期末习题课—专项练习

0.1 计算题: 向量组的秩. 极大无关组

例. 设向量组:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\a-3\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\a\\6\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

(1) a 为何值时, 该向量组的秩等于 3.

(2) 求该向量组的一个极大无关组.

(3) 用所求极大无关组表示其它向量.

解. $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&-1&1&1\\0&1&1&2&1\\1&1&0&a&2\\2&2&a-3&6&3\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_4-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1&1&1\\0&1&1&2&1\\0&1&1&a-1&1\\0&2&a-1&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_4-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&1&1\\0&1&1&2&1\\0&0&0&a-3&0\\0&0&a-3&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&0&-1&1&1\\0&1&1&2&1\\0&0&a-3&0&-1\\0&0&0&a-3&0\end{pmatrix},\quad r(A)=\begin{cases}3, & a=3\\4, & a\neq 3\end{cases}$$

$\therefore$ $a=3$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)=3$.

$$A \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

极大无关组: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ (不唯一)

$\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2, \quad \alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$ ■

例. 设向量组 $\alpha_1=(1, 3, 2, 0)^T$, $\alpha_2=(7, 0, 14, 3)^T$, $\alpha_3=(2, -1, 0, 1)^T$, $\alpha_4=(5, 1, 6, 2)^T$, $\alpha_5=(2, -1, 4, 1)^T$.

(1) 求向量组的秩;

(2) 求向量组的一个极大无关组.

(3) 用所求极大无关组表示其它向量.

解. $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_2-3r_1]{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -21 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4}r_3]{-\frac{1}{7}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)=3$

极大无关组: $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ (不唯一)

$\alpha_2=\alpha_1+3\alpha_5, \quad \alpha_4=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5$ ■

例. 向量组 $\alpha_1=(1, 1, 1, 1)'$, $\alpha_2=(1, 2, 3, 4)'$, $\alpha_3=(1, 4, 9, 16)'$, $\alpha_4=(1, 3, 7, 13)'$. **求向量组的秩及一个极大无关组, 并用极大无关组表示该组中其余向量.**

解. $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$

$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)=3.$

极大无关组: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (不唯一)

$$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$$

3

0.2 计算题: 带参数的非齐次线性方程组

例. 方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\x_1+bx_2+x_3=-1\\x_1+2bx_2+x_3=2\end{cases}$, 当 a, b 为何值时有唯一解? 有无穷多解? 无解? 若有无穷多解, 写出其通解.

解. 法 1: $|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&2b&1\end{vmatrix}\overset{\substack{r_3-r_2\\r_1-r_2}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}a-1&1-b&0\\1&b&1\\0&b&0\end{vmatrix}=-b(a-1)$

$a\neq1,\ b\neq0$ 时, $r(A)=r(A, \beta)=3$, 唯一解.

$b=0$ 时, $(A, \beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}a&1&1&1\\1&0&1&-1\\1&0&1&2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\a&1&1&1\\1&0&1&2\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{r_2-ar_1\\r_3-r_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&1&1-a&1+a\\0&0&0&3\end{array}\right)$

$r(A)=2,\ r(A, \beta)=3$, 无解.

$a=1$ 时, $(A, \beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&b&1&-1\\1&2b&1&2\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{r_3-r_2\\r_2-r_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&b-1&0&-2\\0&b&0&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&0&-5\\0&b&0&3\end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{r_1+r_2\\-r_2}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-4\\0&1&0&5\\0&0&0&3-5b\end{array}\right)$

$a=1,\ b\neq\frac{3}{5}$ 时, $r(A)=2,\ r(A, \beta)=3$, 无解.

$a=1,\ b=\frac{3}{5}$ 时, $r(A)=r(A, \beta)=2<3$, 无穷多解.

$AX=0$ 的同解方程组: $\begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=0 \end{cases}$, 基础解系: $\xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$AX=\beta$ 的同解方程组: $\begin{cases} x_1=-4-x_3 \\ x_2=5 \end{cases}$, 特解: $\eta^*=\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$AX=\beta$ 的通解: $X=\eta^*+k\xi=\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ■

法 2: $$(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & -1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \end{array}\right)\xrightarrow[r_2-ar_1]{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & -1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 1+a \\ 0 & b & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+ar_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1-a & 1+4a \\ 0 & b & 0 & 3 \end{array}\right)\xrightarrow{r_3-br_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1-a & 1+4a \\ 0 & 0 & -b(1-a) & 3-b(1+4a) \end{array}\right)$$

$a\neq1,\ b\neq0$ 时, $r(A)=r(A,\,\beta)=3$, 唯一解.

$b=0$ 时, $(A,\,\beta)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1-a & 1+4a \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$, $r(A)=2$, $r(A,\,\beta)=3$, 无解.

$a=1,\ b\neq\dfrac{3}{5}$ 时, $(A,\,\beta)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3-5b \end{array}\right)$, $r(A)=2,\ r(A,\,\beta)=3$, 无解.

$a=1,\ b=\dfrac{3}{5}$, $(A,\,\beta)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $r(A)=r(A,\,\beta)=2<3$, 无穷多解.

$AX=0$ 的同解方程组: $\begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=0 \end{cases}$, 基础解系: $\xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$AX=\beta$ 的同解方程组: $\begin{cases} x_1=-4-x_3 \\ x_2=5 \end{cases}$, 特解: $\eta^*=\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$AX=\beta$ 的通解: $X=\eta^*+k\xi$. ■

例. **设** $A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda & 0\\ 1 & 1 & \lambda+1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$**, 已知线性方程组** $AX=b$ **存在两个不同的解.**

(1) 求 λ, a.

(2) 求方程组 $AX=b$ **的通解.**

解. $AX=b$ 有两个不同的解, 则有无穷多解.

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda & 0\\ 1 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+2)$$

$\lambda\neq 0$, $\lambda\neq -2$ 时, $r(A)=r(A,\ \beta)=3$, 唯一解(舍弃)

$\lambda=0$ 时, $r(A)=1$, $r(A,\ \beta)=2$, 无解(舍弃)

$\lambda=-2$ 时, $(A,\ \beta)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & a+3\end{array}\right)$

$\lambda=-2$, $a\neq -3$ 时, $r(A)=2$, $r(A,\ \beta)=3$, 无解(舍弃)

$\lambda=-2$, $a=-3$ 时, $r(A)=r(A,\ \beta)=2<3$, 无穷多解(保留)

$AX=0$ 的同解方程组: $\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=0\end{cases}$, 基础解系: $\xi=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$AX=\beta$ 的同解方程组: $\begin{cases}x_1=2+x_3\\ x_2=-1\end{cases}$, 特解: $\eta^*=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

$AX=\beta$ 的通解: $X=\eta^*+k\xi$. ■

例. **已知线性方程组** $\begin{cases}x_1 \qquad\quad -x_3=1\\ x_1+ax_2+x_3=b\\ x_1\ +x_2 \qquad\ =1\end{cases}$ **, 当** a,b **为何值时, 方程组**

(1) 无解; (2) 有唯一解; (3) 有无穷多解. 并在无穷多解时求其通解.

解. $|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&a&1\\1&1&0\end{vmatrix}=a-2$

$a\neq 2$ 时, $r(A)=r(A,\beta)=3$, 唯一解

$a=2$ 时, $(A,\beta)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&b-1\end{array}\right)$

$a=2,\ b\neq 1$ 时, $\quad r(A)=2,\ r(A,\beta)=3$, 无解

$a=2,\ b=1$ 时, $\quad r(A)=r(A,\beta)=2<3$, 无穷多解

$AX=0$ 的同解方程组: $\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$, 基础解系: $\xi=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$AX=\beta$ 的同解方程组: $\begin{cases}x_1=1+x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$, 特解: $\eta^*=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$AX=\beta$ 的通解: $X=\eta^*+k\xi$. ■

例. 当 a 等于何值时, 方程组 $\begin{cases}ax_1-x_2-x_3=1\\-x_1+ax_2-x_3=-a\\-x_1-x_2+ax_3=a^2\end{cases}$ 无解, 有唯一解, 有无穷多解? 当有无穷解时, 写出通解.

解. $|A|=\begin{vmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{vmatrix}=(a-2)(a+1)^2$

$a\neq 2$, 且 $a\neq -1$ 时, $r(A)=r(A,\beta)=3$, 唯一解

$a=2$ 时, $r(A)=2,\ r(A,\beta)=3$, 无解

$a=-1$ 时, $r(A)=r(A,\beta)=1<3$, 无穷多解

$(A,\beta)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$AX=0$ 的同解方程组: $x_1=-x_2-x_3$,

基础解系: $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$AX=\beta$ 的同解方程组: $x_1=-1-x_2-x_3$, 特解: $\eta^*=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

$AX=\beta$ 的通解: $X=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2$. ■

例. 当 a 等于何值时, 方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=a\\x_1+ax_2+x_3=1\\ax_1+x_2+x_3=a\end{cases}$ 无解, 有唯一解, 有无穷多解? 当有无穷多解时, 写出通解.

解. $|A|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=-(a+2)(a-1)^2$

$a\neq1$, $a\neq-2$ 时, 唯一解.

$a=-2$ 时, $r(A)=2$, $r(A,\ \beta)=3$, 无解.

$a=1$ 时, $r(A)=r(A,\ \beta)=1<3$, 无穷多解.

$(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$, 同解方程组: $x_1=1-x_2-x_3$.

$AX=0$ 的基础解系: $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$AX=\beta$ 的特解: $\eta^*=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

$AX=\beta$ 的通解: $X=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2$. ■

例. 求解下列线性方程组: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\(2+a)x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2\\3x_1+(3+a)x_2+3x_3+3x_4=3\\4x_1+4x_2+(4+a)x_3+4x_4=4\end{cases}$

解. $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2+a & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3+a & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4+a & 4 \end{vmatrix}=-a^3$

$a\neq 0$ 时, $r(A)=r(A,\beta)=3$, 唯一解.

$a=0$ 时, $r(A)=r(A,\beta)=1<3$, 无穷多解.

$$(A,\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&1\\ 2&2&2&2&2\\ 3&3&3&3&3\\ 4&4&4&4&4 \end{array}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$AX=0$ 的同解方程组: $x_1=-x_2-x_3-x_4$.

基础解系: $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$AX=\beta$ 的同解方程组: $x_1=1-x_2-x_3-x_4$. 特解: $\eta^*=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

$AX=\beta$ 的通解: $X=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$. ■

5

例. 设 3 阶实方阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$, $a_{11}=-1$, $A'=A^*$, 向量 $\beta=(1,0,0)'$. 求线性方程组 $AX=\beta$ 的解.

解. $\because$ $A'=\begin{pmatrix}-1 & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}=A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$,

$\therefore$ $A_{ij}=a_{ij}$, $i,j=1,2,3$.

则 $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=(-1)^2+a_{12}^2+a_{13}^2>0$.

故 $AX=\beta$ 有唯一解: $X=A^{-1}\beta$.

$\because$ $AA^*=|A|E=AA'$, 取行列式得 $|A|^3=|A|^2$.

$\therefore$ $|A|=0$ (舍弃), 或 $|A|=1$.

$\therefore$ $AA'=E$. $\therefore$ $A^{-1}=A'$, 且 $a_{12}=a_{13}=0$.

因此, $X=A'\beta=\begin{pmatrix}-1 & a_{21} & a_{31}\\ 0 & a_{22} & a_{32}\\ 0 & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$. ■

例. 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 9 & 7\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 14 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, 是否存在 X, 使得 $AX=B$. 若存在, 求 X; 若不存在, 说明理由.

解. 令 $X=(X_1, X_2, X_3)$, $B=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 验证: $AX_i=\beta_i$, $i=1,2,3$ 是否有解.

$$(A, B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 9 & 7 & -1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3\\ 2 & 14 & 6 & -2 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3\\ 3 & 9 & 7 & -1 & 1 & 3\\ 2 & 14 & 6 & -2 & 2 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 6 & 1 & -1 & 1 & -6\\ 0 & 12 & 2 & -2 & 2 & -5\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 6 & 1 & -1 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7\end{array}\right)$$

$\because$ $r(A)\neq r(A, \beta_3)$, $\therefore$ $AX_3=\beta_3$ 无解, $\therefore$ X 不存在. ■

6

例. 设 A 是 3×5 的行满秩实矩阵, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 $AX=b$ 的线性无关的解向量. 证明: $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_2-\alpha_3$ 是 $AX=0$ 的基础解系.

解. A 是 3×5 的行满秩实矩阵, $\therefore$ $r(A)=3$.

$\therefore$ $AX=0$ 的解空间维数 $=5-r(A)=2$.

$\because$ $A(\alpha_1-\alpha_2)=A\alpha_1-A\alpha_2=b-b=0$,

$A(\alpha_2-\alpha_3)=A\alpha_2-A\alpha_3=b-b=0$.

$\therefore$ $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_2-\alpha_3$ 是 $AX=0$ 的解.

$$(\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$B=PC$

$\because$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\therefore$ $r(B)=r(C)=2$.

$\therefore$ $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_2-\alpha_3$ 线性无关, 是 $AX=0$ 的基础解系. ■

7

例. **设 4 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和为 1, 向量 $\alpha=(1,-1,0,0)^T$, $\beta=(0,\ 0,\ 1,\ -1)^T$, $\gamma=(0,\ 1,\ -1,\ 0)^T$ 是方程组 $AX=0$ 的三个解.**

（1）求 A 的特征值与特征向量.

（2）求正交矩阵 P 和对角矩阵 B , 使得 $P^TAP=B$.

解. (1) $\because\ A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad\therefore\ \lambda_1=1,\quad \xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\therefore\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&1\\0&1&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$\therefore\ r(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=3.$

$\because\ (0E-A)X=0$ 有 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 这 3 个线性无关的解向量.

$\therefore\ \lambda_2=0$ (3 重根)

$\therefore\ A$ 的特征值 $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=0$ (3 重根)

用施密特正交化方法, 将 $\xi_1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ 化为标准正交向量组.

正交化: $\beta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\beta_2=\alpha-\frac{(\alpha,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\beta-\frac{(\beta,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\beta_4=\gamma-\frac{(\gamma,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\gamma,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\gamma,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\beta_3$$

$$=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

例. 设 3 阶实对称阵 A 的每一列元素之和都是 3, 秩 $r(A)=1$. 求一个正交矩阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解. $\because\ A'\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.\ \therefore\ \lambda_1=3,\quad \xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$

单位化 ξ_1, 得 $P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$

$\because\ r(A)=1,\ \therefore\ |A|=0,\ 0$ 是 A 的特征值.

$(0E-A)X=0$ 的解空间维数 $=3-r(A)=3-1=2.$

$\because$ 特征值的代数重数 $\geqslant$ 几何重数 2, $\therefore\ \lambda=0$ 是 2 重根.

设 $X=(x_1,\ x_2,\ x_3)'$为特征值 0 对应的特征向量.

因为实对称阵的不同特征值对应的特征向量正交,

$\therefore\ \xi_1\perp X.\ \therefore\ x_1+x_2+x_3=0,$ i.e. $\therefore\ x_1=-x_2-x_3.$

令 $x_2=1,\ x_3=0;\ x_2=0,\ x_3=1$, 得

$$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

用施密特正交化方法将 ξ_2, ξ_3 标准正交化, 得

$$P_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

正交阵 $P=(P_1, P_2, P_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

例. **设 A 是 3 阶实对称矩阵, $r(A)=2$,且满足 $AB=2B$, 其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$,求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ, 使得 $Q^TAQ=\Lambda$.**

解. 令 $B=(\xi_1, \xi_2)$, 则 $AB=(A\xi_1, A\xi_2)=2B=(2\xi_1, 2\xi_2)$

$\therefore\ A\xi_1=2\xi_1,\quad A\xi_2=2\xi_2$

$\therefore\ \lambda_{1,2}=2$ (2 重根) 特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Schimidt正交化: 将 ξ_1, ξ_2 化为正交向量组.

$$\beta_1=\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\because\ r(A)=2,\ \therefore\ |A|=0.\ \therefore\ \lambda_3=0.$

设 $\xi_3=(x_1, x_2, x_3)$ 是对应于 λ_3 的特征向量, 则 $(\xi_1, \xi_3)=0$, $(\xi_2, \xi_3)=0$.

$$\therefore\ \begin{cases} x_1-x_3=0 \\ 2x_2-2x_3=0 \end{cases}\quad \therefore\ \begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases}\quad \therefore\ \xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

单位化: $\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $\gamma_3=\frac{\xi_3}{|\xi_3|}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

1 Chap 8 正定阵

1.1 计算题: 正交变换法.化标准形

例. 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

(1) 用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为标准形, 并求所作的正交变换.

(2) 方程 $f(x_1, x_2, x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

解. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+c_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 & -2 \\ \lambda-5 & \lambda-1 & -2 \\ \lambda-5 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_3-r_1 \\ r_2-r_1}}{=\!=\!=} (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} =(\lambda-5)(\lambda+1)^2.$$

$\lambda_1=5$, $\lambda_{2,3}=-1$ (2 重根)

$\lambda_1=5$ 时, 解 $(5E-A)X=0$.

$$5E-A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_i} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3+2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3+r_2 \\ -\frac{1}{3}r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases} \quad \xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{2,3}=-1$ 时, 解 $(-E-A)X=0$.

$$-E-A=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x_1=-x_2-x_3\qquad \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

将 ξ_2, ξ_3 Schimidt正交化:

$$\beta_2=\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\xi_3-\frac{(\xi_3,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

单位化: $\gamma_1=\dfrac{\xi_1}{|\xi_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\ \gamma_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\ \gamma_3=\dfrac{\beta_3}{|\beta_3|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

正交矩阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, 正交变换 $X=PY$

标准形: $f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$

$5y_1^2-y_2^2-y_3^2=1$ 旋转双叶双曲面

9

例. 设$f=X^TBX$,其中$B=\begin{pmatrix}2&4&0\\2&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$, $X=(x_1,\ x_2,\ x_3)^T$

(1) 写出二次型 f 的矩阵 A.

(2) 请用正交线性变换 $X=PY$ 把二次型 f 化为标准形, 要求给出所求的正交变换.

(3) 写出方程 $f=1$ 所表示的空间曲面名称.

解. (1) $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\3&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -3 & 0\\ -3 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+1).$

$\lambda_{1,2}=5$ (2 重根), $\lambda_3=-1$

$\lambda_{1,2}=5$ 时, $(5E-A)X=0$ 的同解方程组: $x_1=x_2+0x_3$.

基础解系: $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\because$ $(\xi_1, \xi_2)=0$, $\therefore$ ξ_1 与 ξ_2 正交.

$\lambda_3=-1$ 时, $(-E-A)X=0$ 的同解方程组: $\begin{cases}x_1=-x_2\\ x_3=0\end{cases}$

基础解系: $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

单位化: $\gamma_1=\dfrac{\xi_1}{|\xi_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\gamma_2=\dfrac{\xi_2}{|\xi_2|}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\gamma_3=\dfrac{\xi_3}{|\xi_3|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$

正交矩阵 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 正交变换 $X=PY$

标准形: $f=5y_1^2+5y_2^2-y_3^2$

$5y_1^2+5y_2^2-y_3^2=1$ 旋转单叶双曲面

例. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_1x_3$. 设 A 是该二次型的矩阵, 且 $|A|=5$, 求:

(1) a 的值.

(2) 用正交变换将二次型化为标准形, 写出正交变换矩阵 P.

解. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & a\end{pmatrix}$ $\because$ $|A|=-5a+16=5$ $\therefore$ $a=\dfrac{11}{5}$

10

例. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a.

(2) 求正交线性变换 $X=PY$, 把 f 化成标准形.

解. $A=\begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\because\ r(A)=2,\ \therefore\ |A|=-8a=0\quad \therefore\ a=0$ 11

例. 已知实二次型 $f(x,\,y,\,z)=-x^2-y^2-z^2+2xy+2xz+2yz$.

(1) 给出 f 的矩阵 A.

(2) 试用正交变换化 f 为标准形, 并求出所用的正交变换矩阵.

(3) 方程 $f(x,\,y,\,z)=1$ 表示空间直角坐标系中何种二次曲面.

解. $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

例. 已知实二次型 $f(x,\,y,\,z)=3x^2+3y^2+2xy+4xz-4yz$.

(1) 给出 f 的矩阵 A.

(2) 试用正交变换 $X=PY$, 化 f 为标准形, 并写出所用的正交矩阵 P.

(3) 方程 $f(x,\,y,\,z)=1$ 表示空间直角坐标系中何种二次曲面.

解. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

12

1.2 配方法.化标准形

例. 二次型 $f(x_1,\,x_2,\,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$ 的标准形是(C).

(A) $2y_1^2+y_2^2+3y_3^2$ (B) $-2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$ (D) $2y_1^2-y_2^2$

解. 配方法:
$$\begin{aligned} f&=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3 \\ &=2(x_1-x_2)^2-x_2^2-4x_3^2-2x_2x_3 \\ &=2(x_1-x_2)^2-(x_2+x_3)^2-3x_3^2 \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1-x_2 \\ y_2=x_2+x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ 标准形: $2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$

例. 二次曲面 $2x^2+2y^2+z^2+2xy=1$ 的曲面名称是___椭球面___.

解. 配方法:
$$
\begin{aligned}
f&=2x^2+2xy+2y^2+z^2\\
&=2\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{2}+2y^2+z^2\\
&=2\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{2}y^2+z^2\\
&=2u^2+\frac{3}{2}v^2+w^2=1 \quad \text{椭球面}
\end{aligned}
$$

例. 二次曲面 $x^2+y^2+2z^2+2xy=1$, 则该曲面的名称为___椭圆柱面___.

解. 配方法: $(x+y)^2+2z^2=1$

$u^2+2v^2=1$ 椭圆柱面 ■

例、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2, 求 $a=($ 0 $)$.

解. $A=\begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\because r(A)=2$, $\therefore |A|=0=-8a$. $\therefore a=0$.

例. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+Cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2, 则必有 $C=$___3___, 且此二次型对应的矩阵的特征值分别为___0，4，9___, 当 $f(x_1,x_2,x_3)=6$ 时, 它代表三维空间的曲面名称是___椭圆柱面___.

解. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & C \end{pmatrix}$ $\because r(A)=2 \quad \therefore C=3$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+3r_2} \begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ 0 & 3\lambda-12 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}\lambda-4 & \lambda-4 & 0\\ 1 & \lambda-5 & 3\\ 0 & 3(\lambda-4) & \lambda+6\end{vmatrix}=(\lambda-4)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda-5 & 3\\ 0 & 3(\lambda-4) & \lambda+6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_1}(\lambda-4)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda-6 & 3\\ 0 & 3(\lambda-4) & \lambda+6\end{vmatrix}=(\lambda-4)\lambda(\lambda-9)=0 \quad \therefore\ \lambda=0,\ 4,\ 9.$$

标准形: $f=4y_1^2+9y_2^2$

$4y_1^2+9y_2^2=6$ 椭圆柱面

13

1.3 等价.相似.合同

例. 判断: A, B 皆为 n 阶实对称阵, 具有相同的特征值, 则二者既相似又合同.(✓)

解. 实对称阵 A, B 特征值相同则相似, 相似则合同.

例. 判断: A, B 皆为 n 阶方阵, 具有相同的特征值, 而且这 n 个特征值还两两互异, 则 A 和 B 一定相似, 但不一定合同.(✓)

解. $\because$ A, B 具有相同的特征值, 且 n 个特征值互不相同,

$\therefore$ A, B 都可以相似对角化, 且相似于同一个对角阵Λ,

$\therefore$ A, B 相似.

$\because$ A, B 不一定都是对称阵,

$\therefore$ A, B 不一定合同.

例. 设 A, B 都是 n 阶实对称可逆矩阵, 则(D).

(A) A 与 B 相似　　(B) A 与 B 合同

(C) A^2 与 B^2 相似　　(D) A^2 与 B^2 合同

解. 实对称阵 A, B 相似则合同, $\therefore$ (A), (B) 错.

设实对称可逆阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 A^2 的特征值 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$ 全大于 0.

设实对称可逆阵 B 的特征值为 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$, 则 A^2 的特征值 $\mu_1^2, \mu_2^2, \cdots, \mu_n^2$ 全大于 0.

$\therefore$ A^2 与 B^2 合同. (D) 对.

例. $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, **则在实数域上与** A **合同的矩阵为 (A)**

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$ **(B)** $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ **(C)** $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ **(D)** $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

解. $(A), (B), (C), (D)$ 均为对称阵.

矩阵 A 的特征值: -1, 3

(A): 特征值: -1, -3　　(B): 特征值: 1, 3

(C): 特征值: 1, 3　　(D): 特征值: 3, -1

例. $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$, **则** A **与** B **(C).**

(A) 合同且相似　　**(B) 不合同但相似**

(C) 合同但不相似　　**(D) 不合同也不相似**

解. $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)^2$, $\therefore\ \lambda=0, 3, 3$

B的特征值 $1, 1, 0$

$\because\ A, B$ 特征值不同, $\therefore\ A, B$ 不相似.

实对称阵 A, B 的正负特征值的个数对应相同, $\therefore\ A, B$ 合同.

例. $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ **与** $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ **的关系是(D).**

(A) 等价而不合同　　**(B) 合同而不相似**

(C) 相似而不合同　　**(D) 合同且相似**

解. A 的特征值 $1, 1, -1$;　B 的特征值 $1, 1, -1$

实对称阵 A, B 特征值相同则相似, 相似则合同.

例. $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&2&0\\2&6&0\\0&0&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&1&0\\0&4&1\\0&0&8\end{pmatrix}$. **则(A).**

(A) A **合同于** B, A **相似于** B　　**(B)** B **合同于** C, B **相似于** C

(C) A **合同于** C, A **相似于** C　　**(D)** A **合同于** B, B **相似于** C

解. A, B 对称阵, C 非对称阵, 故 A, B 与 C 不合同, $\therefore$ $(B), (C)$ 错.
对称阵 A 的特征值: 4, 4, 8　对称阵 B 的特征值: 4, 4, 8
实对称阵 A, B 特征值相同则相似, 相似则合同.

例. $A=\begin{pmatrix} 4&0&0\\ 0&4&0\\ 0&0&8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6&2&0\\ 2&6&0\\ 0&0&4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4&1&0\\ 0&4&1\\ 0&0&8 \end{pmatrix}$, **则 (B)**

(A) A 与 C 相似且合同　(B) A 与 B 相似且合同
(C) B 与 C 相似且合同　(D) B 与 C 不相似但合同

解. 对称阵 A, B 与非对称阵 C 不可能合同, $\therefore$ $(A), (C), (D)$ 错.

例. $A=\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$, **则 A 与 B(A).**

(A) 合同且相似　(B) 合同但不相似
(C) 不合同但相似　(D) 不合同且不相似

解. 对称阵 A 的特征值: 4, 0, 0, 0　对称阵 B 的特征值: 4, 0, 0, 0
实对称阵 A, B 特征值相同则相似, 相似则合同.

例. $A=\begin{pmatrix} 2&1&0\\ 1&2&0\\ 0&0&-1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&-1 \end{pmatrix}$, **则(B).**

(A) A 与 B 既合同又相似　(B) A 与 B 合同但不相似
(C) A 与 B 相似但不合同　(D) A 与 B 既不相似又不合同

解. 对称阵 A 的特征值: 1, 3, -1　对称阵 B 的特征值: 2, 1, -1
A, B 的特征值不同, $\therefore$ 不相似.
A, B 的正, 负特征值的个数对应相同, $\therefore$ 合同.

例. $A=\begin{pmatrix} 0&0&2\\ 0&2&0\\ 2&0&0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2&1&0\\ 1&2&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2&0&0\\ 0&2&0\\ 0&0&-2 \end{pmatrix}$. **则必有(C).**

(A) A **与** B **相似且合同**　　**(B)** B **与** C **相似且合同**

(C) A **与** C **相似且合同**　　**(D) 以上都不正确**

解. A, B, C 均为对称阵.

对角阵 C 的特征值: 2，2，-2　对称阵 A 的特征值: 2，2，-2

实对称阵 A, C 特征值相同则相似, 相似则合同.

例. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, **则 (A)**

(A) A**与** B **相似，**B**与**C**等价**　**(B)** A **与** B **合同，**A **与** C **相似**

(C) A**与** C **合同，**B**与**C**等价**　**(D)** A **与** B **合同，**B **与** C **相似**

解. A, B 对称阵, C 非对称阵, 故 A, B 与 C 不合同, $\therefore$ (C) 错.

对称阵 A 的特征值: 2，2，-3　对称阵 B 的特征值: 2，2，-3

实对称阵 A, B 特征值相同则相似, 相似则合同.

$|B|\neq 0$, $|C|\neq 0$, $\therefore$ $r(B)=r(C)$, 等价.

☞ 若 A, C 相似, 则 C 的特征值也是 2，2，-3, 且 C 可以相似对角化,

$\therefore$ B, C 相似. 从而选项 (B), (C) 都对, 矛盾.

$\therefore$ (A) 对.

1.4　正定阵

例. 设 n **阶正交矩阵** A **是正定矩阵, 则** $A=$____E_n____.

解. $\because$ A 是正交阵, $\therefore$ $A^T=A^{-1}$.

设 A 的特征值为 λ, 则 A^T, A^{-1} 的特征值为 λ 和 $\frac{1}{\lambda}$, 且 $\lambda=\frac{1}{\lambda}$.

$\therefore$ $\lambda^2=1$

$\because$ A 是正定阵, $\therefore$ A 的特征值全大于 0, $\therefore$ $\lambda=1$ (n 重根).

$\therefore$ $A=E_n$.

例. 设 A, B **为任意两个** n **阶方阵, 下面一定成立的是(B).**

(A) $|A+B|=|A|+|B|$　　**(B)** $|AB|=|BA|$

(C) $|A^{-1}|=|A|^{-1}$　　**(D) 若** A, B **正定, 则** AB **正定.**

解. (A)错误, 反例: $A=E$, $B=E$.

(B)正确, $\because$ A, B 方阵, $\therefore$ $|AB|=|A|\cdot|B|=|B|\cdot|A|=|BA|$.

(C)错误, $\because$ A, B 不一定可逆, 反例: $A=O$, $B=O$.

(D)错误.

例. 判断: A, B 皆为 n 阶实正定阵, 则 $A+B$, AB 也是.(错)

解. A, B 正定, 则 $A+B$ 正定, AB 不一定正定.

例. 判断: A 为 n 阶实对称阵, 且 $AB+B^TA$ 正定, 则 A 必为非奇异阵.($\checkmark$)

解. $\because$ $AB+B^TA$ 正定,

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \forall\, X\neq 0,\ X^T(AB+B^TA)X &= X^TABX+X^TB^TAX \\
&= X^TA^TBX+X^TB^TAX \\
&= (AX,BX)+(AX,BX) \\
&= 2(AX,BX)>0 \\
\therefore\ (AX,BX)&>0.
\end{aligned}
$$

假设 A 为奇异阵, 则 $|A|=0$, $AX=0$ 有非零解, 即 $\exists$ $X\neq 0$, $s.t.$ $AX=0$, 与 $\forall\, X\neq 0$, $(AX,BX)>0$ 矛盾.

$\therefore$ A 为非奇异阵.

19

例. A, B 都是同阶方阵, 下面说法不正确的是(D).

(A) 若 A, B 都是正定矩阵, 则 $A+B$ 是正定矩阵

(B) 若 A, B 都是正定矩阵, 则 $A^{-1}+B$ 是正定矩阵

(C) 若 A, B 都是正定矩阵, 则 $A^{-1}+B^*$ 是正定矩阵

(D) 若 A, B 都是正定矩阵, 则 A^*B^* 是正定矩阵

例. 下列结论正确的是(C).

(A) 若 A 与 B 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $A+B$ 可逆

(B) 若 A 与 B 均为 n 阶正交矩阵, 则 $A+B$ 正交

(C) 若 A 与 B 均为 n 阶正定矩阵, 则 $A+B$ 正定

(D) 若 A 与 B 均为 n 阶对称矩阵, 则 $A+B$ 反对称

20

例. **下列结论错误的是(C).**

(A) 若 A 与 B 均为 n 阶可逆矩阵, 则 AB 可逆

(B) 若 A 与 B 均为 n 阶正交矩阵, 则 AB 正交

(C) 若 A 与 B 均为 n 阶正定矩阵, 则 AB 正定

(D) 若 A 与 B 均为 n 阶对称矩阵, 且 A 与 B 可换, 则 AB 对称

解. $|AB|=|A|\cdot|B|\neq 0$, $\therefore$ AB 可逆. (A) 正确.

$(AB)^TAB=B^TA^TAB=E$, $\therefore$ AB 正交. (B) 正确.

$\because$ A 与 B 均正定, $\therefore$ A 与 B 均对称, 即 $A^T=A$, $B^T=B$.

$(AB)^T=B^TA^T=BA$, $\therefore$ AB 未必正定. (C) 错误.

$(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$, $\therefore$ AB 对称. (D) 正确.

例. **设 A, B 都是 n 阶方阵, 下列结论错误的是(C).**

(A) 若 A, B 都是可逆矩阵, 则 AB 也是可逆矩阵.

(B) 若 A, B 都是正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.

(C) 若 A, B 都是正定矩阵, 则 AB 也是正定矩阵.

(D) 若 A, B 都是正交矩阵, 则 $A^{-1}B^{-1}$ 也是正交矩阵.

例. **若 n 阶矩阵 A 正定, 则下列结论不正确的是(A).**

(A) A 的所有元素全为正 **(B) A^{-1} 也是正定矩阵**

(C) $|A|>0$ **(D) A 为满秩矩阵**

解. A 正定, 则 A^{-1} 正定.

A 正定, 则特征值全大于 0. $\therefore$ $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n>0$.

A 正定, 则 A 可逆, i.e. 满秩.

例. **已知实矩阵 $B=(b_{ij})_{3\times3}$, 则实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$**

$=(b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3)^2+(b_{21}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3)^2+(b_{31}x_1+b_{32}x_2+b_{33}x_3)^2$

满足(A).

(A) $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定 $\Leftrightarrow$ $|B|\neq 0$ **(B) $f(x_1,x_2,x_3)$ 不正定**

(C) $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定 $\Leftrightarrow$ B正定 **(D) $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定**

解. 令 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 记: $Y=BX$.

$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$ 正定 $\iff \forall\, X\neq 0,\ Y=BX\ \neq 0$

$\iff |B|\ \neq 0$, i.e. $BX=0$ 只有零解. ■

例. 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定二次型, 则 t 的取值范围是 $\underline{\quad -\sqrt{\frac{2}{3}}<t<\sqrt{\frac{2}{3}} \quad}$.

解. $A=\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 含参数 t 的顺序主子式:

$$P_2=\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix}=1-t^2\ >0, \quad P_3=|A|=2-3t^2\ >0.$$

$$\begin{cases} 1-t^2\ >0 \\ 2-3t^2\ >0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<t<1 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}<t<\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{\frac{2}{3}}<t<\sqrt{\frac{2}{3}}$$ 时, f 正定.

例. 设二次型 $f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2)^2+(-x_1+ax_2)^2$ 正定, 则 a 的取值范围是 $\underline{\quad a\neq -2 \quad}$.

解. $f=x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2+x_1^2-2ax_1x_2+a^2x_2^2$

$=2x_1^2+(4+a^2)x_2^2+2(2-a)x_1x_2$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 2-a \\ 2-a & 4+a^2 \end{pmatrix}$. 含参数 a 的顺序主子式: $|A|=(a+2)^2>0$

$\therefore\ a\neq -2$ 时, f 正定.

22

例. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 正定, 则 t 满足 $\underline{\quad -\sqrt{2}<t<\sqrt{2} \quad}$.

解. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{pmatrix}$. 顺序主子式: $|A|=1-\dfrac{t^2}{2}>0$

$\therefore\ -\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ 时, f 正定.

例. 设 $f=x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 是正定二次型, 则 a

的取值范围是$\underline{\quad a>1 \quad}$**.**

解. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$. 顺序主子式: $|A|=a-1>0$

$\therefore\ a>1$ 时, f 正定.

例. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ **正定的充要条件为(D).**

(A) $t>1$ (B) $t>0$ (C) $t>-1$ (D) $t>\dfrac{1}{2}$

解. $A=\begin{pmatrix} t & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & t \end{pmatrix}$. 含参数 t 的顺序主子式:

$$P_2=\begin{vmatrix} t & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t \end{vmatrix}=\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)>0,\quad P_3=|A|=(t+1)\left(t-\frac{1}{2}\right)^2>0.$$

$$\begin{cases} \left(t+\dfrac{1}{2}\right)\left(t-\dfrac{1}{2}\right)>0 \\ (t+1)\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t<-\dfrac{1}{2} \text{ 或 } t>\dfrac{1}{2} \\ t\neq\dfrac{1}{2} \text{ 且 } t>-1 \end{cases} \Rightarrow t>\frac{1}{2} \text{ 时, } f \text{ 正定.}$$

例. 设 A **是 3 阶实对称矩阵,** λ_1, λ_2, λ_3 **是** A **的三个特征值, 且满足** $a\geqslant\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_3\geqslant b$**, 则当** μ **取何值时,** $A-\mu E$ **一定是正定矩阵. (A).**

(A) $\mu<b$ (B) $\mu>b$ (C) $\mu<a$ (D) $\mu>a$

解. $A-\mu E$ 的特征值: $\lambda_1-\mu$, $\lambda_2-\mu$, $\lambda_3-\mu$

$A-\mu E$ 正定, 则 $\lambda_1-\mu>0$, $\lambda_2-\mu>0$, $\lambda_3-\mu>0$

$\therefore\ \mu<\min\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\}=\lambda_3$

$\therefore\ \mu<b\leqslant\lambda_3$ 时, $A-\mu E$ 正定.

1.5 证明题: 正定阵

例. 设 A **为** n **阶实对称阵,** $AB+B^TA$ **为正定阵, 证明:** A **可逆.**

解. $\because\ AB+B^TA$ 正定,

$\therefore\ \forall\ X\neq 0,\ X^T(AB+B^TA)X=X^TABX+X^TB^TAX$

$$
\begin{aligned}
&= X^TA^TBX + X^TB^TAX \\
&= (AX, BX) + (AX, BX) \\
&= 2(AX, BX) > 0
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ (AX, BX) > 0.$$

假设 A 不可逆, 则 $r(A) < n$, $AX = 0$ 有非零解, 即 $\exists\ X \neq 0$, $s.t.\ AX = 0$, 与 $\forall\, X \neq 0$, $(AX, BX) > 0$ 矛盾.

$\therefore\ A$ 可逆.

例. 设 A 为 m 阶实正定阵, B 为 $m \times n$ 阶实矩阵, 证明: B^TAB 正定的充要条件为 $r(B) = n$.

证. $\Longrightarrow$ $\because\ B^TAB$ 正定,

$\therefore\ \forall\, X \neq 0$, $X^TB^TABX = (BX)^TA(BX) > 0$.

$\therefore\ \forall\, X \neq 0$, $BX \neq 0$, 即 $BX = 0$ 只有零解, $\therefore\ r(B) = n$.

$\Longleftarrow$ $(B^TAB)^T = B^TA^TB = B^TAB$ 实对称阵

$\because\ r(B) = n$, $\therefore\ BX = 0$ 只有零解, 即 $\forall\, X \neq 0$, $BX \neq 0$.

$\because\ A$ 正定, $\therefore\ \forall\, X \neq 0$, $X^TB^TABX = (BX)^TA(BX) > 0$,

$\therefore\ B^TAB$ 正定.

例. 已知 A, B 为 n 阶实正定阵, 证明: BAB 也是正定阵.

证. $\because\ A$, B 正定, $\therefore\ A^T = A$, $B^T = B$.

$\therefore\ (BAB)^T = B^TA^TB^T = BAB$. 实对称阵

$\because\ B$ 正定, $\therefore\ B$ 可逆, $r(B) = n$, $\therefore\ BX = 0$ 只有零解.

$\therefore\ \forall\, X \neq 0$, $BX \neq 0$.

$\because\ A$ 正定,

$\therefore\ \forall\, X \neq 0$, $X^TBABX = X^TB^TABX = (BX)^TA(BX) > 0$,

$\therefore\ BAB$ 正定. ■

例. 已知 A 为列满秩的 $m \times n$ 阶实矩阵, 证明: A^TA 正定.

证. $(A^TA)^T = A^TA$ 实对称阵

$\because\ r(A) = n$, $\therefore\ AX = 0$ 只有零解, 即 $\forall\, X \neq 0$, $AX \neq 0$.

$\forall\, X \neq 0$, $X^TA^TAX = (AX)^TAX = (AX, AX) > 0$.

$\therefore\ A^TA$ 正定.

例. A **为** n **阶反对称实矩阵, 证明：**$E-A^2$ **为正定阵.**

证. $\because$ A 为反对称矩阵, $\therefore$ $A^T=-A$,

$\therefore$ $(E-A^2)^T=E-(A^TA^T)=E-A^2$ 实对称阵

$$\forall X\neq 0,\ X^T(E-A^2)X=X^TX-X^TA^2X$$
$$=(X,\ X)+X^TA^TAX$$
$$=(X,\ X)+(AX,\ AX)>0.$$

$\therefore$ $E-A^2$ 正定.

24

哈工大网盘计划简介

1.项目初衷

鉴于（1）哈工大各类 QQ 群内学习资料多且繁杂，而文件文字太多会导致文件被 tx 屏蔽或者降低 QQ 群信用星级；（2）校内诚信复印和纸张记忆垄断；（3）很多营销号在卖资料且售价很高；（4）学长学姐的自编材料很好，还想分享给下一届；等问题，网盘计划应运而生！哈尔滨工业大学网盘计划**旨在将窝工的各类学习资料进行归类整理，并且以网盘的形式发出来**，历时一年，现已小成，扫描了上百份校内复印店试题文档，归类整理了近 40 个 G 的学习资料给大家，已经花费上千元，现入不敷出，如果您希望网盘计划继续运营下去的话，可通过以下方式进行捐赠。

QQ支付

推荐使用微信支付

2.网盘计划成就（密码 1920）

哈工大网盘计划
密码1920

哈工大电子教材

群名称:哈工大网盘计划（预）
群　号:953062322

腾讯自动屏蔽以上链接，请用浏览器扫一扫