarrow$ $r(A^*)\geq 1$

矩阵的秩: 定义; 求法 → 行列式

定义: 矩阵A的非零子式的最高阶数称为矩阵A的秩, 记为 $r(A)$

eg $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

一阶子式: 每个元素均是 a_{ij}

二阶子式: 选两行、两列交叉的元素 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2$

三阶子式: 选三行, 选三列 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$C_3^3 \cdot C_4^3=4$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

定理: 初等变换不改变矩阵的秩。

eg: 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & a & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & b \end{pmatrix}$, 讨论 $r(A)$

解: $A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 6+a & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -24 & -4 & b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 8+a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{pmatrix}$

当 $a+8=0$ 且 $b+2=0$, $r(A)=2$ 即 $a=-8$, $b=-2$
当 $a+8\neq 0$ 且 $b+2\neq 0$, $r(A)=4$
当 $a=-8$, $b\neq -2$ 时, $r(A)=3$
当 $a\neq -8$, $b=-2$ 时, $r(A)=3$ $A-8$

注: 矩阵A的秩为A经过初等变换化成行阶梯形后非零行的个数

$r(E(i,j)A)=r(A)$ $r(E(i(k))A)=r(A)$ $r(E(ij+i(k)))=r(A)$

☆ $A_{n\times n}(n\geq 2)$，$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0 ③, & r(A)<n-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \because AA^*=|A|\cdot E \therefore |AA^*|=|A|\cdot E|$
$\therefore |A|\cdot|A^*|=|A|^n|E|=|A|^n$
$\because |A|\neq 0 \therefore |A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$

$AA^*=|A|\cdot E=0$
$r(A)+r(A^*)\leq n$
$\because r(A)=n-1 \therefore r(A^*)\leq 1$

定义：如果矩阵A经过有限次初等变换化为矩阵B，则称矩阵A与矩阵B等价，记为 $A\sim B$

注：A与B等价 $\Leftrightarrow$ A与B型号相同且 $r(A)=r(B)$

满秩矩阵 $A_{n\times n}$ $r(A_{n\times n})=n$ 又称可逆矩阵、非奇异矩阵.

列满秩矩阵 $A_{m\times n}$ $r(A_{m\times n})=n$ $|A|\neq 0$

行满秩矩阵 $A_{m\times n}$ $r(A_{m\times n})=m$ $\Updownarrow$

定理：n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ $r(A)=n$ $\Leftrightarrow$ A可表示为有限个初等矩阵之积

$P_m\cdots P_2P_1A=E_n$ $A=(P_m\cdots P_1)^{-1}=P_m^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}$

$\begin{cases} E^{-1}(i,j)=E(i,j) \\ E^{-1}(i(k))=E(i(\frac{1}{k})) \\ E^{-1}(j+i(k))=E(j+i(-k)) \end{cases}$

定理：矩阵 $A_{m\times n}$ 与矩阵 $B_{m\times n}$ 等价

$\Updownarrow$

矩阵乘法秩不升

$\exists$ m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩阵Q，使得 $PAQ=B$

$P_1\cdots P_mAQ_1\cdots Q_m=B$

注：矩阵A乘以可逆矩阵 不改变矩阵A的秩.

$r(PAQ)=\begin{cases} r(PA)=r(A) \\ r(AQ)=r(A) \end{cases}$ P、Q可逆 左右乘可逆阵与秩不变

$r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$ 题中看见 A^TA、AA^T 一般要用此性质.

分块矩阵

1. $A=\left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$

2. 分块矩阵的运算 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$ ① $kA=\begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & kA_{13} \\ kA_{21} & kA_{22} & kA_{23} \end{pmatrix}$

A与B分法相同 $B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix}$ ② $A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \end{pmatrix}$

☆ $A_{n\times n}\ (n\geq 2)$, $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$

∵ $AA^*=|A|\cdot E$ ∴ $|AA^*|=||A|\cdot E|$ ∴ $|A|\cdot|A^*|=|A|^n|E|=|A|^n$ ∵ $|A|\neq 0$ ∴ $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$

$AA^*=|A|\cdot E=0$

$r(A)+r(A^*)\leq n$

∵ $r(A)=n-1$ ∴ $r(A^*)\leq 1$.

定义：如果矩阵A经过有限次初等变换化为矩阵B，则称矩阵A与矩阵B等价，记为 $A\sim B$

注：A与B等价 $\Longleftrightarrow$ A与B型号相同且 $r(A)=r(B)$

满秩矩阵 $A_{n\times n}$ $r(A_{n\times n})=n$ 又称可逆矩阵、非奇异矩阵。

列满秩矩阵 $A_{m\times n}$ $r(A_{m\times n})=n$ $|A|\neq 0$

行满秩矩阵 $A_{m\times n}$ $r(A_{m\times n})=m$ $\Updownarrow$

定理：n阶方阵A可逆 $\Longleftrightarrow$ $r(A)=n$ $\Longleftrightarrow$ A可表示为有限个初等矩阵之积

$P_m\cdots P_2P_1A=E_n$ $\quad A=(P_m\cdots P_1)^{-1}=P_m^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}$

$$\begin{cases} E^{-1}(i,j)=E(i,j) \\ E^{-1}(i(k))=E(i(\tfrac{1}{k})) \\ E^{-1}(j+i(k))=E(j+i(-k)) \end{cases}$$

eg1: $A_{m\times n}$, $A^TA=0$，证：$A=0$

$A\neq 0\Rightarrow A^k\neq 0$

证：$r(A)=r(A^TA)$ ∵ $A^TA=0$

∴ $r(A^TA)=r(A)=0\Rightarrow A=0$.

eg2: $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$, $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

证：$r(A)\leq 2$

证明：$r(A)\leq r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)$

$r(A)\leq r(\alpha)+r(\beta)$

$r(A)\leq 1+1=2$

定理：矩阵 $A_{m\times n}$ 与矩阵 $B_{m\times n}$ 等价

$\Updownarrow$

矩阵乘积秩不升

∃ m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩

$P_1\cdots P_mAQ_1\cdots Q_m=B$

注：矩阵A乘以可逆矩阵 不改变矩

$r(PAQ)=\begin{cases} r(PA)=r(A) \\ r(AQ)=r(A) \end{cases}$ P、Q可逆 左右乘可

$\boxed{r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)}$ 题中看见A^TA、AA^T一般运用此性质.

分块矩阵

1. $A=\left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\quad A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$

2. 分块矩阵的运算 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$ ① $kA=\begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & kA_{13} \\ kA_{21} & kA_{22} & kA_{23} \end{pmatrix}$

A与B分法相同 $B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix}$ ② $A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \end{pmatrix}$

No.
Date. / /

③乘法：设A的列分法与B的行分法一致（保证A的列数＝B的行数）

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13}+A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23} \end{pmatrix}$$

注：
$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_mB_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & & & \\ & a_2b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_nb_n \end{pmatrix}$$

分块初等变换

1）$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$ 交换行块（列块）

2）$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{P\text{可逆}} \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}$ 某行乘以可逆P

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & BQ \\ C & DQ \end{pmatrix}$ 某列 - - - Q

3）$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow[A\text{的行数}]{G\text{的列数} \; \|} \begin{pmatrix} A & B \\ C+GA & D+\cancel{BA}\ GB \end{pmatrix}$ 行

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A+BR & B \\ C+DR & D \end{pmatrix}$ 列

$$E_{n+m}=\begin{pmatrix} E_n & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & E_m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} O_{m\times n} & E_m \\ E_n & O_{n\times m} \end{pmatrix}$$ （行或列）

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[+\text{第二行}]{\text{第一行}\times G} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ G & E_m \end{pmatrix}$$

注：分块初等变换是有限次初等变换所得

（右乘）左乘分块初等矩阵即原矩阵做一次相应行分块变换（列分块变换）

Wengu®

4-82

$$\begin{vmatrix} 0 & E_m \\ E_n & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{n\text{次}} = (-1)^{n\times m}\begin{vmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{vmatrix}$$

No.
Date. / /

$$\begin{vmatrix} 0 & E_m \\ E_n & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n\times m} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} E_n & 0 \\ a_{m\times n} & E_m \end{vmatrix} = |E_n|\cdot|E_m| = 1$$

$$\begin{vmatrix} P & 0 \\ 0 & E_m \end{vmatrix} = |P|\cdot|E_m| = |P| \neq 0$$

若 A_{ii} 为方阵，则

分块上三角矩阵

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{mm} \end{vmatrix} = |A_{11}|\cdot|A_{22}|\cdots|A_{mm}|$$

$$\left|\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ G & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} A & B \\ GA+C & GB+D \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & E_m \\ E_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}\right|$$

第三类分块初等变换不改变行列式值

第一类、第二类不定。

P 设 A、B 为 n 阶方阵，证：$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$

证：$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \overset{r_1+r_2}{=} \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix} \overset{c_2-c_1\cdot E_n}{=\!=} \begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$

求逆矩阵的第二个方法 高于三阶 不用伴随作 . 分块下面

若 A 可逆，则 ∃ 初等矩阵 P_i $(A\,\vdots\,E) \xrightarrow{\text{行变换}} (E\,\vdots\,A^{-1})$

$A = P_1P_2\cdots P_m$

证 ∵ A 可逆 ∴ ∃ $P_1, P_2 \cdots P_s$ 使 $P_s\cdots P_2P_1A = E$

$A^{-1} = (P_1P_2\cdots P_m)^{-1} = P_m^{-1}\cdot P_{m-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}$

∴ $P_s\cdots P_2P_1 = A^{-1}$

$(A\,\vdots\,E) \xrightarrow{\text{左乘 } P_1} (P_m^{-1}\cdots P_1^{-1}\cdot A \,\vdots\, P_m^{-1}\cdots P^{-1}\cdot E)$

$E \longrightarrow P_s\cdots P_2P_1E = A^{-1}$

$\underset{P_m}{\overset{P_2}{\vdots}} \quad = (E \,\vdots\, P_m^{-1}\cdots P^{-1})$

$= (E \,\vdots\, A^{-1})$

No.
Date. / /

eg: 求 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

解: $(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$

列变换

$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-1&0&0\\0&1&0&0&0&1&-1&0\\0&0&1&0&0&0&-1&-1\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)$ $\therefore A^{-1}$

$\begin{pmatrix}A\\ \hline E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E\\ \hline A^{-1}\end{pmatrix}$

求 $A^{-1}B$
$(A\,|\,B)\xrightarrow{r}(E\,|\,A^{-1}B)$

求 BA^{-1} $\begin{pmatrix}A\\ \hline B\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}E\\ BA^{-1}\end{pmatrix}$

eg: 已知 A_n, B_m 可逆为 A^{-1}, B^{-1}, 求 $\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}^{-1}$

解: $\left(\begin{array}{cc|cc}A_n&C_{n\times m}&E_n&0\\0&B_m&0&E_m\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}E_n&A_n^{-1}\cdot C_{n\times m}&A^{-1}&0\\0&E_m&0&B_m^{-1}\end{array}\right)$

$\xrightarrow{A_n^{-1}C_{n\times m}}\left(\begin{array}{cc|cc}E_n&0&A_n^{-1}&-A_n^{-1}C_{n\times m}\\0&E_m&E_m&B_m^{-1}\end{array}\right)$

证明相关性
① 定义
② 性质
③ 齐次线性方程组解的情况
④

⇐

Wengu

4-84

后有例题

$$\begin{cases} r(A)\le n \\ r(A)\le m \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $r(\alpha)=\begin{cases} 1 & \alpha\neq 0. \\ 0 & \alpha=0 \end{cases}$

No.
Date.

秩的不等式

② $\boxed{A\neq 0 \Leftrightarrow r(A)\geq 1}$

① $0\le r(A_{m\times n})\le \min\{m,n\}$ 且 $\boxed{r(A)=0 \Leftrightarrow A=0}$

② $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$ $r(A)=r\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A\\AB\end{pmatrix}\geq r(AB)$

③ $r\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}\geq r\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$ $r(A)=r$ $r(B)=k$

$\begin{cases} r(AB)\le r(A) \\ r(AB)\le r(B)\end{cases}$

④ $r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$ $r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A&B\\0&B\end{pmatrix}$

⑤ $r(kA)=r(A)$ $k\neq 0$

↓题中出现 $\begin{cases} A+B \\ A-B \\ r(A)+r(B)\end{cases}$ 使用此性质 $=r\begin{pmatrix}A+B & B\\ B & B\end{pmatrix}\geq r(A$

$r(A)+r(B)-n\le r(A_{m\times n}B_{n\times p})\le \min\{r(A),r(B)\}$

$r(A)+r(B)\le r(AB)+n=r\begin{pmatrix}E_n & 0\\ 0 & AB\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}E_n & 0\\ A & AB\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}E_n & -B\\ A & 0\end{pmatrix}$

⑧ $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\le r(A)+r(B)$

⑥ A两行不成比例 $\Leftrightarrow r(A)\geq 2$

相关与线表 ⑦ $A_{m\times n}, B_{n\times s}$, 且 $AB=0$, 则 $r(A)+r$

秩 向量. 见到 $AB=0$ 用它个

eg3: $A_{m\times n}, B_{n\times m}$, $(n>m)$ 且 $AB=E$

求 $r(A)$、$r(B)$

解: $\because |AB|=1\neq 0$ $\therefore r(AB)=m$

$\because r(AB)\le r(A)$, $r(AB)\le r(B)$

$\therefore r(A)\geq m$, $r(B)\geq m$

又 $\because r(A)\le m$, $r(B)\le m$

$\therefore r(A)=r(B)=m$

eg4: 逆矩阵唯一性不证明.

eg5: $A_{n\times n}$, $A^2=E$

证: $r(E-A)+r(E+A)=n$

证明: $A^2=E \Rightarrow A^2-E=0$

$(E-A)(E+A)=0$

$r(E-A)+r(E+A)\le n$

又 $\because r(E+A)+r(E-A)\geq r(2E)=n$

$\therefore$

1. 行向量 $(a_1,a_2\cdots a_n)$ n维行

列向量 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ n维列

① $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)=\alpha^T\beta$

② $\alpha^T\alpha=|c$

2. 运算 模 $|\alpha|\triangleq\sqrt{a_1^2+\cdots a_n^2}$ ③ $(\alpha,k_1\beta_1+$

$\lambda\alpha=\lambda(a_1,a_2\cdots a_n)=(\lambda a_1\ \lambda a_2\cdots$

对应 $\beta=(b_1,b_2\cdots b_n)$

分量相乘 $\alpha+\beta\triangleq(a_1+b_1,a_2+b_2\cdots a_n+b_n)$

内积 $(\alpha,\beta)\triangleq a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_nb_n$

3. 线性组合及线性相关

定义: 设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 及 β 为同维向量组, 对任何常数 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m$, 称 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 的一个线性组合。称 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m$ 为组合系数。若存在常数组 $\lambda_1,\cdots\lambda_m$ 使得 $\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_m\alpha_m$, 则 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha$ 线性表示, 称 $\lambda_1\cdots\lambda_m$ 为表示系数。

eg: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

4-85

$\begin{cases} r(A)\le n \\ r(A)\le m \end{cases}$ $\Updownarrow$ $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ $r(\alpha)=\begin{cases}1 & \alpha\ne 0.\\ 0 & \alpha=0\end{cases}$

No.
Date. /

秩的不等式

$A\ne 0 \Leftrightarrow r(A)\ge 1$

① $0\le r(A_{m\times n})\le \min\{m,n\}$ 且 $r(A)=0 \Leftrightarrow A=0$

② $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$ $r(A)=r\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A\\AB\end{pmatrix}\ge r(AB)$

③ $r\begin{pmatrix}A & C\\0 & B\end{pmatrix}\ge r\begin{pmatrix}A & 0\\0 & B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$ $r(A)=r$ $r(B)=k$

$\begin{cases} r(AB)\le r(A)\\ r(AB)\le r(B)\end{cases}$

④ $r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$ $r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix}A & 0\\0 & B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A & B\\0 & B\end{pmatrix}$

⑤ $r(kA)=r(A)$ $k\ne 0$ ↓题中出现 $\begin{cases}A+B\\A-B\\r(A)+r(B)\end{cases}$ 使用此性质 $=r\begin{pmatrix}A+B & B\\B & B\end{pmatrix}\ge r(A+B)$

$r(A)+r(B)-n\le r(A_{m\times n}B_{n\times p})\le \min\{r(A),r(B)\}$

$r(A)+r(B)\le r(AB)+n=r\begin{pmatrix}E_n & 0\\0 & AB\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}E_n & 0\\A & AB\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}E_n & -B\\A & 0\end{pmatrix}$

⑧ $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\le r(A)+r(B)$

⑥ A两行不成比例 $\Leftrightarrow r(A)\ge 2$

相关与线表

⑦ $A_{m\times n}$, $B_{n\times s}$, 且 $AB=0$, 则 $r(A)+r(B)\le n$

秩 向量. 见到 $AB=0$ 用它↑

1. 行向量 $(a_1, a_2 \cdots a_n)$ n维行向量. 矩阵

列向量 $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ n维列向量.

① $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$

② $\alpha^T\alpha=|\alpha|^2$ $\alpha^T\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=0$

2. 运算 模 $|\alpha|\triangleq\sqrt{a_1^2+\cdots a_n^2}$ ③ $(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2\cdots k_s\beta_s)=k_1(\alpha,\beta_1)+\cdots k_s(\alpha,\beta_s)$

$\lambda\alpha=\lambda(a_1,a_2\cdots a_n)=(\lambda a_1\ \lambda a_2\cdots\lambda a_n)$

对应分量相乘 $\beta=(b_1, b_2\cdots b_n)$

$\alpha+\beta\triangleq(a_1+b_1, a_2+b_2\cdots a_n+b_n)$

内积 $(\alpha,\beta)\triangleq a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_nb_n$

证明: $A^2=E \to A=E$

$(E-A)(E+A)=0$

$r(E-A)+r(E+A)\le n$

又 $\because r(E+A)+r(E-A)\ge r(2E)=n$

$\therefore$

3. 线性组合及线性相关

定义: 设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 及 β 为同维向量组, 对任何常数 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m$, 称 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 的一个线性组合。称 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m$ 为组合系数。若存在常数组 $\lambda_1,\cdots\lambda_m$ 使得 $\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_m\alpha_m$; 则 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性表示, 称 $\lambda_1\cdots\lambda_m$ 为表示系数。

eg: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

4-85

No. $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_m\alpha_m=0$ (*)

Date. ① * 只有零解，即 $x_1\cdots x_m$ 全为0 称 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性无关

② * 有非零解，即∃不全为零0的…… 线性相关 非零（不全为零）

定义：设 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 为 m 个同型向量，若存在常数组 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m$ 使得 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_m\alpha_m=0$，则称 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性相关。

① 齐次有零解

否则，称 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 为线性无关。

eg：证明：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=$

证明：$\forall\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 使得 $\lambda_1\alpha_1+$

即 $\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\lambda_2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\lambda_3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\lambda_4\end{pmatrix}=$

故 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关。

eg：$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

① $r(A)\le 2$

② α,β 相关，证 $r(A)\le 1$

证明：α,β 相关，α,β 成比例

设 $\beta=k\alpha$，则 $A=\alpha\alpha^T+k\alpha\cdot(k\alpha)^T$

$=(1+k^2)\alpha\alpha^T$

$\because 1+k^2\ne0$ $\therefore r(A)=r(\alpha\alpha^T)$

$=r(\alpha)\le1$

4. 性质：

$k\alpha=0\ (k\ne0)$

① 一个向量 α 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha=0$ | 含0向量的向量组一定相关。

② 两个向量 $\alpha、\beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha、\beta$ 对应成比例 平行

$\rightrightarrows$ 线性相关 线性无关

定理1：

① m个向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性相关

至少有一个 $\Updownarrow$

∃其中一个向量 α_i 可由余下的 $m-1$ 个向量线性表示

反

证：$\Longrightarrow$ 设 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 线性相关，则∃不全为0的数组 $\lambda_1\ \lambda_2\cdots\lambda_m$

使得 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_m\alpha_m=0$

不妨设 $\lambda_{i0}\ne0$，$\lambda_{i0}\alpha_{i0}=-\lambda_1\alpha_1-\cdots-\lambda_{i0-1}\alpha_{i0-1}-\cdots-\lambda_n\alpha_n$

则 $\alpha_{i0}=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{i0}}\alpha_1-\cdots-\dfrac{\lambda_{i0-1}}{\lambda_{i0}}\alpha_{i0-1}-\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{i0}}\alpha_n$

即 α_{i0} 可由 $\alpha_1\cdots\ \alpha_m$ 线性表示

$\Longleftarrow$ 不妨设 α_m 可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_{m-1}$ 线性表示，即∃常数 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_{m-1}$ 使得 $\alpha_m=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}$

故 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}+(-1)\alpha_m=0$.

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_m\alpha_m=0$ (*)

① * 只有零解, 即 $x_1\cdots x_m$ 全为0 称 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性无关

② * 有非零解, 即∃不全为零0的…… 线性相关 非零 (不全为零)

定义: 设 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 为 m 个同型向量, 若存在常数组 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m$

使得 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_m\alpha_m=0$, 则称 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性相关。

否则, 称 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 为线性无关。 ① 齐次有零解

eg: 证明: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性

证明: ∀ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 使得 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+\lambda_4\alpha_4=0$

即 $\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\lambda_2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\lambda_3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

故 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关。

4. 性质: $k\alpha=0$ $(k\neq 0)$

① 一个向量 α 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha=0$ | 含0向量的向量组一定相关。

② 两个向量 α,β 线性相关 $\Leftrightarrow$ α,β 对应成比例 (平行)

⇒ 线性相关 线性无关

定理1:

① m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性相关

$\Updownarrow$

至少有一个

∃其中一个向量 α_i 可由余下的 $m-1$ 个向量线性表示

证: $\Longrightarrow$ 设 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 线性相关, 则∃不全为0的数组 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m$

使得 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_m\alpha_m=0$

不妨设 $\lambda_{i_0}\neq 0$, $\lambda_{i_0}\alpha_{i_0}=-\lambda_1\alpha_1-\cdots-\lambda_{i_0-1}\alpha_{i_0-1}-\cdots-\lambda_n\alpha_n$

则 $\alpha_{i_0}=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{i_0}}\alpha_1-\cdots-\dfrac{\lambda_{i_0-1}}{\lambda_{i_0}}\alpha_{i_0-1}-\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{i_0}}\alpha_n$

即 α_{i_0} 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性表示

$\Longleftarrow$ 不妨设 α_m 可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_{m-1}$ 线性表示, 即∃常数 λ_1,λ_2

$\cdots\lambda_{m-1}$ 使得 $\alpha_m=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}$

故 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}+(-1)\alpha_m=0$.

No.
Date. / /

由于 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_{m+1}$，$-1$ 不全为 0，从而 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性相关

定理2:

② 设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m,\beta$ 线性相关

$\Updownarrow$

β 可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 唯一表示。

证：$\Rightarrow$ 由题设 ∃ 不全为 0 的数组 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m,\lambda_{m+1}$ 使得：

$\lambda_1\alpha_1+\cdots\lambda_m\alpha_m+\lambda_{m+1}\beta=0$

若 $\lambda_{m+1}=0$，则 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_m\alpha_m=0$ 且 $\lambda_1\cdots\lambda_m$ 不全为 0

从而 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性相关与题设矛盾

因此 $\lambda_{m+1}\neq0$

$\lambda_{m+1}\beta=-\lambda_1\alpha_1-\lambda_2\alpha_2-\cdots\lambda_m\alpha_m$

$$\beta=-\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}}\alpha_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_{m+1}}-\cdots-\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\alpha_m$$

即 β 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性表示。

证唯一：若 $\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m$ 且 $\beta=u_1\alpha_1+\cdots u_m\alpha_m$ 且 k_i,u_i 为

假设第二 常数，$1\le i\le m$

相等即可 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=u_1\alpha_1+\cdots+u_m\alpha_m$ $\nLeftarrow$ 如 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

$(k_1-u_1)\alpha_1+\cdots(k_m-u_m)\alpha_m=0$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

由于 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性无关 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{vmatrix}=6\neq0$

$\therefore k_1-u_1=k_2-u_2=\cdots=k_m-u_m=0$ 线性无关

即 $k_1=u_1$，$k_2=u_2\cdots k_m=u_m$ 而 $(\alpha_1,\alpha_2)=1\neq0$

系数唯一 ③ 全组无关 ⇒ 部分无关 $\therefore$ 不正交

判定向量组线性相关的方法 部分相关 ⇒ 全部相关

推论1：若 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性无关，则 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_2\\\beta_2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\alpha_m\\\beta_m\end{pmatrix}$ 一定线性无关。

$\lambda_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}\alpha_2\\\beta_2\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_m\begin{pmatrix}\alpha_m\\\beta_m\end{pmatrix}=0$

4-8) $\begin{pmatrix}\lambda_1\alpha_1\\\lambda_1\beta_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_2\alpha_2\\\lambda_2\beta_2\end{pmatrix}+\cdots\begin{pmatrix}\lambda_m\alpha_m\\\lambda_m\beta_m\end{pmatrix}=0$ ⑧ $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 非零，两两正交 ⇒ $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性无关 ⇍

① 添向量个数 提高相关性

添维数 提高无关性

令 $k_1\alpha_1+\cdots k_n\alpha_n=0$

$(\alpha_1,k_1\alpha_1+\cdots k_n\alpha_n)=0$

$k_1(\alpha_1,\alpha_1)+k_2(\alpha_1,\alpha_2)+\cdots k_n(\alpha_1,\alpha_n)=0$

$k_1(\alpha_1,\alpha_1)=0\Rightarrow\alpha_1^T\alpha_1=|\alpha_1|^2>0$

$\therefore k_1=0$

Wengu

No.
Date. / /

推论2：若 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}$ …… $\alpha_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{pmatrix}$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关 线性相关

$\Updownarrow$

$r\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}=m$（列数） $(<m)$

"知路一行一方程，一列一未知数"

$\alpha_1,\cdots\alpha_{n+1}$ 线性相关
$\Updownarrow$
$x_1\alpha_1+\cdots x_{n+1}\alpha_{n+1}=0$ 有非零解
$\because D=(\alpha_1\cdots\alpha_{n+1})$ $r(D)\leq n$ 有

推论3：$n+1$ 个 n 维向量一定线…
推论4：n 个 n 维向量组线… "当"
$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 无关
$\Updownarrow$ $\Updownarrow$
$x_1\alpha_1+\cdots x_n\alpha_n=0$ 只有零解
$\Updownarrow$ 以该向量组为列向量的行…
$|D|\neq 0$

eg：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=$…

3个3维

$\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&4&5\end{vmatrix}=5\neq0$，$\alpha_1$、$\alpha$…

eg4：α_1… $\beta_2=\alpha_2+\alpha$… 讨论β_1… 法一：令k… $(k_1+k_4$… $\because\alpha_1\ldots\alpha$… $|D|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$ … $\Downarrow$ (x)有非零… 法二：β_1-… $\beta_1-\beta_2+\beta_3$

eg1：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，证：α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示
证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 $\Rightarrow\alpha_2,\alpha_3$ 无关
$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关 $\Rightarrow\alpha_4$ 可由 α_2,α_3 线性表示 $\Rightarrow\alpha_4$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

eg2：α_1,α_2 无关，β_1 可由 α_1,α_2 线性表示，β_2 不可由 α_1,α_2 线性表示
A. $\alpha_1,\alpha_2,k\beta_1+\beta_2$ 无关
B. $\alpha_1,\alpha_2,k\beta_1+\beta_2$ 相关
C. $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1+k\beta_2$ 无关
D. $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1+k\beta_2$ 相关
$\begin{cases}k\neq0\\k=0\end{cases}$ (A)

eg：判定下列向量组是否线性相关
(1) $\alpha_1=(3,-1,0)$，$\alpha_2=(1,4,-1)$ 否
(2) $\alpha_1=(a,1,b,0,0)^T$，$\alpha_2=(c,0,d,6,0)^T$ $\alpha_3=(a,0,c,5,6)^T$ 否

$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&6&5\\0&0&6\end{vmatrix}=36\neq0$，故 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix}$ 线性无关，增加分量也线性无关

线性无关的向量组在同一个…

向量组等价及秩 线性相关的向量组在…

定义：设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 及 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$…
$\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 线性表示 $\forall 1\leq i\leq$…
由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性表示…
个数不一定相同 若向量组，$\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 与 $\beta_1,\cdots$…
称两向量组等价。
部分一定可以由整体线性表示。

eg3：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$
讨论 β_1,β_2,β_3 相关性。 同时定义
解：令 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$
$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$
$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_2+k_1)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$
$\because\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关
$\therefore\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_2+k_1=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$ $\because|D|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$ $\therefore$ 只有零解
线性无关

推论2：若 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\ \vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}$ …… $\alpha_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\ \vdots\\a_{nm}\end{pmatrix}$，则 $\alpha_1、\alpha_2、\cdots\alpha_m$ 线性无关 线性相关

$\Updownarrow$

$r\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\ \vdots&\vdots&&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}=m$（列数）（$<m$）

怎么记"一行一方程，一列一未知数"

$\alpha_1,\cdots\alpha_{n+1}$ 线性相关

$\Updownarrow$

$x_1\alpha_1+\cdots x_{n+1}\alpha_{n+1}=0$ 有非零解

④ $\because D=(\alpha_1,\cdots\alpha_{n+1})$ $r(D)<n$ 间

推论3：$n+1$ 个 n 维向量一定线……

推论4：⑤ n 个 n 维向量组线性……

$\alpha_1、\alpha_2\cdots\alpha_n$ 无关

$\Updownarrow$

$x_1\alpha_1+\cdots x_n\alpha_n=0$ 只有零解

$\Updownarrow$

$|D|\neq0$

$\Updownarrow$ "否"

以该向量组为列向量的行……

eg：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=$……

$\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&4&3\end{vmatrix}=3\neq0$，$\alpha_1、\alpha$…… 对3角

eg4：$\alpha_1\sim\alpha_4$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$

讨论 $\beta_1\sim\beta_4$ 相关性。

法一：令 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=0$

$(k_1+k_4)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3+(k_3+k_4)\alpha_4=0$

$\because\alpha_1\sim\alpha_4$ 无关 $\therefore\begin{cases}k_1+k_4=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\\k_3+k_4=0\end{cases}$ $*$

$|D|=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0$

$\Downarrow$

$(*)$ 有非零解，$\therefore\beta_1\sim\beta_4$ 线性相关。

法二：$\beta_1-\beta_2=\alpha_1-\alpha_3$，$\beta_3-\beta_4=\alpha_3-\alpha_1$

$\beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4=0$

$\therefore$ —

eg：判定下列向量组是否线性相关

(1) $\alpha_1=(3,-1,0)$，$\alpha_2=(1,4,-1)$ 否

b≠6 (2) $\alpha_1=(a,1,b,0,0)^T$，$\alpha_2=(c,0,d,6,0)^T$ $\alpha_3=(a,0,c,5,6)^T$ 否

$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&6&5\\0&0&6\end{vmatrix}=36\neq0$，故 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix}$ 线性无关，增加分量也线性无关

线性无关的向量组在同一个……

向量组等价必反秩 线性相关的向量组在……

定义：设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 及 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$ ……

$\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 线性表示 $\forall\ 1\le i\le$ ……

个数不一 由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性表示……

定相同 若向量组 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 与 $\beta_1,\cdots$ ……

称两向量组等价。

∴部分一定可以由整体线性表示.

eg3：$\alpha_1、\alpha_2、\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$

讨论 β_1,β_2,β_3 相关性。 回归定义

解：令 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$

$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_2+k_1)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$

$\because\alpha_1、\alpha_2、\alpha_3$ 线性无关

$\therefore\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_2+k_1=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$ $|D|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$ ∴只有零解

线性无关

推论2：若 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}$ …… $\alpha_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{pmatrix}$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关 线性相关

$\Updownarrow$

$r\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}=m$（列数）
$(<m)$

"矩阵一行一方程，一列一未知数"

$\alpha_1,\cdots\alpha_{n+1}$ 线性相关
$\Updownarrow$
$x_1\alpha_1+\cdots x_{n+1}\alpha_{n+1}=0$ 有非零解
$\because D=(\alpha_1\cdots\alpha_{n+1})$ $r(D)<n$ 满

推论3：$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关。"右长、上下矮"

推论4：n 个 n 维向量组线性无关；
$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 无关
$\Updownarrow$ "等"
$x_1\alpha_1+\cdots x_n\alpha_n=0$ 只有零解
$\Updownarrow$
$|D|\neq0$
以该向量组为列向量的行列式不等于0。

eg：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&4&3\end{vmatrix}=3\neq0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。（3个3维）

eg：判定下列向量组是否线性相关

(1) $\alpha_1=(3,-1,0)$，$\alpha_2=(1,4,-1)$ 否

(2) $\alpha_1=(a,1,b,0,0)^T$，$\alpha_2=(c,0,d,6,0)^T$ $\alpha_3=(a,0,c,5,6)^T$ 否

$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&6&5\\0&0&6\end{vmatrix}=36\neq0$，故 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix}$ 线性无关，增加分量也线性无关

线性无关的向量组在同一位置增加分量一定线性无关

线性相关的向量组在同一位置去掉分量仍线性相关

向量组等价及秩

定义：设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 及 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$ 为同型向量，若 β_i 均可由 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 线性表示 $\forall 1\leq i\leq s$，则称向量组 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性表示。

若向量组，$\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 与 $\beta_1\cdots\beta_s$ 可以互相线性表示，则称两向量组等价。

个数不一定相同

部分一定可以由整体线性表示.

② ① A: $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 为向量组，$A' = \alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta$

case1: A组的秩 = A'组的秩 ⟺ β 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性表示

case2: A'组的秩 = A组的秩 + 1 ⟺ β 不可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性表示

定义：

设 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 为同型向量，$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots \alpha_{i_r}$ 为其中 r 个向量，

若满足 ① $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_r}$ 线性无关（r个线性无关） 把多余向量扔掉

② $\forall 1 \le k \le n$，$\alpha_k, \alpha_{i_1}, \cdots \alpha_{i_r}$ 一定线性相关（r+1）个线性相关

则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_r}$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 的一个极大线性无关组。

r 称为极大线性无关组的秩。

定理3：

设 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性无关，$\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s$ 与 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 同型号

且 $\alpha_1, \cdots \alpha_m$ 可由 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s$ 线性表示，则 $s \geq m$。

向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 与它的任何极大线性无关组相互线性表示，线性无关的个数

注①向量组与它的极大线性无关组等价，从而它的任何两个极大线

性无关组相互等价。 故不唯一

① ②向量组的任何两个极大线性无关组中的向量的个数相同，完全

由向量组决定。称此个数为该向量组的秩，记为 $r\{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m\}$

② ③ $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 线性无关 ⟺ 该组一定为极大线性无关组 ⟺ $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 的秩为 n

④ 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$A = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$，$A = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$ 行向量组

三秩相等　　　列向量组

矩阵可由向量表示

④ 则 $\underbrace{r\{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n\}}_{\text{列秩}} = r(A) = \underbrace{r\{\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m\}}_{\text{行秩}}$

典型方法：组

判定向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 的秩及极大线性无关组，可采用以下方式：

① $A = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$ 或 $A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T \cdots \alpha_n^T)$

α_i 为列↑　　　α_i 为列↑

② 对 A 作初等行变换化为行阶梯形

③ 在行阶梯形中找出非零行的第一个非零元所在的列 $i_1, i_2 \cdots i_r$

☆ 则 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots \alpha_{i_r}$ 为极大线性无关组。

eg: 设 $\alpha_1 = (1,1,1,1)$，$\alpha_2 = (1,2,1,1)$，$\alpha_3 = (3,5,3,3)$

$\alpha_4 = (2,-1,3,4)$，$\alpha_5 = (5,3,6,7)$

求 1). $r\{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_5\}$

2) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大线性无关组

4-8

No.
Date. / /

3) 将余下的向量用该极大线性无关组线性表示

解：令 $A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{只能}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) $r\{\alpha_1 \cdots \alpha_5\}=3$

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

(3) $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

$\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$

$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

$\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$

向量空间：

定义：设 V 为一个向量集，满足 ① $\forall \alpha、\beta \in V$，则 $\alpha+\beta \in V$；加法

② $\forall$ 数 k 及 $\alpha \in V$，$k\alpha \in V$；数乘

则称 V 为一个向量空间或线性空间

定义：

设 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 为向量空间 V 中 m 个向量，如果 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性无关，且 $\forall \alpha \in V$，α 均可由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性表示，则称 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 为 V 的一个基底。称 m 为向量空间 V 的维数，记为 $\dim(V)=m$。

eg $V=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in (-\infty,+\infty)\ 1 \le i \le n\right\}=R^n$

基底 $e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ $e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$，

定义：设 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 为向量空间 V 的一个基底，$\forall \alpha \in V$，则 $\exists$ 唯一的数组 $x_1, x_2 \cdots x_m$ 使得 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$。称 $(x_1, x_2 \cdots x_m)^T$ 为 α 在基底 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 下的坐标。

设 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$ 为 V 的另一个基底

$$\beta_1 = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m)\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{m1} \end{pmatrix} \cdots\cdots \beta_m = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m)\begin{pmatrix} p_{1m} \\ p_{2m} \\ \vdots \\ p_{mm} \end{pmatrix}$$

记 $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & & p_{mm} \end{pmatrix}$，称 P 为从基底 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 到基底 $\beta_1 \cdots \beta_m$ 下的过渡矩阵。

$$(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

即 $(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m)P$

过渡矩阵一定可逆 　 当 $(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$，称 $e_1, e_2 \cdots e_m$ 为 V 的一个标准正交基。

可逆

定理：

设空间 V 中向量 α 在基底 $\alpha_1, \cdots \alpha_m$ 下的坐标为 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

α 在基底 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$ 下的坐标为 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

则 $X = PY$，其中 $(\beta_1 \cdots \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m)P$.

eg：设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 V 的一组基底，$\beta_1 = \alpha_1$，$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$，$\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
求由基底 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基底 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵，并求 $\gamma = 2\beta_1 + 5\beta_2 - 3\beta_3$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标 X

No.

Date. / /

解：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\gamma=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}$　$X=P\gamma=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$

线性方程组

1. 线性方程组及叠加原理

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \quad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\qquad (*)$$

记 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

(*) 可记为 $AX=\beta$，称 A 为 * 的系数矩阵　行秩 未知数个数

$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$ 为非齐次项

说明b是否和 b加到列秩不变

当 $\beta=0$ 时，方程为 $AX=0$，称为齐次线性方程　$\begin{cases}r(A)=n \text{ 只有零解}\\ r(A)<n \text{ 有非零解}\end{cases}$

当 $\beta\neq0$ 时，$AX=\beta$ 为非齐线性方程

称 $(A\,\vdots\,\beta)$ 为 * 的增广矩阵　~~约束条件=未知数个数~~

核心定理 $\begin{cases}① AX=\beta \text{ 有解} \Leftrightarrow r(A\,\vdots\,\beta)=r(A)\\ ② AX=\beta \text{ 无解} \Leftrightarrow r(A\,\vdots\,\beta)>r(A)\end{cases}$

当 $r(A\,\vdots\,\beta)=r(A)=n$ ⇒ 有唯一解

当 $r(A\,\vdots\,\beta)=r(A)<n$ ⇒ 有无穷个解

做初等行变换，方程组有解 $=r(A)+1$

$A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$

$AX=\beta$.　$\beta=x_1\alpha_1+\cdots x_n\alpha_n$　$r\{\alpha_1\cdots\alpha_n,\beta\}=r\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n\}=r(A)$.

$\forall x_1, x_2$ 为 $AX=0$ 的解

$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$ 一定是 $AX=\lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 0=0$ 的解.

Date. / /

叠加原理：设 x_1 为 $AX=\beta_1$ 的一个解向量，x_2 为 $AX=\beta_2$ 的一个解向量

则对于常数 λ_1, λ_2，$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$ 一定是方程组 $AX=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2$ 的一个解。

证：由已知 $Ax_1=\beta_1$，$Ax_2=\beta_2$

$$A(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)=A(\lambda_1 x_1)+A(\lambda_2 x_2)$$
$$=\lambda_1 Ax_1+\lambda_2 Ax_2$$
$$=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2$$

即 $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$ 为 $AX=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2$ 的一个解.

eg：已知 x_1, x_2 为非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的两个解，若常数 λ, μ 满足 $\lambda x_1+\mu x_2$ 还是 $AX=\beta$ 的解，则 λ, μ 的关系式为 ______

解：由叠加原理，$\lambda x_1+\mu x_2$ 一定是 $Ax=\lambda\beta+\mu\beta$ 的解

即 $Ax_3=(\lambda+\mu)\beta$

又由已知，$Ax_3=\beta$，故 $(\lambda+\mu)\beta=\beta$

$(\lambda+\mu-1)\beta=0$

$\because \beta\neq 0$ $\therefore \lambda+\mu=1$

线性方程组解的结构及解法

定理1：

$AX=0$ 解向量集 V 为一个线性空间，且其解空间 V 的维数为 $n-r(A)$。

定理2：

① $AX=0$ 的一个解 x_1 与 $AX=\beta$ 的一个解 x_2 之和还是 $AX=\beta$ 的解；

② $AX=\beta$ 的两个解 x_1, x_2 之差 x_1-x_2 一定是 $AX=0$ 的解。

x_1 $AX=\beta$ $x_1-x_2=x_1+(-1)x_2$

x_2 $AX=\beta$ 为 $AX=1\cdot\beta+(-1)\cdot\beta=0$ 的解

定理3：

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$AX=0$ 的解可表示为 $AX=0$ 的 $n-r(A)$ 线性无关的解向量 $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r(A)}$ 的线性组合，即

通解 $X=C_1\xi_1+C_2\xi_2+\cdots C_{n-r(A)}\xi_{n-r(A)}$.

eg: 解方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1+2x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$

解: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 = 4x_3+5x_4 \\ x_2 = -3x_3-4x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 4c_1+5c_2 \\ x_2 = -3c_1-4c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$ $\xi_1=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

为基础解系

通解为 $X=c_1\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

定理:

若 $AX=\beta$ 有解，则 $AX=\beta$ 的通解为导出组 $AX=0$ 的通解与 $AX=\beta$ 的一个特解之和。

eg: 解方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-x_3-x_4-2x_5=1 \\ 2x_1+2x_2-x_4-2x_5=1 \end{cases}$

解: 增广矩阵 $(A\vdots\beta)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

通解 $\xi=\begin{pmatrix}-c_1+\frac{1}{2}c_2+c_3+\frac{1}{2}\\ c_1\\ -\frac{1}{2}c_2-c_3-\frac{1}{2}\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}$　　$x_1=-x_2+\frac{1}{2}x_4+x_5+\frac{1}{2}$
$x_3+\frac{1}{2}x_4+x_5=-\frac{1}{2})$

$=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$

eg. 当a为何值时，方程组 $\begin{cases}-x_1-4x_2+x_3=1\\ ax_2-3x_3=3\\ x_1+3x_2+(a+1)x_3=0\end{cases}$ 无解，有唯一解.

有无穷多解？并在有解时求解

解. 增广矩阵 $(A\mid\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-4&1&1\\0&a&-3&3\\1&3&a+1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&-1&-1\\0&a&-3&3\\0&-1&a+2&1\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&-1&-1\\0&-1&a+2&1\\0&a&-3&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&-1&-1\\0&-1&a+2&1\\0&0&a^2+2a-3&a+3\end{array}\right)$

① 当 $a^2+2a-3\neq0$　$(a+3)(a-1)=0$　$a\neq-3$ 且 $a\neq1$ 时，$R(A)=R(A\mid\beta)=3$

有唯一解　$(A\mid\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&-1&-1\\0&1&-a-2&-1\\0&0&1&\frac{1}{a-1}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{10+a}{a-1}\\0&1&0&\frac{3}{a-1}\\0&0&1&\frac{1}{a-1}\end{array}\right)$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{a+10}{a-1}\\ \frac{3}{a-1}\\ \frac{1}{a-1}\end{pmatrix}$

② 当 $r(A)=r(A\mid\beta)=2$ 时，$a=-3$　$(A\mid\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&-1&-1\\0&-1&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-5&3\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$

4-15

No.

Date.　/　/

$$\xi=\begin{pmatrix}5c_1+3\\-c_1-1\\c_1\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

③当 $a=1$ 时，$R(A)=2<r(A\,\vdots\,\beta)=3$ 原方程组无解

线相方面的例题

eg1: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$

$\beta_3=\alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3$，讨论 β_1,β_2,β_3 相关性

定义法

解：令 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_1+2k_2+4k_3)\alpha_2+(k_1+3k_2+9k_3)\alpha_3=0$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$\therefore \begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_1+2k_2+4k_3=0\\k_1+3k_2+9k_3=0\end{cases}$ $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=(2-1)(3-1)(3-2)=2\neq0$

$\therefore k_1=k_2=k_3=0$

$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关

Again

eg2: α_1,α_2 与 β_1,β_2 皆为3维无关组。证∃非零向量 δ，使 δ 可同时由 α_1,α_2 与 β_1,β_2 线性表示。

证明："左右长，上下短"

$\because \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 线性相关，∃不全为零 k_1,k_2,l_1,l_2 使

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+l_1\beta_1+l_2\beta_2=0$

$\Rightarrow k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-l_1\beta_1-l_2\beta_2\triangleq\delta$

若 $\delta=0\Rightarrow\begin{cases}k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0\\l_1\beta_1+l_2\beta_2=0\end{cases}$ $\because \alpha_1,\alpha_2$ 无关 $\therefore k_1=k_2=0$，$l_1=l_2=0$ 矛盾

$\therefore \delta\neq0$

4-96

P线性相关

No.
Date. / /

Again

6 eg3: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$

证: β_1,β_2,β_3 线性无关.

性质法

证明: 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关，$r(A)=3$

令 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$$\boxed{B=(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}$$

$=AQ$

$\because |Q|=2\neq 0 \quad \therefore r(Q)=3 \Rightarrow r(AQ)=r(B)=3$

$r(B)=r(A)=3$

$\Rightarrow \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性无关

Again

向量 { 左乘右不乘 ⇒ 行
左不乘右乘 ⇒ 方阵

eg4: $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为 n 个 n 维向量

证: $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 无关 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}\alpha_1^T\alpha_1&\cdots&\alpha_1^T\alpha_n\\\vdots&\text{——}&\vdots\\\alpha_n^T\alpha_1&\text{——}&\alpha_n^T\alpha_n\end{vmatrix}\neq 0$

证明: 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$

$$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1&\alpha_1^T\alpha_2&\cdots&\alpha_1^T\alpha_n\\\vdots&&&\\\alpha_n^T\alpha_1&\cdots&\cdots&\alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}$$

$\alpha_1\cdots\alpha_n$ 无关 $\Leftrightarrow r(A)=n \Leftrightarrow r(A^TA)=n \Leftrightarrow |A^TA|\neq 0$

4-97

eg5：A：$\alpha_1, \cdots \alpha_m$；B：$\beta_1 \cdots \beta_n$ 为A组和B组
若A组可由B组线性表示，则A组的秩 ≤ B组的秩。

证明：∵A组可由B组线性表示

$$\therefore \begin{cases} \alpha_1 = k_{11}\beta_1 + \cdots k_{1n}\beta_n \\ \vdots \\ \alpha_m = k_{m1}\beta_1 + \cdots k_{mn}\beta_n \end{cases}$$

令 $A = (\alpha_1, \cdots \alpha_m)$，$B = (\beta_1, \cdots \beta_n)$

$$A = (\alpha_1 \cdots \alpha_m) = (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n)\begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{m1} \\ \vdots & & \\ k_{1n} & \cdots & k_{mn} \end{pmatrix}$$

$\therefore A = B \cdot K$

$r(A) = r(B \cdot K) \le r(B)$

∴A组的秩 ≤ B组的秩

eg6. 等价的向量组秩相等，反之不对

注：①若A组可由B组线性表示，但B组不可由A组线性表示
则A组的秩 < B组的秩
②设A组的秩 = B组的秩且A组可由B组线性表示

$$\Downarrow$$

A组与B组等价

No.
Date. / /

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

解 ①只有零解 ②除零解外有非零解

$\Updownarrow$

$x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=0$

相关性 无关性 ① $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性无关 ② $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关

$\Updownarrow$

$AX=0$

秩 ① $r(A)=n$ ② $r(A)<n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

解 ① 有解 { 1个 无数个 ② 无解

$\Updownarrow$

$x_1\alpha_1+\cdots x_n\alpha_n=b$

① b 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性表示 ② b 不可 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性表示

$\Updownarrow$

$AX=b$

秩 ① $r(A)=r(\bar{A})$ ② $r(\bar{A})=r(A)+1$

三秩相等 $A=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ 系数矩阵
$\bar{A}=(\alpha_1\cdots\alpha_n,b)$ 增广矩阵

Wengu®

4-29

线性方程组解的结构

1. $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_s$ 为 $AX=0$ 的解，$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$ 仍为 $AX=0$ 的解
2. $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_s$ 为 $AX=\beta$ 的解 ① $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ 为 $AX=0$ 的解

$\Updownarrow$

$\boxed{k_1+k_2+\cdots+k_s=0}$

② $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ 为 $AX=\beta$ 的解

$\Updownarrow$

$\boxed{k_1+k_2+\cdots+k_s=1}$

3. ξ, η 分别 $AX=0$ 和 $AX=\beta$ 的解，则 $\xi+\eta$ 为 $AX=\beta$ 的解
4. η_1, η_2 为 $AX=\beta$ 的解，$\eta_1-\eta_2$ 为 $AX=0$ 的解

7 通解：

Part(一) $AX=0$

eg1: $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_2+4x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2+5x_3-x_4=0 \end{cases}$，求通解

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

技巧：从上往上，从左往后

一般处理方法：变为末行为非零行和第一个非零元素

方法一：同解方程组为 $\begin{cases} x_1+9x_3-2x_4=0 \\ x_2+4x_3-x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-9x_3+2x_4 \\ x_2=-4x_3+x_4 \end{cases}$

通解：$X=\begin{pmatrix} -9x_3+2x_4 \\ -4x_3+x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3\underbrace{\begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\xi_1} + x_4\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\xi_2}$

4-100

$x_3=1, x_4=0$ $\quad$ No.

$\rightarrow x_3=0, x_4=1$ $\quad$ Date. / /

① ξ_1、ξ_2 皆为 $Ax=0$ 的解

② ξ_1、ξ_2 个数与自由变量个数相等

③ ξ_1、ξ_2 线性无关

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $A=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ ∴ 无关

$\begin{pmatrix}-9\\-4\\1\\0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 无关（添维数）

方法二： $X=k_1\begin{pmatrix}-9\\-4\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

eg2: $Ax=0$

解 $A\xrightarrow{\text{初行变}}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&4\\0&1&1&2&-1\\&&&&\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&3&3\\0&1&1&2&-1\\&&&&\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$

$X=k_1\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\xi_1}+k_2\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\xi_2}+k_3\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\xi_3}.$

①先排自由项

②去自由中取（变号）

注：① ξ_1、ξ_2、ξ_3 为 $Ax=0$ 的解；

② ξ_1、ξ_2、ξ_3 个数 $=5-r(A)$

③ ξ_1、ξ_2、ξ_3 线性无关 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$

∴线性无关 ⇒ ξ_1、ξ_2、ξ_3 线性无关

ξ_1、ξ_2、ξ_3 称基础解系 ⇒ 不唯一

4-101

No.
Date. / /

eg3: $Ax=0$

解: $A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$ 未知数5个
约束3个 "归一性"
2个自由变量 "排他性"

$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

通解为 $X = k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

(二) $Ax=b$

1° $(A\vdots\beta) \to$ 阶梯化

2° ① $r(A) \neq r(A\vdots\beta)$ 无解

② $r(A) = r(A\vdots\beta)$

3° 归一、排它

4° 通解

eg1: $Ax=b$

解: $(A\vdots\beta) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 2 \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$ 有4个未知数
2个约束 $\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 2 \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$

$r(A) = r(A\vdots\beta) = 2 < 4$ $\therefore Ax=b$ 有无数个解

方法一: 同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 2x_4 - 1 \\ x_2 = x_3 + 4x_4 + 2 \end{cases}$

$\therefore$ 通解: $X = x_3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wengu

No.
Date. / /

非齐次通解 = 齐次通解 + 非齐次特解

方法二：$X = k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2\\4\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ 自由常数项全取0

eg2：$AX=b$

解：$(A\vdots\beta) \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -3 & 5 & 1\\0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -3 & 7 & 4\\0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$

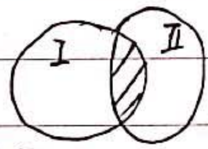
$r(A) = r(A\vdots\beta) = 2 < 5$ 无数个解

通解：$X = k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}-7\\-2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

公共解与同解

(一) 公共解

$AX=0$ (I) （非齐也可）
$BX=0$ (II)



求法：方法一：(I)(II)的公共解即 $\begin{cases}AX=0\\BX=0\end{cases}$ 或 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 的解

方法二：求(I)的通解，代入(II)

方法三：求(I)、(II)通解，令两者相等。

秩相等

(二) 同解：

(四个图重合)

定理 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解 $\Rightarrow$ $r(A)=r(B)$
$\not\Leftarrow$

$AB=0$ $\begin{cases}r(A)+r(B)\le n \text{（内标）}\\A\beta_1=0, A\beta_2=0, \cdots A\beta_s=0\end{cases}$
即 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s$ 为 $AX=0$ 之解

$A_{m\times n}$ $B_{n\times s} = (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s)$

$AB = (\quad)(\vdots\quad)$

列

$= \begin{pmatrix}\cdot & \cdot\\A\beta_1 & A\beta_2\end{pmatrix} = (A\beta_1, A\beta_2 \cdots A\beta_s)$ 即 $A(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s) = (A\beta_1, A\beta_2 \cdots A\beta_s)$

$4-103$ 像常数，与其计算规则相同

No.
Date. / /

8 线性方程组方面的题 (小题居多)

型一 概念与原理

eg1. $A_{3\times3}$，$r(A)=2$，A每行之和为0，$AX=0$ 的通解 ______

分析：未知数为3个，约束条件为2个 ⇒ 自由变量为1个 ⇒ 基础解系含1个解向量

解：∵ $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$

∴通解 $X=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

eg2: $A_{4\times4}$，$\underbrace{A_{21}}_{\text{代数余子式}}\neq0$，$r(A)<4$，求 $AX=0$ 通解

[分析]：4个未知数，约束条件未知 A_{21} 想到伴随矩阵

解：1° $r(A)<4 \Rightarrow r(A^*)=0$ 或1

∵$A_{21}\neq0$ ∴ A^* 不可能为0阵 $\Rightarrow r(A^*)=1$

∴$r(A)=n-1=3$

2° $Ax=0$ 基础解系含一个解向量

3° $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}&A_{41}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}&A_{42}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}&A_{43}\\A_{14}&A_{24}&A_{34}&A_{44}\end{pmatrix}$ ∵$A\cdot A^*=|A|\cdot E=0$ A^* 的四个列均为解

∴$X=k\begin{pmatrix}A_{21}\\A_{22}\\A_{23}\\A_{24}\end{pmatrix}$

eg3. $A_{3\times3}\neq0$，A第一行 a、b、c 不全为0

$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&m\end{pmatrix}$，且 $AB=0$，求 $AX=0$ 的通解。

[分析]：求通解 常识 n个未知数，n个约束 ⇒ 几个自由 ⇒ 秩

解：1° $AB=0 \Rightarrow r(A)+r(B)\leq3$

2° ① $m\neq9$，$r(B)=2 \Rightarrow r(A)\leq1$

∵$A\neq0$ ∴$r(A)\geq1$ $\Rightarrow r(A)=1$

Wengu®

No.
Date. / /

$\because AB=0$

$\therefore x = k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}3\\6\\m\end{pmatrix}$ B的三个列向为A的解 且要求无关

③ $m=9$，$r(B)=1$，$r(A)\le 2$

又 $r(A)\ge 1$ $\therefore 1\le r(A)\le 2$

case 1 $r(A)=2$

$\because AB=0$

$\therefore x = k\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 3个列成比例 ⇒只能提供一个

case 2 $r(A)=1$ 两行不成比例 $r(A)\ge 2$

设 $a\ne 0$，$A\to\begin{pmatrix}a&b&c\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{b}{a}&\frac{c}{a}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$x = k_1\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}$

eg4: $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\alpha_1,\alpha_2$ 无关，$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$，求 $AX=0$ 通解

解: [分析]: 3个未知数，1个约束，

又是矩阵，又是向量 ⇒ 三秩相等 ⇒ 研究向量组相关性即可

1° α_1、α_2 无关，$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$，$r(A)=2<3$

$AX=0$ 的基础解系含一个无关解向量.

2° $AX=0 \Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$

$\because \alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$ $\therefore \alpha_3-2\alpha_1+\alpha_2=0$

$\therefore$ 通解为 $X=k\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

No.
Date. / /

eg5 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_1$、$\alpha_3$无关，$\alpha_2=\alpha_1-2\alpha_3$，$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$

又$b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求$AX=b$通解

[分析] 向量、矩阵 ⇒ { ① 三秩相等
② 方程组的向量形式和矩阵形式

解：1° $r(A)=r(A\vdots\beta)$ （b多余）$=2<4$

2° $\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3-0\alpha_4=0\\ \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=b\end{cases}$

$$X=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

eg6 证：$r(A)=r(A^TA)$

证明：令 $Ax=0$ (I)

$A^TAx=0$ (II)

$Ax_0=0 \Rightarrow A^TAx_0=0$

即(I)的解为(II)的解.

若 $A^TAx_0=0$

$\Rightarrow x_0^TA^TAx_0=0$ 两乘以x_0^T

$\Rightarrow (Ax_0)^T\cdot Ax_0=0$ 内积为0

$\Rightarrow Ax_0=0$

即(II)的解为(I)的解.

$\therefore r(A)=r(A^TA)$

α: $Ax=0$ 只有零解 $\Leftarrow$ $Ax=b$ 有唯一解

$A_{m\times n}$ $\Updownarrow$ $\not\Rightarrow$ $\Updownarrow$

$r(A)=n$ $r(A)=r(A\vdots\beta)=n$

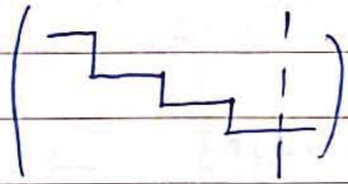
Q2：$Ax=0$ 有非零解 $\overset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ $Ax=b$ 有无数解

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$r(A)<n$ $\qquad\qquad\qquad$ $r(A)=r(A\,\vdots\,\beta)<n$

Q3：$Ax=b$，$r(A)=m$，$Ax=b$ 有解吗？ 有

$A_{m\times n}$

$(A\,\vdots\,\beta)_{m\times(n+1)} \longrightarrow$ 

证明：$\because (A\,\vdots\,\beta)$ 为 $m\times(n+1)$ 阶

$\therefore r(A\,\vdots\,\beta)\le m$

又 $\because r(A\,\vdots\,\beta)\geq r(A)=m$

$\therefore r(A\,\vdots\,\beta)=m$

$\Rightarrow r(A)=r(A\,\vdots\,\beta)=m$

型二 $AX=0$、$AX=b$ 通解求法

eg1：求 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0 \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0 \\ 3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0 \end{cases}$ 的通解

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad X=k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

No.
Date. / /

eg2: $(A\vdots\beta)=\begin{pmatrix}1&2&3&1&\vdots&3\\1&3&4&2&\vdots&2\\2&7&9&3&\vdots&7\\3&7&10&2&\vdots&12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&\vdots&3\\0&1&1&1&\vdots&-1\\0&3&3&1&\vdots&1\\0&1&1&-1&\vdots&3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&\vdots&3\\0&1&1&1&\vdots&-1\\0&0&0&-2&\vdots&4\\0&0&0&-2&\vdots&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&\vdots&3\\0&1&1&1&\vdots&-1\\0&0&0&1&\vdots&-2\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&0&\vdots&5\\0&1&1&0&\vdots&1\\0&0&0&1&\vdots&-2\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}$

$\because r(A)=r(A\vdots\beta)=3<4$ ∴无数解

$\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&\vdots&3\\0&1&1&0&\vdots&1\\0&0&0&1&\vdots&-2\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}$

$X=k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$

题型三 含参数的方程组的讨论

eg1: 设方程组 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$，讨论a，使方程组有 唯一解 / 无解 / 无穷多解

解：方法一：方阵∴可以使用克莱姆法则

$D=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&a\\0&a-2&-3\end{vmatrix}=1\cdot(3-a(a-2))=3-a^2+2a=-(a^2-2a+3)=-(a+1)(a-3)$

① $D\neq0$， $a\neq-1$ 且 $a\neq3$，故方程组有唯一解

② $a=-1$， $D=0$

$(A\vdots\beta)=\begin{pmatrix}1&2&1&\vdots&1\\2&3&1&\vdots&3\\1&-1&-2&\vdots&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&\vdots&1\\0&-1&-1&\vdots&1\\0&-3&-3&\vdots&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&\vdots&1\\0&1&1&\vdots&-1\\0&0&0&\vdots&-4\end{pmatrix}$

$\because \gamma(A) \neq \gamma(A \vdots \beta)$ $\therefore a=-1$时无解

③ $a=3$时，$(A\vdots\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1 \\ 2&3&5&3 \\ 1&3&-7&0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1 \\ 0&-1&3&1 \\ 0&1&-3&-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1 \\ 0&-1&3&1 \\ 0&0&0&0 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&7&3 \\ 0&1&-3&-1 \\ 0&0&0&0 \end{array}\right)$

$\because \gamma(A)=\gamma(A\vdots\beta)=2<3$

$\therefore$ 方程组有无穷多解

$\therefore X = k\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

方法二：

$(A\vdots\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1 \\ 2&3&a+2&3 \\ 1&a&-2&0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1 \\ 0&-1&a&1 \\ 0&a-2&-3&-1 \end{array}\right) \xrightarrow{(a-2)r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1 \\ 0&1&-a&-1 \\ 0&0&a(a-2)-3&(a-2)-1 \end{array}\right)$

① 当 $a(a-2)-3\neq0$，即 $a^2-2a-3\neq0$ $a\neq-1$ 或3

$\gamma(A)=\gamma(A\vdots\beta)=3=n$

$\therefore$ 有唯一解.

② 当 $\begin{cases} a(a-2)-3=0 \\ a-3\neq0 \end{cases}$，$\gamma(A)\neq\gamma(A\vdots\beta)$，无解

③ 当 $\begin{cases} a(a-2)-3=0 \\ a-3=0 \end{cases}$ 即 $a=3$，$\gamma(A)=\gamma(A\vdots\beta)=2<3$ $\therefore$ 无数个解

$(A\vdots\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&1&1 \\ 0&1&-3&-1 \\ 0&0&0&0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&7&3 \\ 0&1&-3&-1 \\ 0&0&0&0 \end{array}\right)$

$X = k\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

eg2：设 $A=\begin{pmatrix} 1&a&0&0 \\ 0&1&a&0 \\ 0&0&1&a \\ a&0&0&1 \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) 计算 $|A|$

(2) 讨论 a，$AX=\beta$ 有无数解

4-10

9. 矩阵对角化

1. 二次型：每一项都是二次的多项式。 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$

$\Downarrow$

非标准二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2+2x_3^2$

标准二次型：只含平方项的二次型。

2. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$X^TAX=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&&\\&-3&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(x_1,-3x_2,2x_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$=x_1^2-3x_2^2+2x_3^2$

1. $x_1^2-3x_2^2+2x_3^2=X^TAX$, $A=\begin{pmatrix}1&&\\&-3&\\&&2\end{pmatrix}$ ⇒ 对角矩阵 标准二次型

2. $x_1^2-x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$ $=X^TAX$ $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&-1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$

任何一个二次型都可以表示成 X^TAX 即 $f(x_1\cdots x_n)=x^TAX$
X^TAX 为标准二次型 ⟺ A 为对角阵
X^TAX 为非标准二次型 ⟺ A 为非对角阵

Q1: X^TAX 为非标准 怎么转化为 标二次型？

$\Updownarrow$

A不对角阵 ⇒ 对角阵

矩阵对角化

4-110

No.
Date. / /

特征值与特征向量 ⇐ 矩阵对角化

一. defs

1. 特征值与特征向量 —— A为n阶矩阵 $A_{n\times n}$ $\alpha_{n\times 1}$ $(A\alpha)_{n\times 1}$

若∃λ(数)，∃α（≠0且为向量），使 $A\alpha=\lambda\alpha$

则称λ为A的特征值，α为λ对应的特征向量。

$A_{3\times 3}$，A每行之和为2

$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda=2,\ \alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Q1: $\lambda=?$ ⇒ 用特征方程

Q2: λ_0已知，$\alpha=?$ 见③

$A\alpha=\lambda\alpha \Leftrightarrow (\lambda E-A)\alpha=0$

$\because \alpha\neq 0$，即 $(\lambda E-A)X=0$ 有非零解.

$\therefore r(\lambda E-A)<n$

$\Rightarrow |\lambda E-A|=0$

韦达定理

$x^2+px+q=0$ $\begin{cases}x_1+x_2=-p\\x_1\cdot x_2=q\end{cases}$

2. 特征方程：$|\lambda E-A|=0$

一元n次~ $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_{n-1}x+a_n=0$

$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots x_n=-a_1 & (二次项系数相反数)\\x_1\cdot x_2\cdots x_n=(-1)^n a_n\end{cases}$

$|\lambda E-A|=0$

⇕

$\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0$

⇕

$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots a_{nn})\lambda^{n-1}+ * =0$

$x^3+px+q=0 \Rightarrow 3个根\ \alpha、\beta、\gamma$

$\begin{vmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\\beta&\gamma&\alpha\\\gamma&\alpha&\beta\end{vmatrix}=0$ $\alpha+\beta+\gamma=0$

$\begin{vmatrix}0&0&0\\\beta&\gamma&\alpha\\\gamma&\alpha&\beta\end{vmatrix}$

注：① $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\triangleq tr(A) & 迹\\ \lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|\end{cases}$

迹 ⇐ 矩阵A的主对角线上元素之和

② λ不一定为实数

eg：$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$，$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$

⇒ λ_1,λ_2 二虚

4-111

如何求特征向量？一定要注意是谁的特征向量.
⇑
特征值

② λ_0为特征值，属于λ_0的特征向量
即$(\lambda_0 E-A)X=0$的非零解。 → $\xi_1,\xi_2\cdots\xi_m$ $\begin{cases}①\text{线性无关}\\ ②\ m\le n\end{cases}$

任何一个特征值都有无数个特征向量，只要其基础解系

eg: $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ ① $\lambda=?$ ② $\alpha=?$

解: ① $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5&\lambda-5&\lambda-5\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2=0$

$\lambda_1=\lambda_2=-1,\quad \lambda_3=5$

② $\lambda=-1$ 代入$(\lambda E-A)X=0$中，即 $-(E+A)X=0$

$E+A=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\lambda_1=\lambda_2=-1$对应的线性无关特征向量为 2个

$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

③ $\lambda=5$ 代入$(\lambda E-A)X=0$中，即$(5E-A)X=0$.

$5E-A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&3&-3\\0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\lambda_3=5$对应的线性无关特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Again Pass 16/5

No. Date. / /

eg1: 设4阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4$，求方程组 $AX=\beta$ 的通解。

解：$r(A)=3$，由 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 即 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0$

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=0,\quad \xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$$ 为 $AX=0$ 的基础解系

由 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4=\beta$ 可得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}=\beta$$ 即 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}=\beta$，$\eta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ 为 $AX=\beta$ 的特解

$AX=\beta$ 的通解 $X=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$

特征值及特征向量

$n\times n$ $n\times 1$

定义：

设 A 为一个 n 阶方阵，如果∃非零向量 X 及常数 λ_0 使得 $AX=\lambda_0 X$，则称 λ_0 为 A 的一个特征值，X 为 A 的特征值 λ_0 的一个特征向量。

$AX=\lambda_0 X$

$\lambda_0 X-AX=0$

$(\lambda E-A)X=0$ 有非零解

$\Updownarrow$

$|\lambda E-A|=0$

$\lambda E-A=0$ 称为 A 的特征方程

称 $f_A(\lambda)=|\lambda E-A|$ 为方阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$$
$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$
$$=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

入門口 考知识

4-113

Wengu

No.

Date. / /

√ n阶方阵一定有n个特征值（在复数域内）

定理：设n阶方阵A的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$，则

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

Pass

eg1：已知3阶方阵A满足 $|2A-3E| = |3A+E| = |E-4A| = 0$，求 $|A|$ 与 $tr(A)$

解：$|2A-3E| = |(-2)(\frac{3}{2}E - A)|$

$= (-2)^3 |\frac{3}{2}E - A| = 0$

$\frac{3}{2}E - A = 0 \quad \therefore \lambda_1 = \frac{3}{2}$

$|3A+E| = (-3)^3 |-\frac{1}{3}E - A| = 0 \quad \therefore \lambda_2 = -\frac{1}{3}$

$|E-4A| = 4^3 |\frac{1}{4}E - A| = 0 \quad \therefore \lambda_3 = \frac{1}{4}$

$\therefore |A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -\frac{1}{8}$

$tr(A) = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

Pass

eg2：求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值及特征向量

特征方程 $|\lambda E - A| = 0$

齐次方程求基础解系 $(\lambda E - A)x = 0$

解：特征多项式 $f_A(X) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 & -2 \\ \lambda-5 & \lambda-1 & -2 \\ \lambda-5 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & \lambda+1 & -2 \\ 1 & -1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-5)(\lambda+1)^2$

$\therefore \lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$

当 $\lambda = -1$ 时

$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X = k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

解得 特征值 $\lambda = -1$ 的 特征向量为 $c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

其中 c_1、c_2 不同时为零

4-114

No.
Date. / /

当$\lambda=5$时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore \lambda = k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\therefore\lambda=5$ 的特征向量 $\xi_2=c_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 $c_3\neq 0$

性质：

① 设 ξ_1，ξ_2 为 A 的同一特征值 λ_0 的两个特征向量，k_1，k_2 为两个数

如果 $k_1\xi_1+k_2\xi_2\neq 0$，则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 还是 A 的特征值 λ_0 的特征向量.

$$A(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=k_1A\xi_1+k_2A\xi_2$$
$$=k_1\lambda_0\xi_1+k_2\cdot\lambda_0\xi_2$$
$$=\lambda_0(k_1\xi_1+k_2\xi_2)$$

② 设 λ_0 为 A 的一个特征值，ξ 为对应的特征向量

则 1) kA 以 $k\lambda_0$ 为特征值，ξ 为特征向量

$$kA\xi=k\cdot\lambda_0\xi=k\lambda_0\cdot\xi$$

2) A^m 一定以 λ_0^m 为特征值，ξ 为对应的特征向量，其中 m 为正整数

$A\xi=\lambda_0\xi$ $\quad A^2\xi=A(A\xi)=A(\lambda_0\xi)=\lambda_0(A\xi)=\lambda_0\cdot\lambda_0\cdot\xi=\lambda_0^2\xi$

3) 如果 A 可逆，则 λ_0^{-1} 为 A^{-1} 的特征值，ξ 为相应的特征向量.

$A\xi=\lambda_0\xi$ $\quad (A^{-1}\cdot A)\xi=A^{-1}\cdot\lambda_0\cdot\xi$

$$E\xi=\lambda_0\cdot A^{-1}\cdot\xi$$

$|A|\neq 0$

$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m$ $\quad \xi\lambda_0^{-1}=A^{-1}\cdot\xi$

A 不可逆，A 有一个特征值为 0

4) 若 $g(A)$ 为 A 的一个多项式，则 $g(A)$ 以 $g(\lambda_0)$ 为特征值，ξ 为相应特征向量

$g(A)=3A^2+9A+7E$ $\quad\Leftarrow g(x)=3x^2+9x+7E$

$g(\lambda_0)=3\lambda_0^2+9\lambda_0+7E$

$$g(A)\xi=(3A^2+9A+7E)\xi$$
$$=3A^2\xi+9A\xi+7\xi$$
$$=3\lambda_0^2\xi+9\lambda_0\xi+7\xi$$
$$=(3\lambda_0^2+9\lambda_0+7)\xi$$

Wengu®

No.

Date. / /

Pass

eg: 已知3阶方阵 A 有三个不同特征值 1, 2, 3，求 $|3A^2-A+5E|$

解: $3A^2-A+5E$ 以 7、15、29 为特征值

$\therefore |3A^2-A+5E| = 7\times15\times29 =$

定义: (矩阵相似) (方阵) $A_{n\times n}$ $B_{n\times n}$

若 ∃ 可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$，则称方阵 A 与 B 相似，记为 $A\sim B$，称 P 为从 A 到 B 的一个相似变换

注: $A\sim A$ $(E^{-1}AE=A)$

$A\sim B \Rightarrow B\sim A$

$A\sim B, B\sim C \Rightarrow A\sim C$

$A\sim B \Rightarrow P_1^{-1}AP_1=B$

$B\sim C \Rightarrow P_2^{-1}BP_2=C$

$P_2^{-1}\cdot P_1^{-1}AP_1\cdot P_2$

$(P_1P_2)^{-1}AP_1P_2=C$

$\Rightarrow A\sim C$

$|\lambda E-A|$

$$
\begin{aligned}
|\lambda E-B| &= |\lambda E-P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda E)\cdot P-P^{-1}AP|\\
&= |P^{-1}(\lambda E-A)P|\\
&= |P^{-1}|\cdot|\lambda E-A|\cdot|P|\\
&= \frac{1}{|P|}\cdot|P|\cdot|\lambda E-A|\\
&= |\lambda E-A|
\end{aligned}
$$

$A\cdot A^{-1}=E$

$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

注: 若 $A\sim B$，则 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，即 A 与 B 有相同的特征多项式

反之不对 可取反例 eg $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $r(A)\neq r(B)$

Pass

eg: 求 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的特征多项式，并说明它们是否相似

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$

$|\lambda E-E|=|(\lambda-1)E|=(\lambda-1)^3$ A 与 B 有相同的特征多项式

若 $A\sim E$，则 ∃ P 使得 $P^{-1}AP=E$，则

$A=P(P^{-1}AP)P^{-1}=PE\cdot P^{-1}=PP^{-1}=E$

而 $A\neq E$，故 A 不相似于 E

③ $A\sim B \Rightarrow P^{-1}AP=B \Rightarrow r(A)=r(B)$ 相似秩相等

定理: A、B的特征值相同

② 若 $A\sim B$，则 $|A|=|B|$ 且 $tr(A)=tr(B)$

注: 上(或下)三角矩阵的特征值为主对角线上的元素。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ |\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$$

若 $A\sim B$，则 $B\sim A$

$P^{-1}AP=B$

$A=PBP^{-1}=(P^{-1})^{-1}BP^{-1}=PBP^{-1}$

$B\sim A$ 且 P^{-1} 为从B到A的相似变换

注: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

若 $\forall\ a_{ij}=a_{ji}$ 或 $A^T=A$

则称A为对称矩阵

若 $A\sim B$，则 $B\sim C$

$\exists P$，$P^{-1}AP=B$

$\exists Q$，$Q^{-1}BQ=C$

$(PQ)^{-1}APQ=Q^{-1}P^{-1}APQ=Q^{-1}(P^{-1}AP)Q=C$

定义: 若A相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

则称A可以相似对角化。

假设P可逆，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

则 $AP=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 设 $P=(\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n)$

则 $A(\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n)=(\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$(A\xi_1,A\xi_2\cdots A\xi_n)=(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2\cdots\lambda_n\xi_n)$

$A\xi_1=\lambda_1\xi_1$

$\vdots$

$A\xi_n=\lambda_n\xi_n$

No.
Date. / /

定理：

n阶方阵A可以相似于$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\Updownarrow$

A有n个线性无关的特征向量$\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n$

此时，从A到$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$的相似变换为$P=(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$

其中，ξ_i为λ_i的特征向量。

注：

重要手法：证明n阶方阵A与B相似，常用A与B均可相似对角化且$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$。

不同特征值所对应的特征向量一定线性无关。$\begin{cases} A\xi=\lambda_1\xi & \lambda_1\neq\lambda_2 \\ A\eta=\lambda_2\eta \end{cases}$

$A\eta=A(k\xi)=kA\xi$

若$\lambda_1=\lambda_2$ $=k\lambda_1\xi$

$=\lambda_1\eta=\lambda_2\eta$

Again

eg. 判别下列是否可以相似对角化 $\Rightarrow$ 是否$A\sim B$

$\Downarrow$

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & -2 & -8\\ -4 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & -5 & 3\\ 0 & 8 & -7\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

$r(A)=r(B)$

$\because r(B)=3$ $r(A)=$

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 0 & -1\\ -4 & \lambda+2 & 8\\ 4 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+2)[(\lambda-3)(\lambda+1)+4]$
$=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$

当$\lambda=-2$时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-5 & 0 & -1\\ -4 & 0 & 8\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $R(-2E-A)=2$ ξ_1

当$\lambda=1$时 $\lambda E-A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ -4 & 3 & 8\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $R(E-A)=2$ ξ_2

不可以

No.
Date.　/　/

② B的特征值为 1, 8, 5，$B \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 8 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

定理：设 $\xi_1^i, \xi_2^i \cdots \xi_{k_i}^i$ 为 A 的特征值 λ_i 的 k_i 个线性无关的特征向量，$1 \le i \le m$，λ_i 互不相同，
则 $\xi_1^1, \xi_2^1 \cdots \xi_{k_1}^1, \xi_1^2, \xi_2^2 \cdots \xi_{k_2}^2 \cdots \xi_1^m, \xi_2^m \cdots \xi_{k_m}^m$ 一定线性无关。

定理：A可以相似对角化
$\Updownarrow$
A的 k 重特征值 λ_i 决定 k 个线性无关的特征向量。

注① 方阵A的 k 重特征值 λ_i 决定的线性无关的特征向量组中向量个数一定不超过 k。
② 实对称矩阵一定可以相似对角化且特征值为实数。

eg：设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & b \end{pmatrix}$　① $A \sim B$，求 a, b 的值。
Pass　② 求相似矩阵 P

解 $A \sim B$：$|A| = |B|$
$tr(A) = tr(B)$　即 $-2 + a + 1 = 1 + 2 + b$　$a - b - 4 = 0$

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-a & -2 \\ -3 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)[(\lambda-a)(\lambda-1)-2] = 0$$

$\lambda = -2$

$$f_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & & \\ & \lambda-2 & \\ & & \lambda-b \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-b)$$

$\therefore b = -2$.
$\therefore a = 0$

$f_A(\lambda) = \lambda+2(\lambda^2-\lambda-2) = (\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+1)$.　A 的特征值 $-2, -1, 2$.
4-11?　故A一定可以相似对角化 $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$

② 当 $\lambda=-1$ 时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&-2\\-3&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-2\\0&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

解得 $\lambda=C\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ ∴特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda=2$ 时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}4&0&0\\-2&2&-2\\-3&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-2&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

∴ $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda=-2$ 时，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&-2&-2\\-3&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

∴ $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&-2\end{pmatrix}$

Again

eg 证明: $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&0&2\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似。

证明: A与B相似，若A对称，则A可相似对角化

② 有n个线性无关特征向量 ⇔ A相似

① $A\sim B$ $B\sim C$ $A\sim C$

证明: $\boxed{A对称，A一定可以相似对角化}$

$f_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-&-&-1\\-1&\lambda-1&\ddots&-1\\\vdots&&&\\-1&-&-&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1&-1&\cdots&-1\\1&\lambda-1&&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&-1&&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$

特征值为 $\lambda_1=n$，$\lambda_2=\lambda_3\cdots\cdots=\lambda_n=0$

$f_B(\lambda)=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$ 特征值为 $\lambda_1=n$，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots\lambda_n=0$

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda E-B=-B$ $R(\lambda E-B)=R(-B)=R(B)=1$.

No.
Date. / /

$(n-1)$重特征值$\lambda=0$对应$n-1$个线性无关的特征向量

故$B\sim\begin{pmatrix} n & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0\end{pmatrix}$ 而$A\sim\begin{pmatrix} n & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}$ 从而$A\sim B$

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} n & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}$

$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix} n & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}$ $B=Q\begin{pmatrix} n & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$

$QP^{-1}APQ^{-1}=B$

好 Again

$P=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1\end{pmatrix}$ $B=P^{-1}AP$

eg: 设$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1\end{pmatrix}$，求$A^{100}$

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 \\ 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)+4=(\lambda-1)^2$

特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$
当$\lambda=1$时 $\lambda E-A$ ×

$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$A=PBP^{-1}$

$A^{100}=PBP^{-1}\cdot PBP^{-1}\cdot PBP^{-1}\cdots PBP^{-1}$

$=PB^{100}P^{-1}$ $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$B^{100}=(E+C)^{100}=C_{100}^{0}E^{100}+C_{100}^{1}E^{99}\cdot C+C_{100}^{2}E^{98}C^{2}+\cdots$

$A^{100}=P\begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}=E+100C=\begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$P(E+100C)P^{-1}$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$=E+100PCP^{-1}$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

4-121 $=E+100C$

eg: 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix} \sim B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$

①求 a, b

②求 A^{10}

解: $A\sim B$, 则 $|A|=|B|$, $tr(A)=tr(B)$

即 $\begin{cases}3+a=b+2\\ 2a-3=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=4\\ b=5\end{cases}$

$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 3\\ 1 & \lambda-3 & 3\\ -1 & 2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 3\\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1\\ -1 & 2 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}$

$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 0\\ 0 & \lambda-5 & 0\\ 0 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$

A 的特征值为 1, 1, 5

当 $\lambda=1$ 时, $\lambda E-A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\xi_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

当 $\lambda=5$ 时, $\lambda E-A=\begin{vmatrix}5 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -12 & -12\\ 0 & 4 & 4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} A^{10} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5^{10} \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

eg: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ① $\lambda=?$ ② $\alpha=?$

解: ① $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=2$

② 将 $\lambda=0$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$ 中 即 $AX=0$

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r(A)=2<3$

$\underbrace{\lambda_1=\lambda_2}_{二重}=0$ 对应的线性无关特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1个

③ 将 $\lambda=2$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$ 即 $(2E-A)X=0$

$(2E-A)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_3=2$ 对应的线性无关特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

见到分数放大一个倍数

特征值 特征向量（一般性质）

1. $A_{n\times n}$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$(\lambda_1 E - A)X = 0 \Rightarrow \xi_1, \xi_2 \cdots \xi_s$（线性无关）基础解系

$(\lambda_2 E - A)X = 0 \Rightarrow \eta_1, \eta_2 \cdots \eta_t$（线性无关）

$\xi_1、\xi_2 \cdots \xi_s, \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_t$ 线性无关

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \Rightarrow \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\alpha_1、\alpha_2$ 无关

$\lambda_3 = 5 \Rightarrow \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ | α_3 无关 $\Rightarrow \alpha_1、\alpha_2、\alpha_3$ 无关

$A\alpha_1 = -\alpha_1$，$A\alpha_2 = -\alpha_2$，$A\alpha_3 = 5\alpha_3$

列　　列　　列

$(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (-\alpha_1, -\alpha_2, 5\alpha_3)$ 线性组合 ⇒ 把向量组构成一个矩阵往左边放

$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\alpha_1、\alpha_2、\alpha_3$ 线性无关

$r(P) = 3 \Rightarrow$ 可逆

$AP = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$ | ⇒ 矩阵对角化

2. $A\alpha = \lambda_0 \alpha$，$(\alpha \neq 0)$

1) 若 A 可逆 $\Rightarrow \lambda_0 \neq 0$　$(\because \lambda_1 \cdots \lambda_n = |A| \neq 0, \therefore \lambda_0 \neq 0)$

$A\alpha = \lambda_0 \alpha \Rightarrow \alpha = \lambda_0 A^{-1}\alpha \Rightarrow \boxed{A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda_0}\alpha} \Rightarrow |A| A^{-1}\alpha = \frac{|A|}{\lambda_0}\alpha.$

$\Downarrow$

$\boxed{A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda_0}\alpha}$

$A^*、A$ 和 A^{-1} 共用特征向量.

A 和 A^{-1} 的特征值互为倒数

2) $P^{-1}AP = B$ 即相似 $\Rightarrow |\lambda E - A| = |\lambda E - B| \Rightarrow \lambda$ 相同.（共用特征值）

4-125

No.
Date. / /

$A\alpha = \lambda_0 \alpha$

$P^{-1}A\alpha = \lambda_0 P^{-1}\alpha$

$\Rightarrow P^{-1}A\cdot(P\cdot P^{-1})\cdot\alpha = \lambda_0 P^{-1}\alpha$

$\Rightarrow \boxed{B\cdot P^{-1}\cdot\alpha = \lambda_0\cdot P^{-1}\cdot\alpha}$ B的特征值为λ_0，特征向量为$P^{-1}\alpha$

3> $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

$f(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 E$

$A\alpha = \lambda_0\alpha \Rightarrow \boxed{f(A)\alpha = f(\lambda_0)\alpha}$

eg: $A\alpha = 2\alpha$，$f(x) = x^3 + 4x + 1$

$f(A) = A^3 + 4A + E$

$f(A)\alpha = f(2)\alpha$

$(A^3 + 4A + E)\alpha = (2^3 + 4\times 2 + 1)\alpha$

矩阵多项式 可因式分解

$A^2 - 3A + 2E = 0$ 证 $r(E-A) + r(2E-A) = n$

证明：$A^2 - 3A + 2E = (2E-A)(E-A) = 0$

$r(2E-A) + r(E-A) \le n$

又$\because r(2E-A) + r(E-A) \ge r(E) = n$

$\therefore r(2E-A) + r(E-A) = n$

3 A为n阶矩阵，则A可对角化

$\Updownarrow$

A有n个线性无关的特征向量

$A_{n\times n}$

1° 通过 $|\lambda E - A| = 0$ 解出特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$

2° $(\lambda_i E - A)X = 0$ 寻找基础解系，$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_m$ 线性无关 $m \le n$

$\xi_1 \cdots \xi_m$ 为 n维 m个，$m > n$，左右长上下短

$\Updownarrow$ 线性相关 与已知相背。

3° ① $m < n \Rightarrow$ A不可对角化

② $m = n \Rightarrow$ A可(相似)对角化

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Uparrow$

$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

4-126

$\Uparrow$

$A\xi_1 = \lambda_1\xi_1$，$A\xi_2 = \lambda_2\xi_2 \cdots\cdots A\xi_n = \lambda_n\xi_n$

$(A\xi_1, \cdots A\xi_n) = (\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2 \cdots \lambda_n\xi_n)$.

$A(\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n) = (\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $P = (\xi_1 \cdots \xi_n)$，P可逆

No.
Date. / /

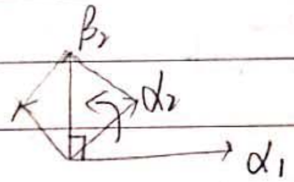
(二) 要求 $A^T=A$ (对称矩阵)

法: 正交化:

已知: $\alpha_1 \cdots \alpha_n \begin{cases} \neq 0 \\ \text{两两正交} \end{cases}$ ※ $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 线性无关

Q: $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关 $\xrightarrow{\text{如何}}$ $\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_2$ 两两正交且规范 都是单位向量.

Schmidt 正交化: 制造正交阵



1° $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$\beta_4=\alpha_4-\frac{(\alpha_4,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_4,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_4,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\beta_3$$

……

$$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 \cdots -\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}$$

$\Rightarrow \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n$ 两两正交。

2° 规范化(单位化)

$$\gamma_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1, \cdots\cdots \gamma_n=\frac{1}{|\beta_n|}\beta_n$$

eg: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$$ 线性无关

Wengu

1° $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}$$

2° ⋮

(二) $A^T=A$ 性质

1. $A^T=A$, $\lambda_1\neq\lambda_2$

$\left.\begin{array}{l}A\alpha=\lambda_1\alpha\\A\beta=\lambda_2\beta\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\alpha\perp\beta}$　不同特征值对应的特征向量正交

证明: $A\alpha=\lambda_1\alpha\Rightarrow\alpha^TA^T=\lambda_1\alpha^T\Rightarrow\alpha^TA=\lambda_1\alpha^T$

$\Rightarrow\alpha^TA\beta=\lambda_1\alpha^T\beta$

$\Rightarrow\lambda_2\alpha^T=\lambda_1\alpha^T\beta$

$\Rightarrow(\lambda_2-\lambda_1)\alpha^T\beta=0$

$\because\lambda_1\neq\lambda_2$ $\therefore\alpha^T\beta=0$ 即 $\alpha\perp\beta$

eg1. $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$　$\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=5$

$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

① 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, P可逆

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}$

No.
Date. / /

② $A^T=A$

$-1\neq 5 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \perp \alpha_3 \\ \alpha_2 \perp \alpha_3 \end{cases}$ α_1, α_2 未必正交

$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$\beta_3=\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

正交性之间，$\boxed{\text{正交化内部进行}}$

线性组合仍是

$A\alpha_1=-\alpha_1$, $A\beta_1=-\beta_1$, $A\alpha_2=-\alpha_2$, $A\beta_2=-\beta_2$

$\Rightarrow \beta_1\perp\beta_2$.

17

1. $A^T=A$, $\lambda_1\neq\lambda_2$.

$\left.\begin{array}{l}(\lambda_1 E-A)X=0 \Rightarrow \xi_1,\xi_2\cdots\xi_s \\ (\lambda_2 E-A)X=0 \Rightarrow \eta_1,\eta_2\cdots\eta_t\end{array}\right\} \Rightarrow (\xi_i,\eta_j)=0$

2. $A^T=A \Rightarrow \lambda_i\in R \quad (1\leq i\leq n)$

实对称矩阵的特征值都是实数

3. $A^T=A \Longrightarrow A$ 一定可相似对角化

(三) 矩阵对角化过程.

一. $A^T\neq T$

1° $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$;

2° $(\lambda_i E-A)X=0 \Rightarrow \xi_1,\xi_2\cdots\xi_m$ $\Big|$ 线性无关 $m\leq n$

3° ① $m<n \Rightarrow A$ 不可相似对角化

4-12

Wengu®

No.
Date. / /

②$m=n$, ⇒ A可以相似对角化

令 $P=(\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n)$

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

$=A^T=A$

1° $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$ (全为实数)

2° $(\lambda_i E-A)X=0 \Rightarrow \xi_1,\xi_2\cdots\xi_n$ $\left\{\begin{array}{l}\text{之间正交}\\\text{内部无关}\end{array}\right.$

3° case1 找可逆阵P，使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\ddots\end{pmatrix}$

$P=(\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n)$

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

case2 找正交阵Q，使 $\underset{\substack{\|\\ Q^{-1}AQ}}{Q^TAQ}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

⇓

$Q^T\cdot Q=E$

$\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n \xrightarrow[\text{规范化}]{\text{正交化}} \gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_n$ $\left|\begin{array}{l}\text{两两正交}\\\text{规范}\end{array}\right.$

$(A\gamma_1=\lambda_1\gamma_1,\ A\gamma_2=\lambda_2\gamma_2\ \cdots\ A\gamma_n=\lambda_n\gamma_n)$

$(A\gamma_1,A\gamma_2\cdots A\gamma_n)=(\lambda_1\gamma_1,\cdots\lambda_n\gamma_n)$

$A(\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_n)=(\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_n)$ 正交阵

$AQ=Q\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$ 即 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

No.
Date. / /

附：

正交

一.向量正交

(一)定义：$(\alpha,\beta)=0 \Rightarrow \alpha \perp \beta$

(二)核心性质：$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n \begin{cases} \neq 0 \\ \text{两两正交} \end{cases} \Rightarrow \alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性无关

(三)正交化：

$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性无关

1° $\beta_1=\alpha_1$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

$\vdots$

$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\cdots\cdots-\left(\frac{\alpha_n,\beta_{n-1}}{\beta_{n-1},\beta_{n-1}}\right)\beta_{n-1}$

$\Rightarrow \beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$ 两两正交

2° $\gamma=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1+\cdots\cdots+\frac{1}{|\beta_n|}\beta_n$

$\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_n \begin{cases} \text{两两正交} \\ \text{规范化} \end{cases}$

二.正交矩阵

(一) def — A为n阶矩阵，若 $A^TA=E$（或 $AA^T=E$）
则称A为正交阵。

如 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，$A^TA=E$

(二)等价条件

[1] $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n)$，则 $A^T\cdot A=E$

$\Updownarrow$

$\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n$ 两两正交且规范

No.
Date. / /

证明：$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_n^T\alpha_1 & & & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}=E$

$\Updownarrow$

$\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_1=\alpha_2^T\alpha_2=\cdots\alpha_n^T\alpha_n=1 & \text{(模为1} \Rightarrow \text{规范化)}\\ \alpha_i^T\alpha_j=0 & \text{两两正交}\end{cases}$

(三) $A^TA=E$ 性质.

1. $A^T=A^{-1}$

2. $|A|=\pm1$ 证 $A^TA=E\Rightarrow|A^T||A|=1\Rightarrow|A|^2=1\Rightarrow|A|=\pm1$

3. $\lambda=\pm1$

证：$A\alpha=\lambda\alpha\ (\alpha\neq0)$

$\alpha^TA^T=\lambda\alpha^T$

$\Rightarrow\alpha^TA^T\cdot A\alpha=\lambda\alpha^T\cdot A\alpha$

$\alpha^T\alpha=\lambda^2\alpha^T\alpha$

$(\lambda^2-1)\alpha^T\alpha=0$

$\because\alpha^T\alpha>0$

$\therefore\lambda^2-1=0\quad\therefore\lambda=\pm1$

$\boxed{完整步骤}$.

eg: $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

1° $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=5$

2° $\lambda=-1$ 代入 $(\lambda E-A)X=0 \Rightarrow \alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda=5$ 代入 $(\lambda E-A)X=0 \Rightarrow \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

3° case 1 找可逆阵 P

$P=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}$

case 2 找正交阵 Q

$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$\beta_3=\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}$ $\gamma_2=\frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$(A\gamma_1=-\gamma_1,\ A\gamma_2=-\gamma_2,\ A\gamma_3=5\gamma_3)$

$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}$

型一 概念与性质

eg1. $A_{3\times3}$，A每行元素之和为3，$\lambda=$ 3 ，$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

解：$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Again
eg2：$A_{3\times3}$，$A\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-3\\-1&0\\-2&3\end{pmatrix}$，$r(A)<3$，$\lambda_1,\lambda_2\ \lambda_3=?$

解：1° $A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\Downarrow$

$\lambda_1=-1$ $\qquad\qquad \lambda_2=3$

2° $r(A)<3\Rightarrow|A|=0\Rightarrow|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0\Rightarrow\lambda_3=0$

tB
eg3：A、B为四阶阵，$A\sim B$，$|\lambda E-A|=0$，$\lambda_1=\frac{1}{2}$，$\lambda_2=\frac{1}{3}$，$\lambda_3=\frac{1}{4}$，$\lambda_4=\frac{1}{5}$，$|B^{-1}-E|=$?

解：1° $A\sim B\Rightarrow B$的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$

2° B^{-1}特征值为2，3，4，5

3° $A\alpha=\lambda_0\alpha\Rightarrow f(A)\alpha=f(\lambda_0)\alpha$ 即若A有特征值λ_0，则$f(A)$有特征值$f(\lambda_0)$

$B^{-1}-E=f(B^{-1})$，故$B^{-1}-E$的特征值为1，2，3，4

4° $|B^{-1}-E|=1\times2\times3\times4=24$

eg4：A可逆，$A\alpha=\lambda_0\alpha$，$(A^*)^2+2E$特征值 ____

解：$A\alpha=\lambda_0\alpha\Rightarrow A^*\alpha=\frac{|A|}{\lambda_0}\alpha$

A^*有$\frac{|A|}{\lambda_0}$特征值

$f(A^*)\Rightarrow f(\frac{|A|}{\lambda_0})=(\frac{|A|}{\lambda_0})^2+2$

eg5：$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，$(\alpha,\beta)=3$，$A=\alpha\beta^T$，求特征值及重数？

矩阵已知 ←

型二 λ的求法

方法一：$|\lambda E-A|=0$ /公式法

即A乏关系式 ⇐ 见到矩阵移除 — 方法二：$A\alpha=\lambda\alpha$ 定义法

4-11A 已知矩阵与向量关系 ⇐ 方法三：$A、A^{-1}、A^*$，$P^{-1}AP=B$ 关联法

定义法：eg1: $A_{n\times n}$，$A^2=2A$，$\lambda=?$

解：令 $A\alpha=\lambda\alpha$ $(\lambda\neq 0)$

$(A^2-2A)\alpha=(\lambda^2-2\lambda)\alpha=0$

$\because \alpha\neq 0$，$\lambda^2-2\lambda=0$

$\therefore \lambda=0$ 或 2

13 eg2: $A_{2\times 2}$，$A^2=E$，$|A|=-1$，求 $\lambda=?$

解：令 $A\alpha=\lambda\alpha$ $(\alpha\neq 0)$

$A^2\alpha=\lambda^2\alpha=E\alpha$

$\Rightarrow (\lambda^2-1)\alpha=0$

$\because \alpha\neq 0$ $\therefore \lambda^2=1$ $\lambda=\pm 1$

$\because |A|<0$ $\Rightarrow \lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$

eg3:(前eg5) 解：见到一个矩阵 $\alpha\beta^T$ 第一个动作平方

1° $A^2=\alpha\beta^T\cdot\alpha\beta^T=3\alpha\beta^T=3A$

见到矩阵关系式用定义法

2° 令 $Ax=\lambda x$ $(x\neq 0)$

$(A^2-3A)x=(\lambda^2-3\lambda)x=0$

$\because x\neq 0$，$\therefore \lambda^2-3\lambda=0$ $\therefore \lambda=0$ 或 3

3° $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix}$

$tr(A)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=(\alpha,\beta)=3$

$=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=3$.

矩阵为3阶，无关的向量有3个

① $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

eg4: 关联矩阵法 $A_{3\times 3}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$A\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$ ② $AP=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)$

$A\alpha_2=\alpha_2-\alpha_3$，$A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求 A 和 λ

解：$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$

$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=0$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. 公式法

4-13 $\because P$ 可逆 $\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=B$ $\therefore A\sim B$ $\therefore \lambda$ 相同

eg: $A_{2\times2}$，$\alpha\neq0$，α不是A的特征向量，$A^2\alpha-A\alpha-2\alpha=0$

①证：α、$A\alpha$无关 ②求A的λ

证明：分析两个向量相关⇒成比例⇒反证

设α、$A\alpha$线性相关，则存在不全为零的k_1,k_2

使得 $k_1\alpha+k_2A\alpha=0$

$k_2\neq0$，若$k_2=0$，则$k_1\alpha=0$，∵$\alpha\neq0$ ∴$k_1=0$ 与假设矛盾.

$A\alpha=-\frac{k_1}{k_2}\alpha$ 与题意矛盾 α不为特征向量.

∴α、$A\alpha$线性无关

②[分析]：矩阵2阶，向量无关2个

解：$P=(\alpha, A\alpha)$

$$AP=(A\alpha, A^2\alpha)=(A\alpha, A\alpha+2\alpha)=(\alpha, A\alpha)\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=P\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}\triangleq B$$

∵$A\sim B$，特征值相同 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda&-2\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)-2=0$

∴λ

※ 型三 可否对角化

思路：①$\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$单否？若单⇒则可对角化

eg1: $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，$ad-bc<0$，证：A可对角化

证明：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-b\\-c&\lambda-d\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc$

∵$\lambda_1\lambda_2=ad-bc<0$ ∴$\lambda_1\neq\lambda_2=0$

∴为单根，故A可对角化

eg2: $A_{2\times2}$，$\alpha\neq0$，α非A的特征向量，$A^2\alpha-A\alpha-6\alpha=0$

证：A可对角化.

证明：$\because \alpha、A\alpha$ 线性无关（α不为A的特征向量）$A\alpha \neq \lambda\alpha$

$\therefore P=(\alpha, A\alpha)$，$AP=(A\alpha, A^2\alpha)=(A\alpha, A\alpha+b\alpha)=P\begin{pmatrix}0&b\\1&1\end{pmatrix}$

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&b\\1&1\end{pmatrix}\triangleq B$

$\therefore A\sim B$ $\therefore |\lambda E-A|=|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda&-b\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-b=0$

$\therefore \lambda_1=-2, \lambda_2=3$ $\therefore \lambda_1\neq\lambda_2$ $\therefore$为单根 $\therefore A$可对角化

思路：② $A^T\neq A$ 若是 $\Rightarrow$ 则可对角化

eg3：$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ 皆单位且正交，$A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$

证① $\alpha+\beta$、$\alpha-\beta$为A的特征向量.

② A可对角化

证明：① $\begin{cases}\alpha\neq0,\beta\neq0\\\alpha\perp\beta\end{cases}\Rightarrow\alpha、\beta$线性无关 $\Rightarrow \alpha+\beta\neq0$，$\alpha-\beta\neq0$

$A\cdot(\alpha+\beta)=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)(\alpha+\beta)=\alpha\beta^T\alpha+\alpha\underbrace{\beta^T\beta}_{|\beta|^2}+\beta\underbrace{\alpha^T\alpha}_{|\alpha|^2}+\beta\alpha^T\beta$

$=0+\alpha+\beta=1\cdot(\alpha+\beta)$

$A(\alpha-\beta)=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)(\alpha-\beta)=\alpha\beta^T\alpha-\alpha\beta^T\beta+\beta\alpha^T\alpha-\beta\alpha^T\beta$

$=-(\alpha-\beta)$

② 法一：从单根出发，已经找到两个 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$

$r(A)\leq r(\alpha\beta^T)+r(\beta\alpha^T)\leq r(\alpha)+r(\beta)=2<3$ 降秩

$\Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2\cdot\lambda_3=0$ $\therefore \lambda_3=0$

$\because \lambda_1、\lambda_2、\lambda_3$两两不同（皆单）$\therefore A$可以对角化

法二：$\because A^T=A$ $A^T=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)^T=(\alpha\beta^T)^T+(\beta\alpha^T)^T$

$=\beta\alpha^T+\alpha\beta^T=A$

$\therefore$可以对角化

思路：③ $A_{n\times n}$，A是否有n个线性无关的特征向量！若有，则可对角化

P135 例2 设$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&b\end{pmatrix}$相似于对角矩阵，求a，并求可逆矩阵P使$P^{-1}AP$为对角矩阵.

4-19

No.
Date. / /

解: 1° $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & -a\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=((\lambda-2)^2-16)(\lambda-6)=(\lambda^2-4\lambda-12)(\lambda-6)$
$=(\lambda+2)(\lambda-6)^2=0$

$\therefore \lambda_1=-2,\ \lambda_2=\lambda_3=6$

2° 考虑对角化时，单根可无视，因为责任不在单根上

$\because$ A可对角化，$\therefore$ 6对应2个特征向量.

$(6E-A)X=0 \Rightarrow$ 两个 $\Rightarrow r(6E-A)=1$

$6E-A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\therefore a=0$

3° $\lambda=-2$代入$(\lambda E-A)X=0 \Rightarrow \alpha_1=\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}$

$\lambda=6$代入$(\lambda E-A)X=0 \Rightarrow \alpha_2=\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}$

$P(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 6 & \\ & & 6\end{pmatrix}$

14-eg5: 设$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$有3个线性无关的特征向量，求x, y所满足条件

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ -x & \lambda-1 & -y\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)(1-\lambda)$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=-1$

$\because$ A可对角化，$r(E-A)=1$

$(E-A)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -x & 0 & -y\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -x & 0 & -y\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -x-y\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\underline{x+y=0}$.

Wengu

4-128

型四 求A

思路一：化简 $AX=B$（X为未知）

且A可逆，$X=A^{-1}B$

思路二：1° $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$ 解出

2° $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 找出

3° $P=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$

$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$

eg1: $A_{3\times3}$，A每行元素之和为0，$A\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\0&1\\-2&0\end{pmatrix}$，求A

解：1° $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda_1=0,\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

2° $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda_2=-2,\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda_3=1,\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

3° $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}\Rightarrow A=P\begin{pmatrix}0&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}$

eg2: $A^T=A$，$A_{3\times3}$，∃正交阵 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&a&d\\\frac{1}{\sqrt3}&b&e\\\frac{1}{\sqrt3}&c&f\end{pmatrix}$，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$，求A

解：1° $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$

2° $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4-12?

3° 令 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 为 $\lambda=2$ 的特征向量.

$\because A^T=A$ $\therefore \alpha_1^T\alpha=0$

$\Rightarrow x_1+x_2+x_3=0$ $\Rightarrow \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$(1,1,1)$

二次型.

一. 1. 二次型 —— $f(x_1,x_2\cdots x_n)=X^TAX$

eg: $x_1^2+4x_2^2-2x_3^2=x^T\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&-2\end{pmatrix}x$

eg: $x_1^2-x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3=x^T\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&3\\-1&3&2\end{pmatrix}X$

2. 矩阵合同 —— A, B 为 n 阶阵, 若 ∃ 可逆阵 P, 使 $P^TAP=B$
称 A 与 B 合同。记 $A\simeq B$

3. 标准化 — $f=X^TAX \xrightarrow[(P可逆)]{X=Py} Y^T(P^TAP)Y$, 其中 $P^TAP=\begin{pmatrix}l_1&&\\&l_2&\\&&\ddots&\\&&&l_n\end{pmatrix}$

则 $f=l_1y_1^2+l_2y_2^2+\cdots l_ny_n^2$

注: ① P可逆
② $P^TAP=\begin{pmatrix}l_1&&\\&l_2&\\&&\ddots&\\&&&l_n\end{pmatrix}$

二. 核心 — 标准化

方法一: 配方法 (了解)

eg1: $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2-x_3^2$, 用配方法化为标准形

解: 1° 矩阵化 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&4&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

Date. / /

$f = X^T A X$

2° $f = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 - x_3^2$

令 $\begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 即 $X = PY$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|P| = 1 \neq 0$ ∴ P 可逆

?

3° $f = X^T A X \xrightarrow{X=PY} Y^T(\underline{P^T A P})Y$ $P^T A P$ 是否为对角阵

$= y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$ 不用验证，都是建立在假设基础上

eg2: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_3^2$

解: 1° $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $f = X^T A X$

2° $f = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - 4x_3^2$

$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 - 3x_3^2$

令 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 即 $X = PY$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|P| = 1 \neq 0$ ∴ P 可逆

3° $f = X^T A X \xrightarrow{X=PY} Y^T(P^T A P)Y$

$= y_1^2 - y_2^2 - 3y_3^2$

15 eg3: $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

解: 1° $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $f = X^T A X$

2° $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$, $X = PY$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $|P| \neq 0$ ∴ P 可逆

3° $f = X^T A X \xrightarrow{X=PY} Y^T(P^T A P)Y$ P 可逆、对角建立在假设基础上

$= y_1^2 - y_2^2$ $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 = y_1 - 3y_2 \\ x_2 = y_1 + 3y_2 \end{cases}$ $= y_1^2 - 9y_2^2$ 4-141

No.
Date. / /

注：①二次型的标准形不唯一。
但标准型系数正负个数一致
②标准形系数不一定为特征值.

方法二：正交变换法

1° $f=X^TAX$ $(A^T=A)$

2° $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1,\cdots\cdots\lambda_n$

3° $(\lambda_i E-A)X=0 \Rightarrow \alpha_1\cdots\cdots\alpha_n$ 之间正交 内部无关

4° $\alpha_1\cdots\cdots\alpha_n \xrightarrow[\text{规范化}]{\text{正交化}} \gamma_1,\cdots\cdots\gamma_n$

$(A\gamma_1=\lambda_1\gamma_1 \quad \cdots\cdots \quad A\gamma_n=\lambda_n\gamma_n)$

5° 令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2\cdots\cdots\gamma_n)$

$$\underset{Q^{-1}}{Q^T}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

6° $f=X^TAX \xrightarrow{X=QY} Y^T(Q^TAQ)Y$
$=\lambda_1y_1^2+\cdots\lambda_ny_n^2$

eg: $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

解：1° $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$f=X^TAX$

2° $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&\lambda-2&\lambda-2\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=2$

3° $\lambda=-1$，$(-E-A)X=0$ 即 $(E+A)X=0$

$E+A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_1=\lambda_2=-1$ 对应的线性无关特征向量

No.

Date. / /

$\lambda_3=2$ 代入，即 $(2E-A)X=0$

$$2E-A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&2&-1\\2&-1&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&3&-3\\0&-3&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_3=2$ 对应线性无关特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4° $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$\beta_3=\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\therefore \beta_1、\beta_2、\beta_3$ 两两正交.

$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

5° 令 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ $Q^TAQ=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$

6° $f=X^TAX\xrightarrow{X=QY}Y^T(Q^TAQ)Y$

$=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$

二 正定二次型 (永远大于0)

eg1: $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+2x_3^2=X^TAX$

$\begin{cases}X^TAX\geq 0\\X^TAX=0\Leftrightarrow(x_1=x_2=x_3=0)\ X=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow \forall X\neq 0$，有 $X^TAX>0$

eg2: $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_2^2+2x_3^2=X^TAX$

$=(x_1+x_2)^2+3x_2^2+2x_3^2$

$\begin{cases}X^TAX\geq 0\\X^TAX=0\Leftrightarrow X=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow \forall X\neq 0,\ X^TAX>0$

(一) det — $f=X^TAX$，若 $\forall X\neq 0$，有 $X^TAX>0$

则称 X^TAX 为正定二次型，A称为正定矩阵

4-143

Wengu

(二)判断

方法一：定义法

1° 验证 $A^T=A$

2° $\forall X\neq 0$，有 $X^TAX>0$

eg1: A为n阶可逆阵，$B=A^TA$，证：B正定

证明: $B^T=(A^TA)^T=A^TA=B$

$\forall X\neq 0$，$X^TBX=X^TA^TAX=(AX)^TAX$

$\because AX\neq 0$，若 $AX=0$，$r(A)=n$ $\therefore X=0$ 与已知矛盾

$X^TBX=(AX)^TAX=(AX,AX)=|AX|^2>0$

$\therefore$ B正定

eg2: A、B为正定阵，证：A+B正定

证明: 1° $A^T=A$，$B^T=B$

$(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$

2° $\forall X\neq 0$，$X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX$

$\because$ A, B正定 $\therefore X^TAX>0$，$X^TBX>0$

$\therefore$ 正定.

eg3: $A_{m\times m}$正定，$B_{m\times n}$ 且 $r(B)=n$，证：$C=B^TAB$正定.

证明: 1° $A^T=A$

$C^T=(B^TAB)^T=B^TA^TB=B^TAB=C$

2° $\forall X\neq 0$，$X^TB^TABX=(BX)^TABX$

令 $BX=Y$，$Y\neq 0$，若 $Y=0$，$BX=0$，$r(B)=n$ $\therefore$ 只有零解 $X=0$ 矛盾

$X^TCX=Y^TAY$

$\because$ A正定，$Y\neq 0$ $\therefore Y^TAY>0$

方法二：特征值法

[Th] $A^T=A$，则A正定

$\Updownarrow$

$\lambda_i>0$ $(1\leq i\leq n)$ 特征值全是正的

eg1: $A^T=A$，A每行元素之和为0，$A_{3\times3}$，$A^2=E$，$A+kE$正定，k之范围.

解: $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1=0, \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$A\alpha=\lambda\alpha \Rightarrow (A^2-E)\alpha=(\lambda^2-1)\alpha=0$

$\because \alpha\neq0 \quad \therefore \lambda^2-1=0 \quad \Rightarrow \lambda_2=-1, \lambda_3=1$

$A+kE$特征值为 $k, k-1, k+1$

$A+kE$正定 $\Leftrightarrow \begin{cases} k>0 \\ k-1>0 \\ k+1>0 \end{cases} \quad \therefore k>1$

eg2: $A^T=A$，$A_{n\times n}$，A正定，证: $|2E+A|>2^n$

证明: A正定 $\Rightarrow \lambda_i>0 \ (1\leq i\leq n)$

$2E+A$特征值为 $2+\lambda_i \ (1\leq i\leq n)$

$|2E+A|=(2+\lambda_1)(2+\lambda_2)\cdots(2+\lambda_i)$

$\because 2+\lambda_1>2 \quad 2+\lambda_2>2 \quad \therefore >2^n$

方法三: 顺序主子式法.

[Th] $A^T=A$，$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ 正定

$\Leftrightarrow a_{11}>0, \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0$

$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}>0 \cdots |A|>0$

No.
Date. / /

第六章 二次型

n元二次型

$f(x_1,x_2\cdots x_n)=a_{11}x_1^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+b_{12}x_1x_2+\cdots b_{n-1,n}x_{n-1}x_n$.

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$X^TAX=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$=(a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3,\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3,\ a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+(a_{12}+a_{21})x_1x_2+(a_{13}+a_{31})x_1x_3$
$+(a_{23}+a_{32})x_2x_3$

定义：设A为n阶对称矩阵($a_{ij}=a_{ji}$)，则称A为二次型

$f(x_1,x_2\cdots x_n)=X^TAX$ 的矩阵

$f=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$

eg：求二次型 $f=(x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 的矩阵A

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & 1 & 7 \\ \frac{7}{2} & 7 & 8 \end{pmatrix}$

二次型矩阵一定为对称矩阵

定义：设二次型 $f=X^TAX$ 的矩阵为 A，$X=CY$，C 可逆

若 $f=(CY)^TACY = Y^T\underline{C^TAC}Y = Y^TBY$

则 $\underline{B=C^TAC}$.

对称.

如果方阵 B 和 A，∃可逆矩阵 C 使得 $B=C^TAC$，则 A 与 B 合同。称 C 为从 A 到 B 的一个合同变换。

对称矩阵和非对称矩阵一定不合同。

方阵和自身一定合同　　$E^T=E$

若 $B=C^TAC$

$(C^T)^{-1}BC^{-1}=(C^T)^{-1}C^TACC^{-1}$

则 $A=(C^T)^{-1}BC^{-1}$

$=(C^{-1})^TBC^{-1}$

AB 合同，BA 合同

若 $B=C_1^TAC_1$，C_1 可逆，　A 与 C 定合同

$C=C_2^TBC_2$，C_2 可逆

$C=C_2^T(C_1^TAC_1)C_2$

$=(C_1C_2)^TA(C_1C_2)$

定义：若二次型 $f(x_1\cdots x_n)=a_1x_1^2+\cdots a_nx_n^2$

则称该二次型为标准二次型，标准二次型矩阵为对角矩阵。

若标准二次型 f 中，$a_i\in\{-1,0,1\}$，$\forall 1\le i\le n$，

则称二次型为规范二次型。

No.
Date. / /

二次型标准化的方法：① 配方法 （不一定为相似变换）
② （特征值法）正交变换法.

eg1: 化 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+6x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+12x_2x_3$

解：配方法

$$f=x_1^2+2x_1(2x_2+x_3)+(2x_2+x_3)^2+2x_2^2+8x_2x_3+8x_3^2$$
$$=(x_1+2x_2+x_3)^2+2(x_2+2x_3)^2$$

令 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=y_1\\ x_2+2x_3=y_2\\ x_3=y_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=y_1-2y_2+3y_3\\ x_2=y_2-2y_3\\ x_3=y_3\end{cases}$

$$f=y_1^2+2y_2^2 \quad \text{令}\begin{cases}y_1=z_1\\ 2y_2=z_2\\ y_3=z_3\end{cases}$$
$$=z_1^2+z_2^2$$

$$X=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}Y$$

$$C=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix} \quad C^T\begin{pmatrix}1&2&1\\2&6&6\\1&6&9\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}$$

eg2: $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$

解 令 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\ x_2=y_1+y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$ $X=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}Y$

$X=PY$

$$f=2(y_1^2-y_2^2)+4(y_1-y_2)y_3$$
$$=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3-4y_2y_3$$
$$=2(y_1^2+2y_1y_3+y_3^2)-2y_2^2-2y_3^2-4y_2y_3$$
$$=2(y_1+y_3)^2-2(y_2+y_3)^2 \qquad Y=CZ$$
$$=2z_1^2-2z_2^2$$

$\begin{cases}y_1+y_3=z_1\\ y_2+y_3=z_2\\ y_3=z_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_1=z_1-z_3\\ y_2=z_2-z_3\\ y_3=z_3\end{cases}$ $Y=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}Z.$

$\therefore f=2z_1^2-2z_2^2$

4-148

方法二:

$P=(\xi_1,\xi_2\cdots\cdots\xi_n)$

$P^T=\begin{pmatrix}\xi_1^T\\ \xi_2^T\\ \vdots\\ \xi_n^T\end{pmatrix}$ $\quad P^T\cdot P=\begin{pmatrix}\xi_1^T\\ \xi_2^T\\ \vdots\\ \xi_n^T\end{pmatrix}(\xi_1,\xi_2\cdots\cdots\xi_n)=\begin{pmatrix}\xi_1^T\xi_1 & \xi_2^T\xi_2 & \cdots & \xi_1^T\xi_n\\ \xi_2^T\xi_2 & - & — & \\ \vdots & & & \\ \xi_n^T\xi_1 & \cdots & \cdots & \xi_n^T\xi_n\end{pmatrix}$

$P^T\cdot P=E$ $\quad =\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

$P^T=P^{-1}\iff\begin{cases}\xi_i^T\xi_i=1\\ \xi_i^T\xi_j=0\quad(i\neq j)\end{cases}$

定义: 若$P^T=P^{-1}$, 则称P为正交矩阵

eg3: $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$

解: $P^TAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & 3\end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 1 & -3\\ 1 & \lambda-5 & 3\\ -3 & 3 & \lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 1 & -3\\ \lambda-4 & \lambda-4 & 0\\ -3 & 3 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-5 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 0\\ -3 & 3 & \lambda-3\end{vmatrix}$

$=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-6 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ -6 & 3 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)\quad 1\begin{vmatrix}\lambda-6 & -3\\ -6 & \lambda-3\end{vmatrix}$

$=(\lambda-4)[(\lambda-6)(\lambda-3)-18]=(\lambda-4)(\lambda^2-9\lambda)$

$\therefore\lambda_1=4,\ \lambda_2=9,\ \lambda_3=0$

当$\lambda_1=4$时, 特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2}\\ 0\end{pmatrix}$

4-14) $4E-A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 3\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

当$\lambda=9$时，$9E-A=\begin{pmatrix}4&1&-3\\1&4&3\\-3&3&6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-2\\1&4&3\\4&1&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&5&5\\0&5&5\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

解得特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

当$\lambda=0$时，$-A=\begin{pmatrix}-5&1&-3\\1&-5&3\\-3&3&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-5&3\\-5&1&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-4&2\\0&-4&2\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$

解得特征向量 $\xi_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$

取 $P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\0&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$ $\quad P^TAP=\begin{pmatrix}4&&\\&9&\\&&0\end{pmatrix}$

惯性指数定理

二次型 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)=X^TAX$，在合同变换下所得标准形中，

系项的系数为正数的个数 p 及为负数的个数 q 是不变的，完全由

二次型决定。称 p 为二次型 f 或矩阵 A 的正惯性指数

称 q 为二次型 f 或矩阵 A 的负惯性指数

称 $p+q$ 为二次型的秩

注① $r(A)=p+q$

② 判断二次型 $f=X^TAX$ 的正反惯性指数 { 标准化 / A 的特征值符号.

③ 判定对称矩阵 A 与 B 合同的方法

看 A 与 B 的特征值的符号是否一致?

eg: 设 $A=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&3\end{pmatrix}$，则 A 合同于 (C)

A $\begin{pmatrix}2&0&2\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix}5&&\\&3&\\&&-1\end{pmatrix}$ C $\begin{pmatrix}-4&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix}-2&&\\&-1&\\&&-3\end{pmatrix}$

相似、合同、等价

eg: 设 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2

求 a 的值.

解: $\begin{vmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&a\end{vmatrix}=0 \Rightarrow a=3.$

eg：若 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+ax_1x_2$ 的正惯性指数为2

求a的取值范围.

解：$f=2(x_1^2+\frac{a}{2}x_1x_2+\frac{a^2}{16}x_2^2)-\frac{a^2}{8}x_2^2-3x_3^2+2x_2^2$

$=2(x_1+\frac{a}{4}x_2)^2+(2-\frac{a^2}{8})x_2^2-3x_3^2$

$2-\frac{a^2}{8}>0 \Rightarrow a^2<16 \Rightarrow -4<a<4$

正定二次型：

定义：若 $\forall X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\neq 0$，二次型 $f(x_1,x_2\cdots x_n)=X^TAX>0$

$f(x_1,x_2\cdots\cdots x_n)=X^TAX=a_1y_1^2+\cdots a_ny_n^2>0$

此时f为正定二次型。 $X=CY$ 若 $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $f=0$

注：f正定 $\Leftrightarrow$ $f\geq 0$ 且 $f(x_1,\cdots x_n)=0$ 当且仅当 $x_1=x_2=\cdots x_n=0$

定理：n元二次型 $f(x_1,x_2\cdots x_n)=X^TAX$ 正定

$\Updownarrow$

f的正惯性指数为n

$\Updownarrow$

规范形 $f=y_1^2+\cdots\cdots y_n^2$

$\Updownarrow$

A的特征值均大于0

$\Updownarrow$

$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ A的顺序主子式均大于0（行列式）

$\Updownarrow$

一阶主子式：取某一行某一列

∃可逆矩阵C使得 $A=C^TC$（A与E合同）

二阶：取某两行某两列交叉所得

No.
Date. / /

eg: 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+tx_3^2+2tx_1x_2$ 正定，求 t 的取值范围

解: $A=\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ t & 1 & 0\\ 0 & 0 & t\end{pmatrix}$ 一阶顺序主子式: 1

二阶 …… $\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}=1-t^2>0$

三阶 …… $\begin{vmatrix}1 & t & 0\\ t & 1 & 0\\ 0 & 0 & t\end{vmatrix}=t(1-t^2)>0$

$\Rightarrow 0<t<1$

eg: 设n阶实对称矩阵 A满足 $A^3-4A^2+5A-2E=0$

证明: A正定 (优先看特征值)

证明: $\forall \lambda$ 为 A的特征值

则 $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$ $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=0$

±1 $\pm1,\pm2$ 若有最简有理根 $\frac{q}{p}$

1代入 则 p 一定为 a_n 的因数

$\lambda^3-\lambda^2-3(\lambda^2-\lambda)+2(\lambda-1)=0$ q 一定为 a_0 的因数

$(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2)=0$

$(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$

$\therefore \lambda=1$ 或 $2>0$

A的特征值恒大于 $\Rightarrow$ A正定.

eg 设 A和 B为正定矩阵，证 $\begin{pmatrix}A & O_{m\times n}\\ O_{n\times m} & B\end{pmatrix}$ 正定

证明 令 $C=\begin{pmatrix}A & O_{m\times n}\\ O_{n\times m} & B\end{pmatrix}$，由题设 $A^T=A$，$B^T=B$

$C^T=\begin{pmatrix}A^T & (O_{n\times m})^T\\ (O_{m\times n})^T & B^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & O_{m\times n}\\ O_{n\times m} & B\end{pmatrix}=C$，C对称

法一(定义) $\forall Z\in\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\neq0$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ $Z^TCZ=(X^T,Y^T)\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$

$=(X^TA,Y^TB)\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=X^TAX+Y^TBY$

4-153

由于 $Z \neq 0$ 则 $X \neq 0$ 或 $Y \neq 0$

若 $X \neq 0$，则 $\begin{cases} X^T A X > 0 \\ Y^T B Y \geq 0 \end{cases}$

$\therefore Z^T C Z = X^T A X + Y^T B Y > 0$

若 $Y \neq 0$，则 $\begin{cases} X^T A X \geq 0 \\ Y^T B Y > 0 \end{cases}$

$\therefore Z^T C Z > 0$

故 C 正定

法二：$|\lambda E_{m+n} - C| = \begin{vmatrix} \lambda E_m - A & 0 \\ 0 & \lambda E_n - B \end{vmatrix}$

$= |\lambda E_m - A||\lambda E_n - B|$

法三：A 正定，则 $\exists$ m 阶可逆矩阵 P，使得 $A = P^T P$

B 正定，则 $\exists$ n 阶可逆矩阵 Q，-- $B = Q^T Q$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^T P & 0 \\ 0 & Q^T Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^T & 0 \\ 0 & Q^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

$$= C^T C$$

$C = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ $\quad |C| = |P||Q| \neq 0$

eg: 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+bx_1x_3$

其中 $b>0$ 且二次型矩阵 A 的特征值之和为 1，之积为 -12.

(1) 求 a, b

(2) 用正交变换将 f 化为标准形，并求 P

解：(1) $A=\begin{pmatrix} a & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{b}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 2+a-2=1 \\ |A|=\begin{vmatrix} a & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{b}{2} & 0 & -2 \end{vmatrix}=2(-2a-\frac{b^2}{4})=-12 \end{cases}$

解得 $a=1$，$b=4$

(2). $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)[(\lambda-1)(\lambda+2)-4]$

$=(\lambda-2)(\lambda^2+\lambda-6)$

$=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$

$\therefore \lambda_1=-3$，$\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=-3$ 时，$-3E-A=\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，$2E-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\xi_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4-15

$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\beta_3 = \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\gamma_2 =$

$P = ($