第五章线性方程组参考答案

一、设 A 为 4 阶方阵，R（A）=3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$都是非齐次线性方程组$AX=\beta$的解向量，其中$\alpha_1+\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\9\\9\\4\end{pmatrix},\alpha_3+\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\8\\8\\5\end{pmatrix}$.

(1)求 AX=β对应的齐次线性方程组 AX=0 的一个基础解系;

(2)求 AX=β的通解.

书第 162 页

二、已知齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=0,\\ax_1+x_2+x_3=0\\x_1-x_2+3x_3=0\end{cases}$,有非零解，求$a$.

书第 163 页

三、求齐次线性方程组$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3+5x_4=0,\\-3x_1+x_2+2x_3-4x_4=0,\\-x_1-2x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}$的一个基础解系及其通解.

五、【参考解答】：齐次线性方程组的系数矩阵 A 为：

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&1&5\\-3&1&2&-4\\-1&-2&3&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1&-2&3&1\\0&7&-7&-7\\0&-7&7&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则一般解为：

$$\begin{cases}x_1=x_3-x_4\\x_2=x_3+x_4\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases}\quad(x_3\text{为自由未知量})$$

故齐次线性方程组的通解为

$$X=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(k_1k_2\text{为任意实数})$$

四、问a, b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\x_2+2x_3+2x_4=1,\\-x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$$

有唯一解？无解？有无穷多解？并求出无穷多个解时的通解.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)当 $a \neq 1$ 时，系数行列式 $|A| = (a-1)^2 \neq 0$，故由克莱姆法则，可知原方程有惟一解.

(2)当 $a = 1, b \neq -1$ 时，

$$r(A,b) = 3, r(A) = 2, r(A,b) \neq r(A),$$

故方程组无解.

(3)当 $a = 1, b = -1$ 时，$r(A,b) = r(A) = 2 < 4$，故方程组有无穷多个解，此时有

$$(A\ b) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求得原方程的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \cdot \end{cases}$$

因此，它的通解可以描述为

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$

五、已知三阶矩阵 $B\neq 0$,且矩阵 B 的列向量都是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$的解

(1)求λ*的值*;

(2)证明:$|B|=0$

14、**【参考解析】**：(1)因为 $B\neq O$，所以齐次线性方程组有非零解，方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=5\lambda=0$$

所以$\lambda=0$.

(2) 由于 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。因此

$R(A)=2$. 齐次线性方程组的基础解系所含解的个数为 $3-2=1$，所以$R(B)\leq 1$，所以$|B|=0$.

六、设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_s$线性无关,设$\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_s\alpha_s$, 如果对于某个 $i(1\leq i\leq s)$, $b_i\neq 0$, 证明: 用β替换α_i以后得到的向量组$\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1}\dots,\alpha_s$也线性无关.

五、**【参考解答】**：由线性无关的定义，设若有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k\beta+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\dots+k_s\alpha_s=0$$

则只需证明$k_j=0,k=0$，　其中 $j=1,2,..i-1,i+1,\dots,s$

其题意 $\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_s\alpha_s$，得到

$$(k_1+k)\alpha_1+(k_2+k)\alpha_2+\dots+(k_{i-1}+k)\alpha_{i-1}$$
$$+k\alpha_i+\dots+(k_s+k)\alpha_s=0$$

由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，即

$$(k_j+k)=0,k=0,j=1,2,..i-1,i+1,..s$$

从而$k_j=0,k=0$，　其中 $j=1,2,..i-1,i+1,\dots,s$.

七、已知A 为 3 阶非零矩阵，矩阵 B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$且$AB=0$,

求a及齐次线性方正组$AX=0$的通解.

4. **【参考解答】**：将矩阵B列分块$B=(B_1,B_2,B_3)$，由已知得

$$AB=A(B_1,B_2,B_3)=(0,0,0)$$

即B的各列B_i为齐次方程组$AX=0$的非零解. 由题可知B_1,B_2线性无关，且B_1,B_2为齐次方程组$AX=0$的解向量. 因此B_1,B_2是齐次方程组$AX=0$基础解系中的向量. 由$A\neq O$非零阵，$r(A)\geq 1$，因此$AX=0$的基础解系中所含向量个数

2

$3-r(A)\leq 2$，小于等于 2.

综上，可判定齐次方程组$AX=0$的基础解系中恰含 2 个向量，可选B_1,B_2为基础解系中的向量. 因此齐次方程组$AX=0$的通解为

$$k_1B_1+k_2B_2=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$$

由B的各列B_1,B_2,B_3为齐次方程组$AX=0$的非零解，B_1,B_2为基础解系，因此B_1,B_2,B_3线性相关. 即

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\-1 & 2 & a\\2 & 3 & 5\end{vmatrix}=0,$$

得到$a=1$.

八、设$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$为三阶方阵$A$的三个不同特征值.对应特征向量分别为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,

令$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$,求证向量组$\beta,A\beta,A^2\beta$线性无关.

22.【参考解答】: $A\beta = A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$

$= A\alpha_1 + A\alpha_2 + A\alpha_3 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$，

$A^2\beta = A(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3) = \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 + \lambda_3^2\alpha_3$

因此线性相关性定义可知：

$$k_1\beta + k_2A\beta + k_3A^2\beta = 0$$

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + k_2(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3) + k_3(\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3) = 0$$

即 $(k_1+\lambda_1k_2+\lambda_1^2k_3)\alpha_1 + (k_1+\lambda_2k_2+\lambda_2^2k_3)\alpha_2 + (k_1+\lambda_3k_2+\lambda_3^2k_3)\alpha_3 = 0$

由不同特征值对应特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关可知：

$$k_1+\lambda_1k_2+\lambda_1^2k_3=0, k_1+\lambda_2k_2+\lambda_2^2k_3=0, k_1+\lambda_3k_2+\lambda_3^2k_3=0$$

$$\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

由此齐次方程的系数行列式为三阶范德蒙行列式，因此由克莱姆(Cramer)法则，该齐次方程只有零解，即 $k_1=0, k_2=0, k_3=0$，向量组 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关.

九、设有线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0,\\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3,\\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1\end{cases}$$

问 λ 取何值时，此方程组有唯一解？无解？有无穷多解？并求出无穷多个解时的通解.

8、【参考解答】：通过对增广阵的讨论可得如下结论：

(1)当$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有唯一解；

(2)当$\lambda = 1$时，$R(A)=1, R(B)=2$，该情形方程组无解；

(3)当$\lambda = -2$时，$R(A)=R(B)=2$，此时方程组有无限多个解。而

$$B=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此得$\begin{cases}x_1=x_3-1\\x_2=x_3-2\\x_3=x_3\end{cases}$，即$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix},(c\in R)$。

十、证明R(A) = 1的充分必要条件是存在非零列向量a和非零行向量b^T,使$A = ab^T$.

20. 证明 $R(\boldsymbol{A})=1$ 的充分必要条件是存在非零列向量 $\boldsymbol{a}$ 和非零行向量 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$.

证 先证充分性. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，并不妨设 $a_1b_1\neq 0$.

按矩阵秩的性质⑦，由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 有 $R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{a})=1$；另一方面，$\boldsymbol{A}$ 的 $(1,1)$ 元 $a_1b_1\neq 0$，知 $R(\boldsymbol{A})\geqslant 1$. 于是 $R(\boldsymbol{A})=1$.

再证必要性. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$R(\boldsymbol{A})=1$，并不妨设 $a_{kl}\neq 0$.

因 $R(\boldsymbol{A})=1$，知 $\boldsymbol{A}$ 的所有二阶子式均为零，故对 $\boldsymbol{A}$ 的任一元 a_{ij} $(i\neq k, j\neq l)$ 有

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{il} \\ a_{kj} & a_{kl} \end{vmatrix}=0, \text{即 } a_{kl}a_{ij}=a_{il}a_{kj}.$$

上式当 $i=k$ 或 $j=l$ 时也显然成立. 于是

$$\begin{pmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \vdots \\ a_{ml} \end{pmatrix}(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn})=(a_{il}a_{kj})_{m\times n}=(a_{kl}a_{ij})_{m\times n}=a_{kl}\boldsymbol{A}.$$

令 $\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{a_{kl}}\begin{pmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \vdots \\ a_{ml} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn})$，则因 $a_{kl}\neq 0$，故 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 分别是非零列向量和非零行向量，且有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$.