综合练习100练

线性代数与空间几何

综合练习 100 题及答案

综合练习 100 题

一、填空题

1. 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA'=E$，$|A|<0$，则 $|A+E|=$________.

2. 若 4 阶行列式 D 的某一行的所有元素及其余子式都相等，则 $D=$________.

3. 在一个 n 阶行列式中，如果等于零的元素多于 n^2-n 个，那么这个行列式 $D=$________.

4. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，若 $m>n$，则 $|AB|=$________.

5. 若 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=B$，$|A-E|\neq 0$，则 $B=$________.

6. 若 n 阶方阵 A,B 满足 $A+AB=E$，则 $A+BA=$________.

7. 若 n 阶方阵 A,B,C 满足 $ABC=E$，则 $B'A'C'=$________.

8. 若 A,B 都是 n 阶方阵，$|A|=1$，$|B|=-3$，则 $|3A^*B^{-1}|=$________.

9. 若 n 阶方阵 A 满足 $|A|=0$，$A^*\neq 0$，则 $R(A)=$________.

10. 设 A,B 是两个 n 阶方阵，$|A+B|=1$，$|A-B|=2$，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=$________.

11. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$________.

12. A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，$|A|=a$，$|B|=b$，则 $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix}=$________.

13. 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$，其中 E 为单位矩阵，则 $(A-E)^{-1}=$________.

14. 设 A 为 3 阶方阵，其特征值为 $3,-1,2$，则 $|A^2+E|=$________.

15. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，则 $R(A)=$________.

16. 已知 n 阶方阵 A 的各行元素之和都等于 0，且 $R(A)=n-1$，则 $AX=0$ 的通解为________.

17. 矩阵 $A_{m\times n}$ 满足 $m<n$，$|AA'|\neq 0$，则 $AX=0$ 的基础解系一定由________个线性无关的解向量构成.

18. 若矩阵 A 满足 $A^3=A$，则 A 的特征值只能是________或________或________.

19. 如果 $\xi=(1,1,-1)'$ 是方阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$$

的一个特征向量,则 $a=$______,$b=$______.

20. 已知 A 与 B 相似,且 $B=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}$,则 $|\lambda A^2-A|=$______.

21. 已知 $A_{3\times3}$ 的特征值为1,2,3,则 $|A^{-1}+A^*|=$______.

22. 已知2是 A 的一个特征值,则 $|A^2+A-6E|=$______.

23. 设 α,β 是 n 维列向量,$\beta'\alpha=0$,则 $\alpha\beta'$ 的特征值为______.

24. 若 n 阶方阵 A 的行向量组线性相关,则______一定是 A 的一个特征值.

25. 直线 $\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 的单位方向向量为______.

26. 已知

$$D=\begin{vmatrix}2&7&6&8\\4&4&4&4\\2&4&7&9\\8&1&8&8\end{vmatrix},$$

$A_{41},A_{42},A_{43},A_{44}$ 为 D 中第4行元素的代数余子式,则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$______.

27. 设 A 是3阶方阵,X 是3维列向量,使得 X,AX,A^2X 线性无关,且 $A^3X=3AX-2A^2X$,记 $P=(X\ AX\ A^2X)$,则 $P^{-1}AP=$______.

28. 若两个非零几何向量 a,b 满足 $|a+b|=|a-b|$,则 a 与 b 的夹角 $\theta=$______.

29. 直线 $L:\begin{cases}x+2y-z-6=0,\\ 2x-y+z-1=0\end{cases}$ 的参数方程为______.

30. 圆 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0,\\ 2x+2y+z+1=0\end{cases}$ 的半径 $R=$______.

二、选择题

1. 设 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的系数矩阵 A 的秩为 r,则 $AX=0$ 有非零解的充要条件是(　　).

(A) $r=n$;　　(B) A 的行向量组线性无关;

(C) A 的列向量组线性相关;　　(D) A 的列向量组线性无关.

2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,$AX=0$ 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 所对应的齐次线性方程组,则下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $AX=0$ 只有零解,则 $AX=\beta$ 有唯一解;

(B) 若 $AX=0$ 有非零解,则 $AX=\beta$ 有无穷多解;

(C) 若 $AX=\beta$ 有无穷多解,则 $AX=0$ 有非零解;

(D) $AX=\beta$ 的任两解之和还是 $AX=\beta$ 的解.

3. 设非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的系数行列式为零,则(　　).

(A) 方程组有无穷多解;　　(B) 方程组无解;

(C) 若方程组有解,则必有无穷多解;　　(D) 方程组有唯一解.

4. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,对于线性方程组 $AX=\beta$,下列结论正确的是(　　).

(A) 若 A 的秩等于 m,则方程组有解;

(B) 若 A 的秩小于 n,则方程组有无穷多解;

(C) 若 A 的秩等于 n,则方程组有唯一解;

(D) 若 $m>n$,则方程组无解.

5. 设 5 阶方阵 A 的秩是 3,则其伴随矩阵 A^* 的秩为(　　).

(A) 3;　　(B) 4;　　(C) 0;　　(D) 2.

6. 设 A 是 n 阶方阵,$n>2$,A^* 是 A 的伴随矩阵,则下列结论正确的是(　　).

(A) $AA^*=|A|$;　　(B) 若 $|A|\neq 0$,则 $|A^*|\neq 0$;

(C) $A^*=\frac{1}{|A|}A^{-1}$;　　(D) $R(A)=R(A^*)$.

7. 设 A,B 是 n 阶方阵,A 非零,且 $AB=0$,则必有(　　).

(A) $B=0$;　　(B) $BA=0$;

(C) $(A+B)^2=A^2+B^2$;　　(D) $|B|=0$.

8. 设有两个平面方程

$$\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$

如果

$$R\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2,$$ 不成比例　∴法向量不平行

则一定有(D).

(A) π_1 与 π_2 平行;　　(B) π_1 与 π_2 垂直;

(C) π_1 与 π_2 重合;　　(D) π_1 与 π_2 相交.

9. 设 A 为 n 阶可逆矩阵,λ 是 A 的一个特征值,则 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值之一是(　　).

(A) λ^{n-1};　　(B) $\lambda|A|$;

(C) λ;　　(D) $\lambda^{-1}|A|$.

10. n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值是 A 与对角矩阵相似的(　　).

(A) 充分必要条件;　　(B) 充分而非必要条件;

(C) 必要而非充分条件;　　(D) 既非充分条件也非必要条件.

11. 已知 n 阶方阵 A 与某对角矩阵相似,则(　　).

(A) A 有 n 个不同的特征值;

(B) A 一定是 n 阶实对称矩阵;

(C) A 有 n 个线性无关的特征向量;

(D) A 的属于不同特征值的特征向量正交.

12. 下列说法正确的是(　　).

(A) 若有全不为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关;

(B) 若有一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$,则向量组 α_1,

$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关；

(C) 若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关；

(D) 任意 4 个 3 维几何向量一定线性相关.

13. 设 A,B 是 n 阶方阵，满足：对任意 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 都有 $X'AX=X'BX$，下列结论中正确的是(　　).

(A) 若 $R(A)=R(B)$，则 $A=B$；

(B) 若 $A'=A$，则 $B'=B$；

(C) 若 $B'=B$，则 $A=B$；

(D) 若 $A'=A,B'=B$，则 $A=B$.

14. 设 A,B 均为 n 阶正定矩阵，则必有(　　).

(A) AB 正定；　(B) A^2+B 正定；

(C) $A-B$ 正定；　(D) kA 正定.

15. 设 A 是 n 阶方阵，$A^2=E$，则(　　).

(A) A 为正定矩阵；　(B) A 为正交矩阵；

(C) $(A^*)^2=E$；　(D) $\mathrm{tr}(A)=n^2$.

16. 设 A,B 是 n 阶方阵，下列结论中错误的是(　　).

(A) 若 A,B 都可逆，则 $A'B^*$ 也可逆；

(B) 若 A,B 都是实对称正定矩阵，则 $A+B^{-1}$ 也是实对称正定矩阵；

(C) 若 A,B 都是正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵；

(D) 若 A,B 都是实对称矩阵，则 AB 是实对称矩阵.

17. 设 A,B 是 n 阶方阵，下列结论中错误的是(　　).

(A) 若 A 经列的初等变换化成 B，则 $R(A)=R(B)$；

(B) 若可逆矩阵 A 经行的初等变换化成 B，则 $A^{-1}=B^{-1}$；

(C) 若 A 经行的初等变换化成 B，则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解；

(D) 若 A 经列的初等变换化成 B，则 A 的列向量组与 B 的列向量组等价.

18. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则必有(　　).

(A) $AP_1P_2=B$；　(B) $AP_2P_1=B$；

(C) $P_1P_2A=B$；　(D) $P_2P_1A=B$.

19. 若 A 与 B 相似，则(　　).

(A) $\lambda E-A=\lambda E-B$；　(B) $|\lambda E+A|=|\lambda E+B|$；

(C) $A^*=B^*$；　(D) $A^{-1}=B^{-1}$.

20. 若 $A^2=E$,则( ).

(A) $A+E$ 可逆; (B) $A-E$ 可逆;

(C) $A+E=0$ 或 $A-E=0$; (D) $A\neq E$ 时,$A+E$ 不可逆.

21. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则 A 与 B( ).

(A) 合同且相似; (B) 合同但不相似;

(C) 不合同但相似; (D) 不合同且不相似.

22. 实二次型 $f=X'AX$ 为正定二次型的充要条件是( ).

(A) f 的负惯性指数是 0;

(B) 存在正交矩阵 P 使 $A=P'P$;

(C) 存在实可逆矩阵 T 使 $A=T'T$;

(D) 存在矩阵 B 使 $A=B'B$.

23. 设 B 是 $m\times n$ 实矩阵,$A=B'B$,则下列结论中错误的是( ).

(A) 线性方程组 $BX=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow A$ 正定;

(B) $R(A)=R(B)$;

(C) A 的特征值大于等于 0;

(D) $R(B)=m\Leftrightarrow A$ 正定.

24. 设 A 是 n 阶方阵,$|A|=a\neq0$,则 $|A^*A^{-1}|$ 等于( ).

(A) a; (B) $\dfrac{1}{a}$;

(C) a^{n-2}; (D) a^n.

25. 设 A,B 是 n 阶方阵,则必有( ).

(A) $|A+B^{-1}|=|A|+|B|^{-1}$; (B) $(A+B)^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$;

(C) $(AB)^2=A^2B^2$; (D) $|A'B|=|BA|$.

26. 已知 η_1,η_2 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的两个不同的解,ξ_1,ξ_2 是对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系,k_1,k_2 为任意常数,则方程组 $AX=\beta$ 的通解为( ).

(A) $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$;

(B) $k_1\xi_1+k_2(\xi_1+\xi_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$;

(C) $k_1\xi_1+k_2(\eta_1-\eta_2)+\eta_1$;

(D) $k_1\xi_1+k_2(\eta_1-\eta_2)+(\eta_1+\eta_2)$.

27. 设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6,\\2y+z=3,\end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为( ).

(A) $\dfrac{\pi}{6}$; (B) $\dfrac{\pi}{4}$;

(C) $\frac{\pi}{3}$;　　(D) $\frac{\pi}{2}$.

28. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是 4 维列向量,且 4 阶行列式 $|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_1|=m$, $|\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \alpha_3|=n$,则 4 阶行列式 $|\alpha_3\ \alpha_2\ \alpha_1\ \beta_1+\beta_2|$ 等于(　　).

(A) $m+n$;　　(B) $-(m+n)$;

(C) $m-n$;　　(D) $n-m$.

29. 设 A 为 n 阶矩阵($n>2$),则(　　).

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$;　　(B) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$;

(C) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$;　　(D) $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$.

30. 设矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 的秩是 3,则直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$(　　).

(A) 相交于一点;　　(B) 重合;

(C) 平行但不重合;　　(D) 异面.

三、计算题

1. 设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,求 A^5 及 $|A^{10}|$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.问

(1) a,b,c 满足什么条件时,A 的秩是 3;

(2) a,b,c 取何值时,A 是对称矩阵;

(3) 取一组 a,b,c,使 A 为正交矩阵.

3. 设有三维列向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\lambda \\ 1 \end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+\lambda \end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix},$$

问 λ 取何值时,

(1) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,且表达式唯一;

(2) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,但表达式不唯一;

(3) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

4. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,对应的特征向量依次为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix},$$

又

$$\beta=2\xi_1-2\xi_2+\xi_3,$$

求 $A^n\beta$（n 为正整数）.

5. 设

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}.$$

(1) 求 A 的特征值；

(2) 求 $E+A^{-1}$ 的特征值.

6. 已知 $\alpha=(1,k,1)'$ 是 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，试求常数 k 的值.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $AX=\beta$ 有无穷多解，试求

(1) a 的值；

(2) 正交矩阵 P，使 $P'AP$ 为对角矩阵.

8. 已知线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=0\end{cases}\tag{1}$$

的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{12}\\b_{13}\\b_{14}\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}b_{21}\\b_{22}\\b_{23}\\b_{24}\end{pmatrix},$$

试求线性方程组

$$\begin{cases}b_{11}y_1+b_{12}y_2+b_{13}y_3+b_{14}y_4=0,\\b_{21}y_1+b_{22}y_2+b_{23}y_3+b_{24}y_4=0\end{cases}\tag{2}$$

的通解.

9. 已知方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$$

有 3 个线性无关的解向量，求 a,b 的值及方程组的通解.

10. 设 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$. 问当 k 为何值时,存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵,并求出一个 P 及相应的对角矩阵 A.

11. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,方阵 B 满足 $AB+E=A^2+B$,求 B.

12. 已知将 3 阶可逆矩阵 A 的第 2 行的 2 倍加到第 3 行得矩阵 B,求 AB^{-1}.

13. 设有线性方程组(a,b 不全为 0)

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3=0,\\bx_1+ax_2+bx_3=0,\\bx_1+bx_2+ax_3=0.\end{cases}$$

(1) a,b 为何值时方程组有非零解;

(2) 写出相应的基础解系及通解;

(3) 求解空间的维数.

14. 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $X=PY$ 化成 $f=y_2^2+2y_3^2$,其中 $X=(x_1,x_2,x_3)'$,$Y=(y_1,y_2,y_3)'$,P 是 3 阶正交矩阵,求 a,b 及满足上述条件的一个 P.

15. 求直线 $L_1:\begin{cases}x+y-z-1=0,\\2x+y-z-2=0\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+2y-z-2=0,\\x+2y+2z+4=0\end{cases}$ 的公垂线方程.

16. 求直线 $L:\begin{cases}2x-y+z-1=0,\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi:x+2y-z=0$ 上投影的方程.

17. 设矩阵 A 与 B 相似,且

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}.$$

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求一个可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=B$.

18. 已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $3,2,-2$;$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{pmatrix}$ 分别是 A 的对应于特征值 3,2 的特征向量.

(1) 求 A 的属于特征值 -2 的一个特征向量;

(2) 求正交变换 $X=PY$,将二次型 $f=X'AX$ 化为标准形.

19. 已知二次型 $f=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2,求 c 及此二次型对应矩阵的特征值,指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 代表三维几何空间中何种几何图形.

20. 设有数列 $a_0=0,a_1=1,a_2=a_1+a_0,a_3=a_2+a_1,\cdots,a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\cdots$,求 a_{1000}.

四、证明题

1. 证明

$$D_n=\begin{vmatrix}6&9&&&&\\1&6&9&&&\\&1&6&9&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&1&6&9\\&&&&1&6\end{vmatrix}=(n+1)3^n \quad (n\text{ 为正整数}).$$

2. 设 A 为 2 阶方阵，证明：若存在大于等于 2 的自然数 m 使 $A^m=0$，则 $A^2=0$.

3. 设 A 是 n 阶幂等矩阵（$A^2=A$），试证

(1) A 的特征值只能是 1 或 0；

(2) $R(A)+R(A-E)=n$；

(3) A 可相似对角化；

(4) $R(A)=\mathrm{tr}(A)$.

4. 设 A,B 是 n 阶正定矩阵，证明：AB 的特征值全大于 0.

5. 设 A 为 n 阶方阵，试证：

(1) 若 $A^{k+1}\alpha=0$ 且 $A^k\alpha\neq0$，则 $A^k\alpha,A^{k-1}\alpha,\cdots,A\alpha,\alpha$ 线性无关；

(2) $A^{n+1}X=0$ 的解一定是 $A^nX=0$ 的解；

(3) $R(A^{n+1})=R(A^n)$.

6. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant2)$ 线性无关，试证：向量组 $\beta_1=\alpha_1+k_1\alpha_m,\beta_2=\alpha_2+k_2\alpha_m,\cdots,\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+k_{m-1}\alpha_m,\beta_m=\alpha_m$ 线性无关.

7. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，m 为奇数，试证：$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+\alpha_m,\beta_m=\alpha_m+\alpha_1$ 线性无关.

8. 设 n 阶矩阵 A 的 n 个列向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$n$ 阶矩阵 B 的 n 个列向量为 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$，$R(A)=n$. 问齐次线性方程组 $BX=0$ 是否有非零解，证明你的结论.

9. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 阶方阵 A 的分别属于不同特征值的特征向量，$\alpha=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$，试证：$\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$ 线性无关.

10. 已知 A,B 是两个 n 阶实对称矩阵，试证 A 与 B 相似的充要条件是 A,B 的特征多项式相等.

11. 设 A 是 n 阶实矩阵，证明：当 $k>0$ 时，$kE+A'A$ 正定.

12. 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，证明：$R(A'A)=R(AA')=R(A)$. 并举例说明 A 是复矩阵时，结论未必成立.

13. 若任意 n 维非零列向量都是 n 阶方阵 A 的特征向量，试证：A 一定是标量矩阵.

14. 设 A 是 n 阶正定矩阵，试证：存在正定矩阵 B 使 $A=B^2$.

15. 设 α 是 n 维非零实列向量，证明：$E-\dfrac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'$ 为正交矩阵.

16. 设方程组 $AX=0$ 的解都是 $BX=0$ 的解，且 $R(A)=R(B)$，试证：$AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

17. 设 A 是 n 阶方阵，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 是 n 维列向量，$B=\begin{pmatrix}A&\beta\\\beta'&0\end{pmatrix}$，若 $R(A)=R(B)$，

则 $AX=\beta$ 有解.

18. 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})'(i=1,2,\cdots,r,r<n)$ 是 r 个线性无关的 n 维实向量, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的实非零解向量.试证:$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性无关.

19. 设 A,B 是两个 n 阶正定矩阵,若 A 的特征向量都是 B 的特征向量,则 AB 正定.

20. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系,向量 β 不是 $AX=0$ 的解,试证向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.

综合练习 100 题

一、填空题

1. 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA'=E,|A|<0$，则 $|A+E|=\underline{0}$.

2. 若4阶行列式 D 的某一行的所有元素及其余子式都相等，则 $D=\underline{0}$.

3. 在一个 n 阶行列式中，如果等于零的元素多于 n^2-n 个，那么这个行列式 $D=\underline{0}$.

4. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，若 $m>n$，则 $|AB|=\underline{0}$.

5. 若 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=B$，$|A-E|\neq 0$，则 $B=\underline{\mathbf{0}}$.

6. 若 n 阶方阵 A,B 满足 $A+AB=E$，则 $A+BA=\underline{E}$.

7. 若 n 阶方阵 A,B,C 满足 $ABC=E$，则 $B'A'C'=\underline{E}$.

8. 若 A、B 都是 n 阶方阵，$|A|=1$、$|B|=-3$，则 $|3A^*B^{-1}|=\underline{-3^{n-1}}$.

9. 若 n 阶方阵 A 满足 $|A|=0$. $A^*\neq 0$，则秩 $(A)=\underline{n-1}$.

10. 设 A,B 是两个 n 阶方阵，$|A+B|=1,|A-B|=2$，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=\underline{2}$.

11. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

12. A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，$|A|=a$，$|B|=b$，则 $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & A \\ B & C \end{vmatrix}=\underline{(-1)^{mn}ab}$.

13. 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=\mathbf{0}$，其中 E 为单位矩阵，则 $(A-E)^{-1}=\underline{\frac{1}{2}(A+2E)}$.

14. 设 A 为3阶方阵，其特征值为 $3,-1,2$，则 $|A^2+E|=\underline{100}$.

15. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，

则 $R(A)=\underline{\begin{cases} 4, & \text{当}a=-4\text{时}, \\ 5, & \text{当}a\neq -4\text{时}. \end{cases}}$

16．已知n阶方阵A的各行元素之和都等于0，且$R(A)=n-1$，则$AX=\mathbf{0}$的通解为$\underline{k(1,1,\cdots,1)'，k为任意常数}$.

17．矩阵$A_{m\times n}$满足$m<n$，$|AA'|\neq 0$，则$AX=\mathbf{0}$的基础解系一定由$\underline{n-m}$个线性无关的解向量构成.

18．若矩阵A满足$A^3=A$，则A的特征值只能是$\underline{0}$或$\underline{1}$或$\underline{-1}$.

19．如果$\xi=(1,1,-1)'$是方阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量，则$a=\underline{-3}$；$b=\underline{0}$.

20．已知A与B相似，且$B=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}$，则$|\lambda A^2-A|=\underline{3(\lambda-1)(3\lambda-1)}$.

21．已知$A_{3\times3}$的特征值为1,2,3，则$|A^{-1}+A^{*}|=\underline{\dfrac{7^3}{6}}$.

22．已知2是A的一个特征值，则$|A^2+A-6E|=\underline{0}$.

23．设α,β是n维列向量，$\beta'\alpha=0$，则$\alpha\beta'$的特征值为$\underline{0(n重)}$.

24．若n阶方阵A的行向量组线性相关，则$\underline{0}$一定是A的一个特征值.

25．直线$\begin{cases}10x+2y-2x=27\\x+y-z=0\end{cases}$的单位方向向量为$\underline{\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)}$.

26．已知$D=\begin{vmatrix}2&7&6&8\\4&4&4&4\\2&4&7&9\\8&1&8&8\end{vmatrix}$，$A_{41},A_{42},A_{43},A_{44}$为$D$中第4行元素的代数余子式，则$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\underline{0}$.

27．设A是3阶方阵，X是3维列向量，使得X,AX,A^2X线性无关，且$A^3X=3AX-2A^2X$，记$P=(X,AX,A^2X)$，则$P^{-1}AP=\underline{\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}}$.

28．若两个非零几何向量a,b满足$|a+b|=|a-b|$，则a与b是夹角$\theta=\underline{\dfrac{\pi}{2}}$.

29. 直线 $L:\begin{cases}x+2y-z-6=0\\2x-y+z-1=0\end{cases}$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{8}{5}-t,\\y=\dfrac{11}{5}+3t,\\z=5t.\end{cases}$

30. 圆 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0\\2x+2y+z+1=0\end{cases}$ 的半径 $R=\underline{3}$.

二、选择题

1. 设 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的系数矩阵 A 的秩为 r，则 $AX=0$ 有非零解的充要条件是（C）.

（A）$r=n$；（B）A 的行向量组线性无关；

（C）A 的列向量组线性相关；（D）A 的列向量组线性无关.

2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$AX=0$ 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是（C）.

（A）若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=\beta$ 有唯一解；

（B）若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=\beta$ 有无穷多解；

（C）若 $AX=\beta$ 有无穷多解，则 $AX=0$ 有非零解；

（D）$AX=\beta$ 的任两解之和还是 $AX=\beta$ 的解.

3. 设非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的系数行列式为零，则（C）.

（A）方程组有无穷多解；（B）方程组无解；

（C）若方程组有解，则有无穷多解；（D）方程组有唯一解.

4. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，对于线性方程组 $AX=\beta$，下列结论正确的是（A）.

（A）若 A 的秩等于 m，则方程组有解；

（B）若 A 的秩小于 n，则方程组有无穷多解；

（C）若 A 的秩等于 n，则方程组有唯一解；

（D）若 $m>n$，则方程组无解.

5. 设5阶方阵 A 的秩是3，则其伴随矩阵 A^* 的秩为（C）.

（A）3；（B）4；（C）0；（D）2.

6. 设 A 是 n 阶方阵，$n>2, A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则下列结论正确的是（B）.

(A) $AA^* = |A|$;　　(B) 若$|A| \neq 0$，则$|A^*| \neq 0$;

(C) $A^* = \frac{1}{|A|}A^*$;　　(D) 秩(A)=秩(A^*).

7. 设A,B是n阶方阵，A非零，且$AB=0$，则必有（D）.

(A) $B=0$;　(B) $BA=0$;　(C) $(A+B)^2 = A^2+B^2$;　(D) $|B|=0$.

8. 设有两个平面方程 $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$,

$$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2y+d_2=0,$$

如果 秩$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$，则一定有（D）

(A) π_1与π_2平行;　　(B) π_1与π_2垂直;

(C) π_1与π_2重合;　　(D) π_1与π_2相交.

9. 设A为n阶可逆矩阵，λ是A的一个特征根，则A的伴随阵A^*的特征根之一是（D）.

(A) λ^{n-1};　(B) $\lambda|A|$;　(C) λ;　(D) $\lambda^{-1}|A|$.

10. n阶方阵A有n个不同的特征值是A与对角阵相似的（B）.

(A) 充分必要条件;　(B) 充分而非必要条件;

(C) 必要而非充分条件;　(D) 既非充分条件也非必要条件.

11. 已知n阶方阵A与某对角阵相似，则（C）.

(A) A有n个不同的特征值;　(B) A一定是n阶实对称阵;

(C) A有n个线性无关的特征向量;　(D) A的属于不同特征值的特征向量正交.

12. 下列说法正确的是（D）.

(A)若有全不为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关;

(B) 若有一组不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m \neq 0$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关;

(C) 若存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关;

(D) 任意4个3维几何向量一定线性相关.

13. 设A,B是n阶方阵，满足：对任意$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$都有$X'AX=X'BX$，下列结论中正确的是（D）.

(A) 若秩(A)=秩(B)，则$A=B$;　(B) 若$A'=A$，则$B'=B$;

(C) 若 $B' = B$，则 $A = B$；　　(D) 若 $A' = A, B' = B$，则 $A = B$.

14. 设 A, B 均为 n 阶正定矩阵，则必有（B）.

(A) AB 正定；　(B) $A^2 + B$ 正定；　(C) $A - B$ 正定；　(D) kA 正定.

15. 设 A 是 n 阶方阵，$A^2 = E$，则（C）.

(A) A 为正定矩阵；(B) A 为正交矩阵；(C) $(A^*)^2 = E$；(D) $\mathrm{tr}(A) = n^2$.

16. 设 A, B 是 n 阶方阵，下列结论中错误的是（D）.

(A) 若 A, B 都可逆，则 $A'B$ 也可逆；

(B) 若 A, B 都是实对称正定矩阵，则 $A + B^{-1}$ 也是实对称正定矩阵；

(C) 若 A, B 都是正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵；

(D) 若 A, B 都是实对称矩阵，则 AB 是实对称矩阵.

17. 设 A, B 是 n 阶方阵，下列结论中错误的是（B）.

(A) 若 A 经列的初等变换化成 B，则秩(A) = 秩(B)；

(B) 若 A 经行的初等变换化成 B，则 $A^{-1} = B^{-1}$；

(C) 若 A 经行的初等变换化成 B，则 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解；

(D) 若 A 经列的初等变换化成 B，则 A 的列向量组与 B 的列向量组等价.

18. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}$

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则必有（C）.

(A) $AP_1P_2 = B$；(B) $AP_2P_1 = B$；(C) $P_1P_2A = B$；(D) $P_2P_1A = B$.

19. 若 A 与 B 相似，则（B）.

(A) $\lambda E - A = \lambda E - B$；(B) $|\lambda E + A| = |\lambda E + B|$；(C) $A^* = B^*$；(D) $A^{-1} = B^{-1}$.

20. 若 $A^2 = E$，则（D）.

(A) $A + E$ 可逆；　　(B) $A - E$ 可逆；

(C) $A + E = 0$ 或 $A - E = 0$；　(D) $A \neq E$ 时，$A + E$ 不可逆.

21. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A 与 B（A）.

（A）合同且相似；　　（B）合同但不相似；

（C）不合同但相似；　　（D）不合同且不相似.

22．实二次型 $f = X'AX$ 为正定二次型的充要条件是（C）.

（A）f 的负惯性指数是0；　　（B）存在正交阵 P 使 $A = P'P$；

（C）存在可逆阵 T 使 $A = T'T$；　　（D）存在矩阵 B 使 $A = B'B$.

23．设 B 是 $m \times n$ 实矩阵，$A = B'B$，则下列结论中错误的是（D）.

（A）线性方程组 $BX = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow A$ 正定；（B）$R(A) = R(B)$；

（C）A 的特征值大于等于0；　　（D）$R(B) = m \Leftrightarrow A$ 正定.

24．设 A 是 n 阶方阵，$|A| = a \neq 0$，则 $|A^* A^{-1}|$ 等于（C）.

（A）a；　　（B）$\dfrac{1}{a}$；　　（C）a^{n-2}；　　（D）a^n.

25．设 A, B 是 n 阶方阵，则必有（D）.

（A）$|A + B^{-1}| = |A| + |B|^{-1}$；　　（B）$|A + B|^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$；

（C）$(AB)^2 = A^2 B^2$；　　（D）$|A'B| = |BA|$.

26．已知 η_1, η_2 是非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的两个不同的解，ξ_1, ξ_2 是对应的齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系，k_1, k_2 为任意常数，则方程组 $AX = \beta$ 的通解为（B）.

（A）$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dfrac{\eta_1 - \eta_2}{2}$；　　（B）$k_1\xi_1 + k_2(\xi_1 + \xi_2) + \dfrac{\eta_1 + \eta_2}{2}$；

（C）$k_1\xi_1 + k_2(\eta_1 - \eta_2) + \eta_1$；　　（D）$k_1\xi_1 + k_2(\eta_1 - \eta_2) + (\eta_1 + \eta_2)$.

27．设有直线 $L_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2: \begin{cases} x - y = 6 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$，则 L_1 与 L_2 的夹角为（C）.

（A）$\dfrac{\pi}{6}$；　　（B）$\dfrac{\pi}{4}$；　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$；　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$.

28．若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 都是4维列向量，且4阶行列式 $|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_1| = m$，$|\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \alpha_3| = n$，则4阶行列式 $|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_1 + \beta_2|$ 等于（D）.

（A）$m + n$；　　（B）$-(m+n)$；　　（C）$m - n$；　　（D）$n - m$.

29．设 n 阶矩阵 A 非奇异 $(n > 2)$，则（C）.

（A）$(A^*)^* = |A|^{n-1} A$；　　（B）$(A^*)^* = |A|^{n+1} A$；

（C）$(A^*)^* = |A|^{n-2} A$；　　（D）$(A^*)^* = |A|^{n+2} A$.

30．设矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 的秩是3，则直线 $\dfrac{x - a_3}{a_1 - a_2} = \dfrac{y - b_3}{b_1 - b_2} = \dfrac{z - c_3}{c_1 - c_2}$ 与直线

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$$ （A）.

（A）相交于一点；（B）重合；（C）平行但不重合；（D）异面.

三、计算题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$，求 A^5 及 $|A^{10}|$.

解：由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&-1&1\\-1&\lambda+1&1&-1\\-1&1&\lambda+1&-1\\1&-1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3(\lambda+4)$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,\lambda_4=-4$.

对 $\lambda=0$，由 $(\lambda_1 E-A)x=0$，可解得三个线性无关的特征向量，

$\xi_1=(1,1,0,0)'$，$\xi_2=(1,0,1,0)'$，$\xi_3=(1,0,0,-1)'$.

对 $\lambda=-4$，由 $(-4E-A)x=0$，可解得特征向量 $\xi_4=(1,-1,-1,1)'$，

令 $T=(T_1\ T_2\ T_3\ T_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$，$D\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&-4\end{pmatrix}$，由 $AT=TD$

得 $A=TDT^{-1}$ $\quad T^{-1}=\frac{1}{|T|}T^*=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\1&-1&-1&-3\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$

故 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\1&-1&-1&-3\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot(\frac{1}{4})$

$=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$

$$A^5=TD^5T^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&-4^5\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\1&-1&-1&-3\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=2^8\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}=2^8A.$$

又 $A^{10}=2^{16}A$，$|A^{10}|=|2^{16}A|=2^{64}|A|=0$.

2．设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\a&0&c\\b&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，

（1）a,b,c 满足什么条件时，A 的秩是3；

（2）a,b,c 取何值时，A 是对称矩阵；

（3）取一组 a,b,c，使 A 为正交阵.

解:（1）$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\a&0&c\\b&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a&0&c\\0&1&0\\2b&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a-2bc&0&0\\0&1&0\\2b&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a-2bc&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

当 $a\neq 2bc$ 时，A 的秩是3.

（2）$A'=\begin{pmatrix}0&a&b\\1&0&0\\0&c&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，要想 A 成为对称矩阵，应满足 $A=A'$，即 $a=1,b=c=0$.

（3）要想 A 为正交阵，应满足 $A'A=E$，即 $\begin{pmatrix}0&a&b\\1&0&0\\0&c&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\a&0&c\\b&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} a^2+b^2=1, \\ ac+\dfrac{1}{2}b=0, \\ c^2+\dfrac{1}{2}=1, \end{cases} \quad \text{解得} \quad a=\frac{1}{2}, b=-\frac{\sqrt{3}}{2}, c=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3．设有三维列向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$$

问 λ 取何值时，

（1）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表达式唯一；

（2）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表达式不唯一；

（3）β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

解法 1： 设 $A=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{pmatrix}$，$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{array}\right)$

由 $B=\left(\begin{array}{ccc|c}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{array}\right)\xrightarrow{行}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -\lambda & -\lambda(\lambda+2) & -\lambda^2(\lambda+1)\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{array}\right)$

$\xrightarrow{行}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & -\lambda^2-3\lambda & \lambda(1-2\lambda-\lambda^2)\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{array}\right)\xrightarrow{行}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+3) & \lambda(1-2\lambda-\lambda^2)\end{array}\right)$

（1）当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，$R(A)=R(B)=3$，此时 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表达式唯一.

（2）当 $\lambda=0$ 时，$R(A)=R(B)=1<3$，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表达式不唯一.

（3）当 $\lambda=-3$ 时，$R(A)\neq R(B)$，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

解法 2：

$$|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3)$$

① 当$\lambda \ne 0$且$\lambda \ne -3$时，$|A| \ne 0$，β可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，且表达式唯一，

② 当$\lambda = 0$时，$R(A) = R(B) = 1 < 3$，β可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示，且表达式不唯一，

③ 当$\lambda = -3$时，$R(A) \ne R(B)$，β不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.

4. 设3阶矩阵A的特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$，对应的特征向量依次为，

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}，\text{又}\ \beta = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3，$$

求$A^n\beta$(n为正整数).

解：由于 $\beta = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

又由于 $A^n\xi_1 = \lambda_1^n\xi_1 = \xi_1$，$A^n\xi_2 = \lambda_2^n\xi_2 = 2^n\xi_2$，$A^n\xi_3 = \lambda_3^n\xi_3 = 3^n\xi_3$.

所以

$$\begin{aligned} A^n\beta &= A^n(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (A^n\xi_1, A^n\xi_2, A^n\xi_3)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (\xi_1, 2^n\xi_2, 3^n\xi_3)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} & 3^{n+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 2^{n+1} + 3^n \\ 2 - 2^{n+2} + 3^{n+1} \\ 2 - 2^{n+3} + 3^{n+2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. 设$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$，

(1) 求A的特征值；(2) 求$E + A^{-1}$的特征值.

解：(1) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda+1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 5) = 0$

得A的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -5$.

（2）由 A 是对称阵，A 的特征值是$1,1,-5$，存在可逆阵 T 使 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-5\end{pmatrix}$

于是 $$T^{-1}A^{-1}T=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-\frac{1}{5}\end{pmatrix},\quad T^{-1}(E+A^{-1})T=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&\frac{4}{5}\end{pmatrix},$$

故 $E+A^{-1}$ 的特征值为 $2,2,\frac{4}{5}$.

6．已知 $\alpha=(1,k,1)'$ 是 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆阵 A^{-1} 的特征向量，试求常数 k 的值.

解：设 α 为 A 的特征值为 λ 的特征向量，则 $A\alpha=\lambda\alpha$.

即 $$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}.$$

即 $$\begin{cases}k+3=\lambda\\2k+2=\lambda k\end{cases}$$

解得 $k^2+k-2=0$，即 $k=1$ 或 -2.

7．设 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $AX=\beta$ 有无穷多解，试求：

（1）a 的值；（2）正交阵 P，使 $P'AP$ 为对角阵.

解：（1）$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&1-a&1-a^2&-2-a\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(1-a)(2+a)&-2-a\end{array}\right)$$

要使 $AX=\beta$ 有无穷多解，必须 $R(A)=R(B)<3$，因此 $a=-2$.

（2）此时 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 2\\ -1 & \lambda+2 & -1\\ 2 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)=0,$$

得 A 的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$.

对于 $\lambda_1=0$，由 $\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\xi_1=\mathbf{0}$，得特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda_2=3$，由 $\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\xi_2=\mathbf{0}$，得特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，单位化得

$$\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix};$$

对于 $\lambda_3=-4$，由 $\begin{pmatrix}-4 & -1 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -4\end{pmatrix}\xi_3=\mathbf{0}$，得特征向量 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，单位化得

$$\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix};$$

$$令\ \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}，此时\ \boldsymbol{P}\ 为正交阵，并且\ \boldsymbol{P'AP}\ 为对角阵\begin{pmatrix}0 & & \\ & 3 & \\ & & -3\end{pmatrix}.$$

8. 已知线性方程组（I）$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=0\end{cases}$ 的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{12}\\ b_{13}\\ b_{14}\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}b_{21}\\ b_{22}\\ b_{23}\\ b_{24}\end{pmatrix}.$$

试求线性方程组.（II）$\begin{cases}b_{11}y_1+b_{12}y_2+b_{13}y_3+b_{14}y_4=0\\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+b_{23}y_3+b_{24}y_4=0\end{cases}$ 的通解.

解：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24}\end{pmatrix}$

由 ξ_1,ξ_2 为（I）的一个基础解系得 $\boldsymbol{AB'}=\boldsymbol{0}$.

由 ξ_1,ξ_2 线性无关，所以 $R(\boldsymbol{B})=2$，又 $\boldsymbol{BA'}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{\eta}_1=(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14})',\boldsymbol{\eta}_2=(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24})'$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的基础解系，通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2,k_1,k_2$ 为任意常数.

9. 已知方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$$

有三个线性无关的解向量，求 a,b 的值及方程组的通解.

解：$$(A\mid\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1\\ a & 1 & 3 & b & 1\end{array}\right)\xrightarrow{行}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & 1-a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{行}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 4-2a & b+4a-5 & a-2\end{array}\right)$$

由于该非齐次线性方程组有三个线性无关的解向量，故

$$R(A)=R(A\mid\beta),\ n-R(A)+1=3.$$

其中 $n=4$．于是

$$R(A)=R(A\,|\,\beta)=2.$$

从而 $a=2,\ b=-3$．该方程组与方程组

$$\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4+2\\ x_2=x_3-5x_4-3\end{cases}$$

同解．令 $x_3=k_1,\ x_4=k_2$ 得该方程组的通解

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k_1+4k_2+2\\k_1-5k_2-3\\k_1\\k_2\end{pmatrix}$$

$$=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$$

其中 k_1,k_2 为任意常数．

10．设 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$，问当 k 为何值时，存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，并求出一个 P 及相应的对角阵 Λ．

解：A 的特征方程为：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\k&\lambda+1&-k\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&2\\0&\lambda+1&-k\\\lambda-1&-2&\lambda+3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-2&2\\0&\lambda+1&-k\\1&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)^2=0.$$

解得特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-1$．

当 $\lambda=1$ 时，$R(E-A)=2,A$ 有1个线性无关的特征向量．

当 $\lambda=-1$ 时，$-1E-A=\begin{pmatrix}-4&-2&2\\k&0&-k\\-4&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&1\\k&0&-k\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&\frac{k}{2}&-\frac{k}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$

因存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵，所以 $R(-1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，从而 $k=0$。

因此
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\0&-1&0\\4&2&-3\end{pmatrix},$$

对应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 ξ_1，由 $\begin{pmatrix}-2&-2&2\\0&2&0\\-4&-2&4\end{pmatrix}\xi_1=\boldsymbol{0}$ 得 $\xi_1=(1,0,1)'$

对应于 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的特征向量为 ξ_2,ξ_3，由 $\begin{pmatrix}-4&-2&2\\0&0&0\\-4&-2&2\end{pmatrix}\xi=\boldsymbol{0}$，

得
$$\xi_2=(1,-2,0)',\xi_3=(0,1,1)'$$

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{P}$ 为可逆阵，相应的对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$.

11．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{B}$.

解：由 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$ 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$

由于 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，

得
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix},$$

12．已知将3阶可逆阵 $\boldsymbol{A}$ 的第2行的2倍加到第3行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{AB}^{-1}$.

解：令 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 均可逆，故 $\boldsymbol{B}$ 可逆，

所以
$$\boldsymbol{AB}^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}.$$

13．设有线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 = 0 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 = 0 \\ bx_1 + bx_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \quad (a,b\text{不全为}0)$$

（1）a,b 为何值时方程组有非零解；

（2）写出相应的基础解系及通解；

（3）求解空间的维数.

解：（1）齐次方程组有非零解的充要条件是系数行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = 0$

即
$$(a-b)^2(a+2b)=0$$

故 $a=b\neq 0$，或 $a=-2b\neq 0$ 时，方程组有非零解.

（2）当 $a=b\neq 0$ 时，方程组为

$$x_1+x_2+x_3=0\text{，即 } x_1=-x_2-x_3.$$

其基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，通解为 $k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, k_1,k_2 为任意常数.

当 $a=-2b\neq 0$ 时，方程组为 $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$，解得基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

通解为 $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, k 为任意常数.

（3）当 $a=b\neq 0$ 时，解空间维数为 2；当 $a=-2b\neq 0$ 时，解空间维数为 1.

14. 设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $X=PY$ 化成 $f=y_2^2+2y_3^2$，其中 $X=(x_1,x_2,x_3)', Y=(y_1,y_2,y_3)'$, P 是3阶正交矩阵，求 a,b 及满足上述条件的一个 P.

解：正交变换前后，二次型的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

故二次型可以写成 $f=X'AX$ 和 $f=Y'BY$，且 $B=P'AP=P^{-1}AP$.

由 A,B 相似知 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，即 $\lambda^3-3\lambda^2+(2-a^2-b^2)\lambda+(a-b)^2$
$=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda$，

比较系数得：$a=0,b=0$.

由 $P^{-1}AP=B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，知 A 的特征值是 $0,1,2$.

解方程组 $(0E-A)x=0$，得 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，单位化得 $P_1=\dfrac{\xi_1}{|\xi_1|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

解方程组 $(E-A)x=0$，得 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$P_2=\xi_2$，

解方程组 $(2E-A)x=0$，得 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $P_3=\dfrac{\xi_3}{|\xi_3|}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

故 $P=(P_1\ P_2\ P_3)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

15．求直线 $L_1:\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x+y-z-2=0\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+2y-z-2=0\\x+2y+2z+4=0\end{cases}$ 的公垂线方程.

解：L_1 与 L_2 的标准式及参数形式分别为：

$$L_1:\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1} 与 \begin{cases}x=1,\\y=t,\\z=t;\end{cases}$$

$$L_2:\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{0} 与 \begin{cases}x=2\lambda,\\y=-\lambda,\\z=-2.\end{cases}$$

L_1的方向向量为$s_1=(0,1,1)$，L_2的方向向量为$s_2=(2,-1,0)$.

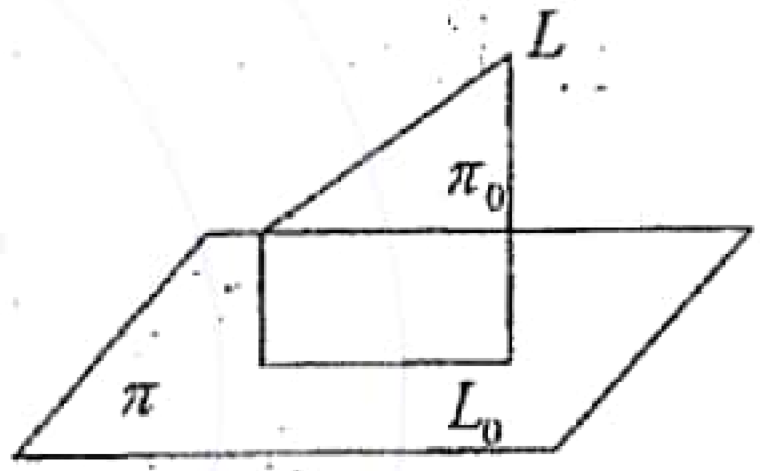
设L_1与L_2公垂线垂足为$A(1,t,t)$,$B(2\lambda,-\lambda,-2)$，则应有$\overrightarrow{AB}=(2\lambda-1,\ -\lambda-t,\ -2-t)$，且$\overrightarrow{AB}\cdot s_1=-\lambda-2t-2=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot s_2=5\lambda+t-2=0$.

解得$\begin{cases} t=-\dfrac{4}{3}, \\ \lambda=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$ 所以$\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\{1,2,-2\}$，

故公垂线方程为
$$\frac{z-1}{1}=\frac{y+\frac{4}{3}}{2}=\frac{z+\frac{4}{3}}{-2}.$$

16．求直线$L:\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$在平面$\pi:x+2y-z=0$上投影的方程.

解：A点坐标为$(1,-\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3})$.



设通过直线L垂直于平面π的平面π_0的方程为

$$2x-y+z-1+\lambda(x+y-z+1)=0.$$

π_0的法向量为$n_1=(2+\lambda,-1+\lambda,1-\lambda)$. 平面$\pi$的法向量为$n=(1,2,-1)$. 由$\pi_0\perp\pi$，知$n_1\cdot n=0$，得

$$2+\lambda+2(-1+\lambda)-(1-\lambda)=0$$

解得$\lambda=\dfrac{1}{4}$.

从而得π_0方程为$3x-y+z-1=0$.

所以所求直线L_0方程为$\begin{cases} 3x-y+z-1=0, \\ x+2y-z=0. \end{cases}$

17．设矩阵A与B相似，且$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

（1）求a,b的值；

（2）求一个可逆阵P，使$P^{-1}AP=B$.

解：（1）因为A与B相似，所以有$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda-4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda-a \end{vmatrix}=\lambda^3-(5+a)\lambda^2+(5a+3)\lambda+6-6a$$

$$|\lambda E-B|=(\lambda-2)^2(\lambda-b)=\lambda^3-(b+4)\lambda^2+(4b+4)\lambda-4b$$

比较两式系数可得：$\begin{cases}5a+3=4b+4\\6-6a=-4b\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=5\\b=6\end{cases}$.

（2）因 A 与 $B=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$ 相似，所以 A 的特征值为 $2,2,6$.

$2E-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&-3\end{pmatrix}$. 解 $(2E-A)X=0$ 得 A 的对应于特征值 2 的特征向量

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$6E-A=\begin{pmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}$. 解 $(6E-A)X=0$ 得 A 的对应于特征值 6 的特征向量

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}.$$

令 $P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=B$.

18. 已知3阶实对称阵 A 的特征值为 $3,2,-2$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{pmatrix}$ 分别是 A 的对应于特征值 $3,2$ 的特征向量，

（1）求 A 的属于特征值 -2 的一个特征向量；

（2）求正交变换 $X=PY$ 将二次型 $f=X'AX$ 化为标准形.

解：（1）设 -2 对应的特征向量为 X，则有 $(\xi_1,X)=0$, $(\xi_2,X)=0$,

可取
$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

（2）把特征向量规范正交化后得：

$$P_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

令
$$P=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},$$
则在正交变换 $X=PY$ 下 f 化为 $f=3y_1^2+2y_2^2-2y_3^2$.

19. 已知二次型 $f=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，求 c 及此二次型对应矩阵的特征值，指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 代表三维几何空间中何种几何曲面.

解：二次型 f 所对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}$,

因 f 的秩为 2，即 A 的秩为 2，故有 $|A|=0$，所以 $c=3$.

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0$，得特征值为 0,4,9. 与特征值相对应的单位特征向量分别为

$$P_1=(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})',\ P_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)',\ P_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})',$$

取正交变换阵

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

则在正交线性变换 $X=PY$ 下，方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 化为椭圆柱面 $4y_2^2+9y_3^2=1$.

20. 设有数列 $a_0=0,a_1=1,a_2=a_0+a_1,a_3=a_2+a_1,\cdots,a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\cdots$，求 a_{1000}.

解法 1：

由 $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix} a_{1000} \\ a_{999} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{999} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$.

记 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 得 A 的特征值为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$，并且

$\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$，$\xi_2 \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ 分别是 A 的对应于特征值 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 的特征向量.

记 $T = (\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，于是 $T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

则 $A = T \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} T^{-1}$

$$A^{999} = T \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^{999} T^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{1000} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{1000}] & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{1000} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{10} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{1000} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{999} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{999}] & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{999} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{10} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{999} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$$

所以 $a_{1000} = \frac{\sqrt{5}}{5}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{1000} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{1000})$.

解法 2:

设 $$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ & & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

将D_n按第一行展开可得

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n \tag{1}$$

由α,β的对称性可得

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n \tag{2}$$

若$\alpha\neq\beta$，(1)、(2) 联立解之

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} \tag{3}$$

若$\alpha=\beta$，由 (1)

$$D_n=\alpha D_{n-1}+\alpha^n=(n+1)\alpha^n \tag{4}$$

考察

令

$$\tilde{D}_n=\begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ & 1 & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 & -1 \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

补充定义$\tilde{D}_{-1}=0$，$\tilde{D}_0=1$，则

$$\tilde{D}_n=\tilde{D}_{n-1}+\tilde{D}_{n-2},\ n=1,2,\cdots$$

于是$a_n=\tilde{D}_{n-1}$

解：$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=-1\end{cases}$，得 $\alpha_0=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta_0=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，由 (3) 知

$$a_{1000}=\tilde{D}_{999}=\begin{vmatrix} \alpha_0+\beta_0 & \alpha_0\beta_0 & & & & \\ 1 & \alpha_0+\beta_0 & \alpha_0\beta_0 & & & \\ & 1 & \alpha_0+\beta_0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \alpha_0+\beta_0 & \alpha_0\beta_0 \\ & & & & 1 & \alpha_0+\beta_0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\alpha_0^{1000}-\beta_0^{1000}}{\alpha_0-\beta_0}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1000}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1000}\right].$$

四、证明题

1．证明 $D_n=\begin{vmatrix}6&9&&&&\\1&6&9&&&\\&1&6&9&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&1&6&9\\&&&&1&6\end{vmatrix}=(n+1)3^n$，（$n$ 为正整数）.

证：1° $n=1$ 时，$D_1=6=(1+1)\cdot 3$

2° 假设当 $n\le k$ 时结论成立，当 $n=k+1$ 时，若 $k+1=2$，由 $D_2=\begin{vmatrix}6&9\\1&6\end{vmatrix}=36-9=27=(2+1)\cdot 3^2$ 知命题成立.

若 $k+1\ge 3$，将 D_{k+1} 按第一行展开得

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix}6&9&&&&\\1&6&9&&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&1&6&9\\&&&&1&6\end{vmatrix}=6D_k-9D_{k-1}=6(k+1)3^k-9\cdot k\cdot 3^{k-1}$$

$$=(k+2)\cdot 3^{k+1}$$

由数学归纳法，对一切自然数 n 结论都成立.

2．设 A 为2阶方阵，证明：若存在大于等于2的自然数 m 使 $A^m=0$，则 $A^2=0$.

证：因 $A^m=0$，所以 $|A|^m=|A^m|=0$，又 A 为2阶方阵，故 $R(A)\le 1$.

所以 A 经初等变换可以化为 $\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，于是存在可逆阵 P,Q，使

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}(1\,0\cdots 0)Q,$$

取 $U=P\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$V'=(1\,0\cdots0)Q$，则 $A=UV'$。

令 $V'U=k$，则 $A^2=UV'UV'=kUV'=kA$. 由 $A^m=k^{m-1}A=0$ 知 $k=0$，或者 $A=0$，故 $A^2=kA=0$.

3．设 A 是幂等阵 $(A^2=A)$，试证

(1) A 的特征值只能是1或0，

(2) $R(A)+R(A-E_n)=n$，

(3) A 可相似对角化；

(4) $R(A)=\mathrm{tr}(A)$.

证：(1) 设 λ 是 A 的任一特征值，则存在 $X\neq0$ 使 $AX=\lambda X$. 于是

$$A^2X=\lambda^2X.$$

由 $A^2=A$ 知，$\lambda^2X=\lambda X$. 由 $X\neq0$ 得 $\lambda^2=\lambda$，故 $\lambda=1$ 或 0.

(2) 由 $A^2=A$ 知，$A(A-E)=0$，于是

$$R(A)+R(A-E)\leq n \tag{1}$$

由 $A+(E_n-A)=E_n$ 知

$$n=R(E_n)\leq R(A)+R(E_n-A)=R(A)+R(A-E) \tag{2}$$

综合 (1)，(2) 可得

$$R(A)+R(A-E_n)=n.$$

(3) 记 $R(A)=r_1$，$R(A-E_n)=r_2$.

当 $r_1=0$ 或 $r_2=0$ 时，$A=0$ 或 $A=E_n$，命题显然成立. 以下设 $r_1\neq0$，$r_2\neq0$，由 $r_1+r_2=n$ 知 $0<r_1<n$，$0<r_2<n$. 取 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r_1}$ 为 $AX=0$ 的基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r_2}$ 是 $(A-E_n)X=0$ 的基础解系，则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r_1}$ 是 A 的属于特征值0的线性无关的特征向量，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r_2}$ 是 A 的属于特征值1的线性无关的特征向量，故由 $(n-r_1)+(n-r_2)=n$ 知 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r_1}$，$\eta_1,\cdots,\eta_{n-r_2}$. 从而 A 可相似对角化.

(4) 由 (1)、(3) 可知存在可逆阵 T 使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}$$

于是 $R(A)=r=\mathrm{tr}(T^{-1}AT)=\mathrm{tr}(A)$.

4．设 A,B 是 n 阶正定矩阵，证明：AB 的特征值全大于0.

证：因 A,B 正定，则存在可逆阵 P_1、P_2，使

$$A=P_1'P_1 \quad B=P_2'P_2 \quad AB=P_1'P_1P_2'P_2$$
$$P_2(AB)P_2^{-1}=P_2P_1'P_1P_2'=(P_1P_2')'(P_1P_2')$$

因 P_1,P_2 可逆，则 P_1P_2' 可逆，从而 $(P_1P_2')'(P_1P_2')$ 正定，它的特征值全大于 0，

因 AB 与 $(P_1P_2')'(P_1'P_2')$ 相似，从而 AB 的特征值全大于 0.

5．设 A 为 n 阶方阵，试证：

（1）若 $A^{k+1}\alpha=0$ 且 $A^k\alpha\neq 0$，则 $A^k\alpha,A^{k-1}\alpha,\cdots,A\alpha,\alpha$ 线性无关；

（2）$A^{n+1}X=0$ 的解一定是 $A^nX=0$ 的解；

（3）$R(A^{n+1})=R(A^n)$.

证：（1）反证法

若 $A^k\alpha,A^{k+1}\alpha,\cdots,A\alpha,\alpha$ 线性相关，则存在不全为零的数 $l_0,l_1,\cdots,l_k$，使

$$l_0\alpha+l_1A\alpha+\cdots+l_kA^k\alpha=0,$$

设 l_i 是第一个不等于零的系数，即 $l_0=l_1=\cdots=l_{i-1}=0,l_i\neq 0$，

则
$$l_iA^i\alpha+l_{i+1}A^{i+1}\alpha+\cdots+l_kA^k\alpha=0,$$

两边乘以矩阵 A^{k-i}，得

$$l_iA^k\alpha+l_{i+1}A^{k+1}\alpha+\cdots+l_kA^{2k-i}\alpha=0,$$

由于 $A^{k+1}\alpha=0$，故对任意 $m\geq k+1$ 都有 $A^m\alpha=0$，从而由上式得

$$l_iA^k\alpha=0，但 A^k\alpha\neq 0,$$

故 $l_i=0$ 与假设矛盾.

（2）证明：假设 α 是 $A^{n+1}X=0$ 的解，但不是 $A^nX=0$ 的解，

即有
$$A^{n+1}\alpha=0 \quad 但 A^n\alpha\neq 0.$$

由（1）知 $A^n\alpha,A^{n-1}\alpha,\cdots,A\alpha,\alpha$ 线性无关，与 $n+1$ 个 n 维向量 $A^n\alpha,A^{n-1}\alpha,\cdots,A\alpha,\alpha$ 线性相关矛盾，故 α 是 $A^nX=0$ 的解.

（3）由（2）知 $A^{n+1}X=0$ 的解一定是 $A^nX=0$ 的解，且易知 $A^nX=0$ 的解一定是 $A^{n+1}X=0$ 的解，所以方程 $A^{n+1}X=0$ 与 $A^nX=0$ 同解，所以 $R(A^{n+1})=R(A^n)$.

6．已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geq 2)$ 线性无关，试证：向量组 $\beta_1=\alpha_1+k_1\alpha_m,\beta_2=\alpha_2+k_2\alpha_m,\cdots,\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+k_{m-1}\alpha_m,\beta_m=\alpha_m$ 线性无关.

证：假设有一组数 $l_1,l_2,\cdots,l_{m-1},l_m$ 使得

$$l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_{m-1}\beta_{m-1}+l_m\beta_m=0.$$

则有

$$l_1(\alpha+k_1\alpha_m)+l_2(\alpha_2+k_2\alpha_m)+\cdots+l_{m-1}(\alpha_{m-1}+k_{m-1}\alpha_m)+l_m\alpha_m=0,$$

即有

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{m-1}\alpha_{m-1}+(l_1k_1+l_2k_2+\cdots+l_{m-1}k_{m-1}+l_m)\alpha_m=0$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，所以

$$l_1=l_2=\cdots=l_{m-1}=l_1k_1+l_2k_2+\cdots+l_{m-1}k_{m-1}+l_m=0,$$

所以

$$l_1=l_2=\cdots=l_{m-1}=l_m=0.$$

故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关.

7. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，m 为奇数，试证：$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+\alpha_m,\beta_m=\alpha_m+\alpha_1$ 线性无关.

证：假设存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_{m-1}\beta_{m-1}+k_m\beta_m=0,$$

则有

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+k_{m-1}(\alpha_{m-1}+\alpha_m)+k_m(\alpha_m+\alpha_1)=0,$$

即

$$(k_1+k_m)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots+(k_{m-1}+k_m)\alpha_m=0$$

又由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，所以

$$k_1+k_m=k_1+k_2=\cdots=k_{m-1}+k_m=0,$$

因为 m 是奇数，所以线性方程组（1）的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&1\\1&1&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{m+1}=2\neq0,$$

$$\begin{cases}k_1+k_m=0\\k_1+k_2=0\\\quad\cdots\cdots\\k_{m-1}+k_m=0\end{cases}\tag{1}$$

故（1）只有零解，所以 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关.

8．设 n 阶矩阵 A 的 n 个列向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$n$ 阶矩阵 B 的 n 个列向量为 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$，$R(A)=n$．问齐次线性方程组 $BX=0$ 是否有非零解，证明你的结论.

证：当 n 为奇数时，齐次线性方程组 $BX=0$，没有非零解.

当 n 为偶数时，$BX=0$ 有非零解.

由于 $R(A)=n$，所以 n 阶矩阵 A 的 n 个列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，

由上题知，当 n 为奇数时，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$ 也线性无关，所以 $R(B)=n$，因此齐次线性方程组 $BX=0$ 没有非零解，

但当 n 为偶数时，因 $(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+(\alpha_{n-1}+\alpha_n)-(\alpha_n+\alpha_1)=0$，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$ 线性相关，所以 $R(B)<n$.

因此，齐次线性方程组 $BX=0$ 有非零解.

9．设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 阶方阵 A 的分别属于不同特征值的特征向量，$\alpha=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$．试证：$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$ 线性无关.

证：设 A 的 n 个互不相同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，对应的特征向量依次为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，则 $A\alpha=A(\xi_1+\cdots+\xi_n)=A\xi_1+\cdots+A\xi_n=\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_n\xi_n,\cdots$，$A^{n-1}\alpha=\lambda_1^{n-1}\xi_1+\cdots+\lambda_n^{n-1}\xi_n$.

设有一组数 $k_0,k_1,\cdots,k_{n-1}$，使得

$$k_0\alpha+k_1A\alpha+\cdots+k_{n-1}A^{n-1}\alpha=0$$

即

$$k_0(\xi_1+\cdots+\xi_n)+k_1(\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_n\xi_n)+\cdots+k_{n-1}(\lambda_1^{n-1}\xi_1+\cdots+\lambda^{n-1}\xi_n)=0.$$

可得

$$(k_0+k_1\lambda_1+\cdots+k_{n-1}\lambda_1^{n-1})\xi_1+(k_0+k_1\lambda_2+\cdots+k_{n-1}\lambda_2^{n-1})\xi_2+\cdots+(k_0+k_1\lambda_n+\cdots+k_{n-1}\lambda_n^{n-1})\xi_n=0.$$

由于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关，所以

$$\begin{cases}k_0+k_1\lambda_1+\cdots+k_{n-1}\lambda_1^{n-1}=0\\ k_0+k_1\lambda_2+\cdots+k_{n-1}\lambda_2^{n-1}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ k_0+k_1\lambda_n+\cdots+k_{n-1}\lambda_n^{n-1}=0\end{cases}\quad 即\quad \begin{pmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{n-2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\1&\lambda_n&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_0\\k_1\\ \vdots\\k_{n-1}\end{pmatrix}=0$$

又由于

$$\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{n-1}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\1&\lambda_n&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(\lambda_i-\lambda_j)\ne 0.$$

所以 $k_0=k_1=\cdots=k_{n-1}=0$，

即 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$ 线性无关.

10．已知A,B是两个n阶实对称矩阵，试证A与B相似的充要条件是A,B的特征多项式相等.

证：（1）若A与B相似，记$T^{-1}AT=B$，则

$$|\lambda E-B|=|\lambda E-T^{-1}AT|=|T^{-1}||\lambda E-A||T|=|\lambda E-A|.$$

（2）若A,B的特征多项式相等，则A,B有相同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 因$A,B$都是实对称矩阵，存在正交阵$P,Q$使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\quad Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

于是

$$P^{-1}AP=Q^{-1}BQ.$$

即

$$(PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1})=B$$

故A与B相似.

11．设A是n阶实矩阵，证明当$k>0$时，$kE+A'A$正定.

证：$(kE+A'A)'=(kE)'+(A'A)'=kE+A'A$，即$kE+A'A$是实对称阵. 对任意$n$维非零实列向量$X$，有

$$X'(kE+A'A)X=X'(kE)X+X'A'AX=k(X'X)+(AX)'AX$$

由于$k>0$，所以$k(X'X)>0$，又$(AX)'AX\geq 0$，所以$X'(kE+A'A)X>0$.

即$kE+A'A$正定.

12．设A是$m\times n$实矩阵，证明：$R(A'A)=R(AA')=R(A)$，并举例说明A是复矩阵时，结论未必成立.

证：考察方程组

$$A'AX=0, \tag{1}$$

$$AX=0 \tag{2}$$

显然（2）的解均为（1）的解，因而

$$n-R(A)\leq n-R(A'A),$$

即有

$$R(A'A)\leq R(A) \tag{3}$$

另一方面，对任意 $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in \mathbf{R}^n$ 如果 $A'AX=0$，则 $X'(A'AX)=0$，

即

$$\underbrace{(AX)'(AX)=0} \tag{4}$$

设 $AX=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$，由（4）知 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=0$，因为 A 为实矩阵，X 为实向量，故 a_i 均为实数，所以 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，即 $AX=\mathbf{0}$，由于（2）的解也是（1）的解，故有 $n-R(A'A)\le n-R(A)$，即

$$R(A)\le R(A'A) \tag{5}$$

综合（3），（5）式知

$$R(A'A)=R(A)$$

由 $R(A')=R(A)$ 知

$$R(AA')=R((A')'A')=R(A')=R(A)$$

故有 $R(A'A)=R(AA')=R(A)$.

令 $A=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$，则 $A'=(1,i)$，于是 $A'A=(0)$，即 A 是复矩阵，结论不成立.

13．若任意 n 维列向量都是 n 阶方阵 A 的特征向量，试证：A 一定是标量矩阵.

证：先证 A 的任两个特征值都相等，否则设 $\lambda_1,\lambda_2(\lambda_1\ne\lambda_2)$ 是 A 的两个特征值，$X\ne\mathbf{0}$，$Y\ne\mathbf{0}$，使 $AX=\lambda_1X,AY=\lambda_2Y$. 因 $\lambda_1\ne\lambda_2$，所以 X,Y 线性无关，$X+Y\ne\mathbf{0}$. 依题意存在 k，使 $A(X+Y)=k(X+Y)$，于是 $(\lambda_1-k)X+(\lambda_2-k)Y=\mathbf{0}$, $k=\lambda_1=\lambda_2$，矛盾，故 A 的所有特征值都相等，记为 λ.

令 e_j 为 n 阶单位阵 E 的第 j 个列向量，$j=1,\cdots,n$，于是

$$E=(e_1\cdots e_j\cdots e_n)$$

由已知

$$Ae_j=\lambda e_j,\ j=1,2,\cdots,n$$

得

$$A(e_1\cdots e_j\cdots e_n)=\lambda(e_1\cdots e_j\cdots e_n),\ AE=\lambda E,\ A=\lambda E$$

即 A 是数量矩阵.

14．设 A 是 n 阶正定矩阵，试证：存在正定矩阵 B 使 $A=B^2$.

证：A 是正定阵，则存在正交矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=D\text{，其中 }\lambda_i>0,\ (i=1,2,\cdots,n)$$

令 $\delta_i=\sqrt{\lambda_i}$, $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_1^2&&&\\&\delta_2^2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}$$

而 $$A=PDP^{-1}=P\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}P'$$

$$=P\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}P'P\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}P'$$

令 $B=P\begin{pmatrix}\delta_1&&&\\&\delta_2&&\\&&\ddots&\\&&&\delta_n\end{pmatrix}P'$，易验证 B 为正定阵，故 $A=B^2$.

15．设 α 是 n 维非零实列向量，证明：$E-\dfrac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'$ 为正交矩阵.

证：因为 $(E-\dfrac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha')'=E-\dfrac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'$，故

$$(E-\frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha')'(E-\frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha')=(E-\frac{2}{\alpha\alpha'}\alpha\alpha')(E-\frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha')$$

$$=E-\frac{4\alpha'\alpha}{\alpha'\alpha}+\frac{4}{(\alpha'\alpha)^2}\alpha(\alpha'\alpha)\alpha'=E-\frac{4\alpha\alpha'}{\alpha'\alpha}+\frac{4}{(\alpha'\alpha)^2}(\alpha'\alpha)(\alpha\alpha')$$

$$=E-\frac{4\alpha\alpha'}{\alpha'\alpha}+\frac{4\alpha\alpha'}{\alpha'\alpha}=E.$$

因而 $E-\dfrac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'$ 为正交矩阵.

16．设方程组 $AX=0$ 的解都是 $BX=0$ 的解，且 $R(A)=R(B)$，试证：$AX=0$ 与

$BX=0$ 同解.

证：设 $R(A)=R(B)=r$，则 $AX=0$ 的基础解系含有 $n-r$ 个线性无关的向量，不妨设为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$. 有 $A\xi_i=0$, $(i=1,\cdots,n-r)$.

又 $AX=0$ 的解必为 $BX=0$ 的解，从而 $B\xi_i=0$, $(i=1,\cdots,n-r)$

从而 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 也是 $BX=0$ 的基础解系.于是 $BX=0$ 的通解为

$$k_1\xi_1\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}.$$

则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

17．设 A 是 n 阶方阵，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 是 n 维列向量，$B=\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix}$，若 $R(A)=R(B)$，则 $AX=\beta$ 有解.

证：由于 $R(A\vdots\beta)\le R(B)=R(A)$，又由于 $R(A)\le R(A\vdots\beta)$，所以 $R(A\vdots\beta)=R(A)$ 即 $AX=\beta$ 有解.

18．设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})'(i=1,2,\cdots,r,r<n)$ 是 r 个线性无关的 n 维实向量，

$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 是线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases}$ 的实非零解向量，

试证：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性无关.

证：假设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，由已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，必有

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r, \tag{1}$$

又由 β 为方程组的解，从而

$$(\beta,\alpha_i)=0,\ (i=1,\cdots,r)$$

于是

$$(\beta,\beta)=(\beta,k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=0,$$

从而 $\beta=0$，矛盾.

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性无关.

19．设 A,B 是两个 n 阶正定矩阵，若 A 的特征向量都是 B 的特征向量，则 AB 正定.

证：因为 A,B 是两个 n 阶正定矩阵，因此 A,B 也必为实对称矩阵，

设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为 A 的 n 个标准正交的特征向量，记 $P=(P_1\ P_2\cdots P_n)$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\ P^{-1}BP=\begin{pmatrix}k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n\end{pmatrix},$$

并且 λ_i，$k_i>0$，$(i=1,\cdots,n)$，所以

$$P^{-1}ABP=P^{-1}AP\cdot P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1k_1 & & & \\ & \lambda_2k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_nk_n\end{pmatrix}$$

且 $\lambda_ik_i>0$，$(i=1,\cdots,n)$. 再由 $P^{-1}=P'$ 得 $(AB)'=AB$，因此 AB 正定.

20. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，向量 β 不是 $AX=0$ 的解，试证向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.

证：设有一组数 $k_0,k_1,\cdots,k_t$ 使得

$$k_0\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+\cdots+k_t(\beta+\alpha_t)=0$$

即

$$(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_t)\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t=0 \qquad (1)$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，向量 β 不是 $AX=0$ 的解，所以 β 不能表为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 的线性组合，所以 $k_0+k_1+k_2+\cdots+k_t=0$，因此（1）式变为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t=0$，由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 线性无关，所以 $k_1=k_2=\cdots=k_t=0$，进而 $k_0=0$，故向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.