第一部分　　专项同步练习

第一章　行列式

一、单项选择题

1. 下列排列是 5 阶偶排列的是 (　　).

(A) 24315　　(B) 14325　　(C) 41523　　(D)24351

2. 如果 n 阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数是 k，则排列 $j_n \cdots j_2 j_1$ 的逆序数是 (　　).

(A) k　　(B) $n-k$　　(C) $\frac{n!}{2}-k$　　(D) $\frac{n(n-1)}{2}-k$

3. n 阶行列式的展开式中含 $a_{11}a_{12}$ 的项共有 (　　)项.

(A) 0　　(B) $n-2$　　(C) $(n-2)!$　　(D) $(n-1)!$

4. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ($　　$)$.

(A) 0　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

5. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ($　　$)$.

(A) 0　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

6. 在函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & -1 & 1 \\ -1 & -x & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数是 (　　).

(A) 0　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

7. 若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}$，则 $D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{13} & a_{11}-2a_{12} \\ 2a_{21} & a_{23} & a_{21}-2a_{22} \\ 2a_{31} & a_{33} & a_{31}-2a_{32} \end{vmatrix}=$ (　　).

(A) 4　　(B) -4　　(C) 2　　(D) -2

8. 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a$，则 $\begin{vmatrix} a_{12} & ka_{22} \\ a_{11} & ka_{21} \end{vmatrix}=$ (　　).

(A) ka　　(B) $-ka$　　(C) k^2a　　(D) $-k^2a$

9. 已知 4 阶行列式中第 1 行元依次是 $-4,0,1,3$，第 3 行元的余子式依次为 $-2,5,1,x$，则 $x=$(　　).

(A) 0　　(B) -3　　(C) 3　　(D) 2

10. 若 $D=\begin{vmatrix} -8 & 7 & 4 & 3 \\ 6 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -7 & 5 \end{vmatrix}$，则 D 中第一行元的代数余子式的和为 (　　).

(A) -1　　(B) -2　　(C) -3　　(D) 0

11. 若 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则 D 中第四行元的余子式的和为 (　　).

(A) -1　　(B) -2　　(C) -3　　(D) 0

12. k 等于下列选项中哪个值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=0 \\ x_1+kx_2+x_3=0 \\ kx_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解 .

(　　)

(A) -1　　(B) -2　　(C) -3　　(D) 0

二、填空题

1. $2n$ 阶排列 $24\cdots(2n)13\cdots(2n-1)$ 的逆序数是 ______.

2. 在六阶行列式中项 $a_{32}a_{54}a_{41}a_{65}a_{13}a_{26}$ 所带的符号是 ______.

3. 四阶行列式中包含 $a_{22}a_{43}$ 且带正号的项是 ______.

4. 若一个 n 阶行列式中至少有 n^2-n+1 个元素等于 0，则这个行列式的值等于 ______.

5. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ ______.

6. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$ ______.

7. 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ ______.

8. 如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=M$，则 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}-3a_{12} & 3a_{12} \\ a_{21} & a_{23}-3a_{22} & 3a_{22} \\ a_{31} & a_{33}-3a_{32} & 3a_{32} \end{vmatrix}=$ ______.

9. 已知某 5 阶行列式的值为 5，将其第一行与第 5 行交换并转置，再用 2 乘所有元素，则所得的新行列式的值为 ______.

10. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$ ______.

11. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda \end{vmatrix} =$ ______.

12. 已知三阶行列式中第二列元素依次为 1,2,3, 其对应的余子式依次为 3,2,1, 则该行列式的值为 ______.

13. 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$, $A_{4j}\ (j=1,2,3,4)$ 为 D 中第四行元的代数余子式,

则 $4A_{41}+3A_{42}+2A_{43}+A_{44}=$ ______.

14. 已知 $D = \begin{vmatrix} a & b & c & a \\ c & b & a & b \\ b & a & c & c \\ a & c & b & d \end{vmatrix}$, D 中第四列元的代数余子式的和为 ______.

15. 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6$, A_{4j} 为 $a_{4j}\ (j=1,2,3,4)$ 的代数余子式, 则

$A_{41}+A_{42}=$ ______, $A_{43}+A_{44}=$ ______.

16. 已知行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$，D 中第一行元的代数余子式的和为 ______.

17. 齐次线性方程组 $\begin{cases} kx_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+kx_2 \qquad =0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$ 仅有零解的充要条件是 ______.

18. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ \qquad 2x_2+5x_3=0 \\ -3x_1-2x_2+kx_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则 $k=$ ______.

三、计算题

1. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \end{vmatrix}$； 2. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；

3. 解方程 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$； 4. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix}$；

5. $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_2 & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} (a_j \neq 1, j = 0,1,\cdots,n)$;

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 1-b & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-b & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-b \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$;

8. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ & \cdots & \cdots & \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$;

10. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$

11. $D = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

四、证明题

1. 设 $abcd=1$，证明：$\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}=0$.

2. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ & \cdots & \cdots & \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$.

5. 设 a,b,c 两两不等，证明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=0$ 的充要条件是 $a+b+c=0$.

参考答案

一．单项选择题

A D A C C D A B C D B B

二．填空题

1. n ； 2. “$-$” ； 3. $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$ ； 4. 0 ； 5. 0 ； 6. $(-1)^{n-1}n!$ ；

7. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$； 8. $-3M$； 9. -160； 10. x^4； 11. $(\lambda+n)\lambda^{n-1}$； 12. -2；

13. 0； 14. 0； 15. 12, -9； 16. $n!(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})$； 17. $k\neq -2,3$； 18. $k=7$

三．计算题

1. $-(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$ ； 2. $-2(x^3+y^3)$ ；

3. $x=-2,0,1$；

4. $\prod_{k=1}^{n-1}(x-a_k)$

5. $\prod_{k=0}^{n}(a_k-1)(1+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k-1})$；

6. $-(2+b)(1-b)\cdots((n-2)-b)$；

7. $(-1)^n\prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$；

8. $(x+\sum_{k=1}^{n}a_k)\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)$；

9. $1+\sum_{k=1}^{n}x_k$；

10. $n+1$；

11. $(1-a)(1+a^2+a^4)$．

四．证明题 **(略)**

第二章 矩阵

一、单项选择题

1. A 、B 为 n 阶方阵，则下列各式中成立的是 ( ) 。

(a) $|A^2| = |A|^2$ (b) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ (c) $(A-B)A = A^2 - AB$

(d) $(AB)^T = A^T B^T$

2. 设方阵 A、B、C满足 AB=AC,当 A 满足 ( ) 时，B=C。

(a) AB =BA (b) $|A| \neq 0$ (c) 方程组 AX=0有非零解 (d) B 、C可逆

3. 若 A 为 n 阶方阵，k 为非零常数，则 $|kA| = ($ $)$ 。

(a) $k|A|$ (b) $|k||A|$ (c) $k^n|A|$ (d) $|k|^n|A|$

4. 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A| = 0$，则 ( ) 。

(a) A 中两行 (列) 对应元素成比例 (b) A 中任意一行为其它行的线性组合

(c) A 中至少有一行元素全为零 (d) A 中必有一行为其它行的线性组合

5. 设 A，B 为 n 阶可逆矩阵，下面各式恒正确的是 ( ) 。

(a) $|(A+B)^{-1}| = |A^{-1}| + |B^{-1}|$ (b) $|(AB)^T| = |A||B|$

(c) $|(A^{-1}+B)^T| = |A^{-1}| + |B|$ (d) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

6. 设 A 为 n 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则( ) 。

(a) (a) $|A^*| = |A^{-1}|$ (b) $|A^*| = |A|$ (c) $|A^*| = |A|^{n+1}$ (d) $|A^*| = |A|^{n-1}$

7. 设 A 为 3 阶方阵，行列式 $|A| = 1$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则行列式 $|(2A)^{-1} - 2A^*| = ($ $)$ 。

(a) $-\dfrac{27}{8}$ (b) $-\dfrac{8}{27}$ (c) $\dfrac{27}{8}$ (d) $\dfrac{8}{27}$

8. 设 A， B为 n阶方矩阵，$A^2 = B^2$，则下列各式成立的是（ ） 。

(a) $A = B$ (b) $A = -B$ (c) $|A| = |B|$ (d) $|A|^2 = |B|^2$

9. 设 A， B均为 n阶方矩阵，则必有（ ） 。

(a) $|A + B| = |A| + |B|$ (b) $AB = BA$ (c) $|AB| = |BA|$ (d) $|A|^2 = |B|^2$

10. 设 A为n阶可逆矩阵，则下面各式恒正确的是（ ）。

（a） $|2A| = 2|A^T|$ (b) $(2A)^{-1} = 2A^{-1}$

(c) $[(A^{-1})^{-1}]^T = [(A^T)^T]^{-1}$ (d) $[(A^T)^T]^{-1} = [(A^{-1})^T]^T$

11. 如果 $A\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-3a_{31} & a_{12}-3a_{32} & a_{13}-3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，则 $A =$（ ）。

（a） $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

12. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则（ ）。

（a） $A^T = A$ (b) $A^{-1} = A^*$

（c） $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ （d） $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13. 设 A,B,C,I 为同阶方阵， I 为单位矩阵，若 $ABC = I$，则（ ）。

（a） $ACB = I$ （b） $CAB = I$ （c） $CBA = I$ （d） $BAC = I$

14. 设 A为n阶方阵，且 $|A| \neq 0$，则（ ）。

（a） A经列初等变换可变为单位阵 I

（b）由 $AX = BA$，可得 $X = B$

（c）当 $(A|I)$ 经有限次初等变换变为 $(I\ |B)$ 时，有 $A^{-1}=B$

（d）以上（a)、(b)、(c）都不对

15. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，秩 $(A)=r<m<n$，则（　　）。

（a） A 中 r 阶子式不全为零　　（b） A 中阶数小于 r 的子式全为零

（c） A 经行初等变换可化为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　　（d） A 为满秩矩阵

16. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵， C 为 n 阶可逆矩阵， $B=AC$，则(　)　。

(a) 秩(A)> 秩(B)　(b) 秩(A)= 秩(B)

(c) 秩(A)< 秩(B)　(d) 秩(A) 与秩(B) 的关系依 C 而定

17. A，B 为 n 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则秩(A) 和秩(B)(　)　。

(a) 有一个等于零　(b) 都为 n　(c) 都小于 n　(d) 一个小于 n, 一个等于 n

18.n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 (　)　。

(a) $r(A)=r<n$　(b) A 的列秩为 n

(c) A 的每一个行向量都是非零向量　(d) 伴随矩阵存在

19.n 阶矩阵 A 可逆的充要条件是 (　)　。

(a) A 的每个行向量都是非零向量

(b) A 中任意两个行向量都不成比例

(c) A 的行向量中有一个向量可由其它向量线性表示

(d) 对任何 n 维非零向量 X，均有 $AX\neq 0$

二、填空题

1. 设 A 为 n 阶方阵，I 为 n 阶单位阵，且 $A^2=I$，则行列式 $|A|=$________

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}=$________

3. 设 $2A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则行列式 $\left|(A+3I)^{-1}(A^2-9I)\right|$ 的值为________

4. 设 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，且已知 $A^6=I$，则行列式 $\left|A^{11}\right|=$________

5. 设 A为 5 阶方阵， A^* 是其伴随矩阵，且 $|A|=3$，则 $\left|A^*\right|=$________

6. 设 4 阶方阵 A的秩为 2，则其伴随矩阵 A^* 的秩为________

7. 非零矩阵 $\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$ 的秩为________

8. 设 A为 100 阶矩阵，且对任何 100 维非零列向量 X，均有 $AX\neq 0$，则 A的秩为________

9. 若 $A=(a_{ij})$ 为 15 阶矩阵，则 A^TA 的第 4 行第 8 列的元素是________

10. 若方阵 A 与 4I 相似，则 $A=$________

11. $\lim\limits_{K\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{2^K} & \frac{2K}{K+1}\\ \frac{1}{K} & \frac{1}{3^K}\end{pmatrix}=$________

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1 & 2\\ 0 & \frac{1}{3} & 1\\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}^n=$________

三、计算题

1. 解下列矩阵方程 (X 为未知矩阵).

1) $\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&2\\3&2\\0&-2\end{pmatrix}$；　　2) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\\1&0\end{pmatrix}$；

3) $X(I-B^{-1}C)^TB^T=I$，其中 $B=\begin{pmatrix}3&1&0\\4&0&4\\4&2&2\end{pmatrix}$；　$C=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$；

4) $AX=A^2+X-I$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$；

5) $AX=A+2X$，其中 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$；

2. 设 A 为 n 阶对称阵，且 $A^2=0$，求 A.

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$，求 $(A+2I)(A^2-4I)^{-1}$.

4. 设 $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$A_4=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，求 $\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}$.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}$，求一秩为 2 的方阵 B，使 $AB=0$.

6. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求非奇异矩阵 C，使 $A=C^TBC$.

7. 求非奇异矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

1) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -3 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$

8. 已知三阶方阵 A 的三个特征根为 1,1,2, 其相应的特征向量依次为 $(0,0,1)^T,(-1,1,0)^T,(-2,1,1)^T$, 求矩阵 A.

9. 设 $A=\begin{pmatrix}5 & -3 & 2\\ 6 & -4 & 4\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$, 求 A^{100}.

四、证明题

1. 设 A、B 均为 n 阶非奇异阵，求证 AB 可逆.
2. 设 $A^k=0$ (k 为整数), 求证 $I-A$ 可逆.
3. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为实数，且如果 $a_k\neq 0$，如果方阵 A 满足 $A^k+a_1A^{k-1}+\cdots+a_{k-1}A+a_kI=0$，求证 A 是非奇异阵.
4. 设 n 阶方阵 A 与 B 中有一个是非奇异的，求证矩阵 AB 相似于 BA.
5. 证明可逆的对称矩阵的逆也是对称矩阵.
6. 证明两个矩阵和的秩小于这两个矩阵秩的和.
7. 证明两个矩阵乘积的秩不大于这两个矩阵的秩中较小者.
8. 证明可逆矩阵的伴随矩阵也可逆，且伴随矩阵的逆等于该矩阵的逆矩阵的伴随矩阵.
9. 证明不可逆矩阵的伴随矩阵的逆不大于 1.
10. 证明每一个方阵均可表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和。

第二章参考答案

一：1. a ；2. b ；3.c ；4.d ；5.b ；6.d ；7.a ；8.d ；9.c ；10.d ；11.b ；12.c ；13.b ；14.a ；15.a ；16.b ；17.c ；18.b ；19.d.

二. 1. 1或-1；2. 0；3. -4；4. 1；5. 81；6. 0；7. 1；8. 100；9. $\sum_{i=1}^{15} a_{i4}\ a_{i8}$；

10. I ；12. 0 ；11. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

三、1.1)、$\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ -13 & -2 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$;2)、$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$;3)、$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;4)、$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；

5)、$\begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & -9 \end{pmatrix}$. 2. 0；3. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

5. $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$不唯一；6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；7. 1)、$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 2) 、$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$；

8. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$；9. $\begin{pmatrix} 3^{100}+2(2^{100}-1) & 2-2^{100}-3^{100} & 3^{100}-1 \\ 2(2^{100}+3^{100})-4 & 4-2^{100}-2(3^{100}) & 2(3^{100}-1) \\ 2(3^{100}-1) & 2(1-3^{100}) & 2(3^{100})-1 \end{pmatrix}$.

第三章　　向量

一、单项选择题

1. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，　β_1,β_2 都是四维列向量，且四阶行列式

$|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta_1| = m$，$|\alpha_1 \quad \beta_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_2| = n$，则行列式

$|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta_1+\beta_2| = (\quad)$

(a) $m+n$　　(b) $m-n$　　(c) $-m+n$　　(d) $-m-n$

2. 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=0$，则（　）。

(a) A 中两行（列）对应元素成比例

(b) A 中任意一行为其它行的线性组合

(c) A 中至少有一行元素全为零

(d) A 中必有一行为其它行的线性组合

3. 设 A 为 n 阶方阵，$r(A)=r<n$，则在 A 的 n 个行向量中（　）。

(a) 必有 r 个行向量线性无关

(b) 任意 r 个行向量线性无关

(c) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关组

(d) 任意一个行向量都能被其它 r 个行向量线性表示

4. n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是（　）

(a) $r(A)=r<n$

(b) A 的列秩为 n

（c）A的每一个行向量都是非　零向量

（d）A的伴随矩阵存在

5. n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分条件是（　　）

(a) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 都不是零向量

(b) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 中任一向量均不能由其它向量线性表示

(c) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量都不成比例

(d) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 中有一个部分组线性无关

6. n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$ 线性相关的充要条件是（　　）

(a) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 中至少有一个零向量

(b)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中至少有两个向量成比例

(c)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中任意两个向量不成比例

(d)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 中至少有一向量可由其它向量线性表示

7. n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s(3\leq s\leq n)$ 线性无关的充要条件是（　　）

(a)存在一组不全为零的数　$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s\neq 0$

(b)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中任意两个向量都线性无关

(c)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中存在一个向量，它不能被其余向量线性表示

(d)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 中任一部分组线性无关

8. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r ,则(　　)

(a) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 中至少有一个由 r 个向量组成的部分组线性无关

(b) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 中存在由 $r+1$ 个向量组成的部分组线性无关

(c) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 中由 r 个向量组成的部分组都线性无关

(d) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 中个数小于 r 的任意部分组都线性无关

9. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 均为 n 维向量,那么下列结论正确的是 (　　)

(a) 若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s=0$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 线性相关

(b) 若对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$,都有

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s\neq 0$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 线性无关

(c) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 线性相关,则对任意不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$,都有

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s=0$

(d) 若 $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots\cdots 0\alpha_s=0$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 线性无关

10. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则向量组（　　）

(a) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性无关

(b) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

(c) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

(d) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

11. 若向量 β 可被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 线性表示，则（　　）

(a) 存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$ 使得 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s$

(b) 存在一组全为零的数 $k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$ 使得 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s$

(c) 存在一组数 $k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$ 使得 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s$

(d) 对 β 的表达式唯一

12. 下列说法正确的是（　　）

(a) 若有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性无关

(b) 若有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots k_s\alpha_s\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性无关

(c) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性相关，则其中每个向量均可由其余向量线性表示

(d) 任何 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关

13. 设 β 是向量组 $\alpha_1=(1,\ 0,\ 0)^T$，$\alpha_2=(0,\ 1,\ 0)^T$ 的线性组合，则 $\beta=$（　　）

(a) $(0,\ 3,\ 0)^T$　　(b) $(2,\ 0,\ 1)^T$　　(c) $(0,\ 0,\ 1)^T$　　(d) $(0,\ 2,\ 1)^T$

14. 设有向量组 $\alpha_1=(1,\ -1,\ 2,\ 4)^T$，$\alpha_2=(0,\ 3,\ 1,\ 2)^T$，

$\alpha_3=(3,\ 0,\ 7,\ 14)^T$，$\alpha_4=(1,\ -2,\ 2,\ 0)^T$，$\alpha_5=(2,\ 1,\ 5,\ 10)^T$，则该向量组的极大线性无关组为（　　）

(a) $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$　　(b) $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_4$

(c) $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_5$　　(d) $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_5$

15. 设 $\alpha=(a_1,\ a_2,\ a_3)^T$，$\beta=(b_1,\ b_2,\ b_3)^T$，$\alpha_1=(a_1,\ a_2)^T$，$\beta_1=(b_1,\ b_2)^T$，下列正确的是（　　）

(a) 若 α,β线性相关，则 α_1,β_1也线性相关；

(b)若α,β线性无关，则 $\alpha_1,\ \beta_1$ 也线性无关；

(c)若α_1,β_1线性相关，则 α,β也线性相关；

(d)以上都不对

二、填空题

1. 若 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(1,\ 2,\ 3)^T$，$\alpha_3=(1,\ 3,\ t)^T$ 线性相关，则 t=________。

2. n 维零向量一定线性________关。

3. 向量 α 线性无关的充要条件是________。

4. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s\ (s>3)$ 线性________关。

5. n 维单位向量组一定线性________。

6. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 中任意 r 个________的向量都是它的极大线性无关组。

7. 设向量 $\alpha_1=(1,\ 0,\ 1)^T$ 与 $\alpha_2=(1,\ 1,\ a)^T$ 正交，则 $a=$________。

8. 正交向量组一定线性________。

9. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots,\beta_t$ 等价，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 的秩与 $\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots,\beta_t$ 的秩________。

10. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots,\beta_t$ 线性表示，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s)$________ $r(\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots,\beta_t)$。

11. 向量组 $\alpha_1=(a_1,\ 1,\ 0,\ 0)^T$，$\alpha_2=(a_2,\ 1,\ 1,\ 0)^T$，$\alpha_3=(a_3,\ 1,\ 1,\ 1)^T$ 的线性关系是________。

12. 设 n 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ $\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$，则 $|A|=$________.

13. 设 $\alpha_1=(0,\ y,\ -\frac{1}{\sqrt{2}})^T$，$\alpha_2=(x,\ 0,\ 0)^T$，若 α 和 β 是标准正交向量，则 x

和 y 的值________.

14. 两向量线性相关的充要条件是________.

三、计算题

1. 设 $\alpha_1=(1+\lambda,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(1,\ 1+\lambda,\ 1)^T$，$\alpha_3=(1,\ 1,\ 1+\lambda)^T$，

$\beta=(0,\ \lambda,\ \lambda^2)^T$，问

（1）λ 为何值时，β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示？

（2）λ 为何值时，β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表达式不唯一？

（3）λ 为何值时，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

2. 设 $\alpha_1=(1,\ 0,\ 2,\ 3)^T$，$\alpha_2=(1,\ 1,\ 3,\ 5)^T$，$\alpha_3=(1,\ 1,\ a+2,\ 1)^T$，

$\alpha_4=(1,\ 2,\ 4,\ a+8)^T$，$\beta=(1,\ 1,\ b+3,\ 5)^T$ 问：

（1）a,b 为何值时，β 不能表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合？

（2）a,b 为何值时，β 能唯一地表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合？

3. 求向量组 $\alpha_1=(1,\ -1,\ 0,\ 4)^T$，$\alpha_2=(2,\ 1,\ 5,\ 6)^T$，$\alpha_3=(1,\ 2,\ 5,\ 2)^T$，

$\alpha_4=(1,\ -1,\ -2,\ 0)^T$，$\alpha_5=(3,\ 0,\ 7,\ 14)^T$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

4. 设 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(1,\ 2,\ 3)^T$，$\alpha_3=(1,\ 3,\ t)^T$，t 为何值时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，t 为何值时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关？

5. 将向量组 $\alpha_1=(1,\ 2,\ 0)^T$，$\alpha_2=(-1,\ 0,\ 2)^T$，$\alpha_3=(0,\ 1,\ 2)^T$ 标准正交化。

四、证明题

1. 设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=3\alpha_2-\alpha_1,\beta_3=2\alpha_1-\alpha_2$，试证 β_1,β_2,β_3 线性相关。

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n$线性无关，证明 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots\cdots,\alpha_n+\alpha_1$在 n 为奇数时线性无关；在 n 为偶数时线性相关。

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性无关，证明 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性表示且表示式唯一。

4. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，求证$\alpha_4$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示。

5. 证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量是其余向量的线性组合。

6. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中$\alpha_1\neq 0$，并且每一个 α_i 都不能由前 $i-1$个向量线性表示 $(i=2,3,\cdots,s)$，求证 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关。

7. 证明：如果向量组中有一个部分组线性相关，则整个向量组线性相关。

8.设$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是线性无关向量组，证明向量组

$\alpha_0,\alpha_0+\alpha_1,\alpha_0+\alpha_2,\cdots,\alpha_0+\alpha_s$也线性无关。

第三章向量参考答案

一、　单项选择

1.b　2.d　3.a　4.b　5.b　6.d　7.d　8.a　9.b　10.c　11.c　12.d　13.a
14.b　15. a

二、填空题

1.　5　2.相关　3. $\alpha \neq 0$　4.相关　5.无关　6.线性无关　7.　-1

8.无关　9.相等　10. $\leq$　11.线性无关　12.　0　13. $x=\pm 1, y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

14.对应分量成比例

三、解答题

1. 解：设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$

则对应方程组为 $\begin{cases}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda\\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2\end{cases}$

其系数行列式 $|A| = \begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+3)$

（1）当 $\lambda \neq 0, \lambda \neq -3$ 时，$|A| \neq 0$，方程组有唯一解，所以 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示；

（2）当 $\lambda = 0$ 时，方程组的增广阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

$r(A) = r(\overline{A}) = 1 < 3$，方程组有无穷多解，所以 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一；

（3）当 $\lambda = -3$ 时，方程组的增广阵

$\overline{A} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -3\\ 0 & -3 & 3 & -12\\ 0 & 0 & 0 & -18\end{pmatrix}$，$r(A) \neq r(\overline{A})$，方程组无解，

所以 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

2.解:以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 为列构造矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{a+1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1-a^2}{4} & b \end{pmatrix}$$

（1）当 $a=\pm 1$ 且 $b\neq 0$ 时，β 不能表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合；

（2）当 $a\neq \pm 1$, b 任意时，β 能唯一地表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合。

3.解：$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -2 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一个极大无关组，且 $\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_4$， $\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4$

4.解：$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix}=t-5$,

当 $t=5$ 时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，当 $t\neq 5$ 时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

5.解：先正交化：

令 $\beta_1=\alpha_1=(1,\ \ 2,\ \ 0)^T$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\ \beta_1]}{[\beta_1,\ \beta_1]}\beta_1=\left(-\frac{4}{5},\ \frac{2}{5},\ \ 2\right)^T$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\ \beta_1]}{[\beta_1,\ \beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\ \beta_2]}{[\beta_2,\ \beta_2]}\beta_2=\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right)^T$$

再单位化：

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt5},\quad \frac{2}{\sqrt5},\quad 0\right)^T,\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\left(-\frac{2}{\sqrt{30}},\quad \frac{1}{\sqrt{30}},\quad \frac{5}{\sqrt{30}}\right)^T,$$

$$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\left(\frac{2}{\sqrt6},\quad -\frac{1}{\sqrt6},\quad \frac{1}{\sqrt6}\right)^T$$

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$为标准正交向量组。

四、证明题

1.证：$\because\ 3(\beta_1+\beta_2)-4(2\beta_1-\beta_3)=0$

$\therefore\ -5\beta_1+3\beta_2+4\beta_3=0$

$\therefore\ \beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关

2.证：设 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+k_n(\alpha_n+\alpha_1)=0$

则 $(k_1+k_n)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots(k_{n-1}+k_n)\alpha_n=0$

$\because\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n$ 线性无关

$$\therefore\begin{cases}k_1+k_n=0\\ k_1+k_2=0\\ \quad\cdots\cdots\\ k_{n-1}+k_n=0\end{cases}$$

其系数行列式 $\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}=\begin{cases}2,\ n\text{为奇数}\\0,\ n\text{为偶数}\end{cases}$

$\therefore$当 n 为奇数时，$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_n$只能为零，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n$线性无关；

当 n 为偶数时，$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_n$可以不全为零，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n$线性相关。

3.证：∵ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关

∴存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s,k$ 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_s\alpha_s+k\beta=0$$

若 $k=0$，则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_s\alpha_s=0$，（$k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$ 不全为零）

与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 线性无关矛盾

所以 $k\neq 0$

于是 $\beta=-\dfrac{k_1}{k}\alpha_1-\dfrac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots\cdots-\dfrac{k_s}{k}\alpha_s$

∴ β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 线性表示。

设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_s\alpha_s$ ①

$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots\cdots+l_s\alpha_s$ ②

则①-②得 $(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+\cdots\cdots+(k_s-l_s)\alpha_s=0$

∵ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 线性无关

∴ $k_i-l_i=0,(i=1,2,\cdots,s)$

∴ $k_i=l_i,(i=1,2,\cdots,s)$ 即表示法唯一

4.证：假设 α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

∵ $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，∴ α_2,α_3 线性无关

∵ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，∴ α_1 可由 α_2,α_3 线性表示,

∴ α_4 能由 α_2,α_3 线性表示，从而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，矛盾

$\therefore \alpha_4$不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示。

5.证：必要性

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性相关

则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots\cdots,k_s$,使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_s\alpha_s=0$

不妨设 $k_s\neq 0$，则 $\alpha_s=-\frac{k_1}{k_s}\alpha_1-\frac{k_2}{k_s}\alpha_2-\cdots\cdots-\frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1}$,

即至少有一个向量是其余向量的线性组合。

充分性

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中至少有一个向量是其余向量的线性组合

不妨设 $\alpha_s=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}$

则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}-\alpha_s=0$,

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$线性相关。

6.证：用数学归纳法

当 s=1时，$\alpha_1\neq 0$，线性无关，

当 s=2时，$\because$ α_2不能由 α_1线性表示，$\therefore$ α_1,α_2线性无关，

设 s=i-1 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_{i-1}$线性无关

则 s=i 时，假设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_i$线性相关，$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$线性无关，$\alpha_i$可

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_{i-1}$线性表示，矛盾，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_i$线性无关。得证

7.证：若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$中有一部分组线性相关，不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_r$（r<s）

线性相关，则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots\cdots,k_r$,使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_r\alpha_r=0$

于是 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_r\alpha_r+0\alpha_{r+1}+\cdots+0\alpha_s=0$

因为 $k_1,k_2,\cdots\cdots,k_r,0,$ ----， 0 不全为零

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 线性相关。

8.证：设 $k_0\alpha_0+k_1(\alpha_0+\alpha_1)+k_2(\alpha_0+\alpha_2)+\cdots+k_s(\alpha_0+\alpha_s)=0$

则 $(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s)\alpha_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

因 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,

所以 $\begin{cases} k_0+k_1+k_2+\cdots+k_s=0 \\ k_1=0 \\ k_2=0 \\ \cdots \\ k_s=0 \end{cases}$ 解得 $k_0=k_1=k_2=\cdots=k_s=0$

所以向量组 $\alpha_0,\alpha_0+\alpha_1,\alpha_0+\alpha_2,\cdots,\alpha_0+\alpha_s$ 线性无关。

第四章 线性方程组

一、单项选择题

1. 设 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的系数矩阵的秩为 r，则 $AX=0$ 有非零解的充分必要条件是（ ）

(A) $r=n$ (B) $r<n$

(C) $r\geq n$ (D) $r>n$

2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则线性方程组 $AX=b$ 有无穷解的充要条件是（ ）

(A) $r(A)<m$ (B) $r(A)<n$

(C) $r(Ab)=r(A)<m$ (D) $r(Ab)=r(A)<n$

3. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，非齐次线性方程组 $AX=b$ 的导出组为 $AX=0$，若 $m<n$，则（ ）

(A) $AX=b$ 必有无穷多解 (B) $AX=b$ 必有唯一解

(C) $AX=0$ 必有非零解 (D) $AX=0$ 必有唯一解

4. 方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=4 \\ x_2+2x_3=2 \\ (\lambda-2)x_3=-(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-1) \end{cases}$ 无解的充分条件是 $\lambda=$（ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\lambda-1 \\ 2x_2-x_3=\lambda-2 \\ x_3=\lambda-4 \\ (\lambda-1)x_3=-(\lambda-3))(\lambda-1)) \end{cases}$ 有唯一解的充分条件是 $\lambda=$（ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

6. 方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=\lambda-1 \\ 3x_2-x_3=\lambda-2 \\ \lambda x_2-x_3=(\lambda-3)(\lambda-4)+(\lambda-2) \end{cases}$ 有无穷解的充分条件是 $\lambda=$（ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. 已知 β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的两个不同的解，α_1,α_2 是导出组 $AX=0$ 的基本解系，k_1,k_2 为任意常数，则 $AX=b$ 的通解是（ ）

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$ (B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$ (D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

8. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则下列结论正确的是（ ）

(A) 若 $AX=0$ 仅有零解，则 $AX=b$ 有唯一解

(B) 若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=b$ 有无穷多解

(C) 若 $AX=b$ 有无穷多解，则 $AX=0$ 仅有零解

(D) 若 $AX=b$ 有无穷多解，则 $AX=0$ 有非零解

9. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $AX=0$ 仅有零解的充要条件为（ ）

(A) A 的列向量线性无关 (B) A 的列向量线性相关

(C) A 的行向量线性无关 (D) A 的行向量线性相关

10. 线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+10x_3=1 \end{cases}$ （ ）

(A) 无解 (B) 有唯一解 (C) 有无穷多解 (D) 其导出组只有零解

二、填空题

1. 设 A 为 100 阶矩阵，且对任意 100 维的非零列向量 X，均有 $AX\neq 0$，则 A 的秩为 ____.

2. 线性方程组 $\begin{cases} kx_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+kx_2=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$ 仅有零解的充分必要条件是 ____.

3. 设 $X_1,X_2,\cdots X_s$ 和 $c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_sX_s$ 均为非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解

（$c_1,c_2,\cdots c_s$ 为常数），则 $c_1+c_2+\cdots+c_s=$____.

4. 若线性方程组 $AX=b$ 的导出组与 $BX=0(r(B)=r)$ 有相同的基础解系，则

$r(A)=$____.

5. 若线性方程组 $A_{m\times n}X=b$ 的系数矩阵的秩为 m，则其增广矩阵的秩为 ____.

6. 设 10×15 矩阵的秩为 8，则 $AX=0$ 的解向量组的秩为 ____.

7. 如果 n 阶方阵 A 的各行元素之和均为 0，且 $r(A)=n-1$，则线性方程组 $AX=0$ 的通解为 ____.

8. 若 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 有 n 个线性无关的解向量，则 $A=$____.

9. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，若齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解，则 $a=$____.

10. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，若线性方程组 $AX=b$ 无解，则 $a=$____.

11. n 阶方阵 A，对于 $AX=0$，若每个 n 维向量都是解，则 $r(A)=$____.

12. 设 5×4 矩阵 A 的秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的三个不同的解向量，若 $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=(2,0,0,0)^T, 3\alpha_1+\alpha_2=(2,4,6,8)^T$，则 $AX=b$ 的通解为____.

13. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=r<\min(m,n)$，则 $AX=0$ 有____个解，有____个线性无关的解．

三、计算题

1. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，问 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 是否是该方程组的一个基础解系？为什么？

2. 设 $A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 3 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6\\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -6 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0\end{bmatrix}$，已知 B 的行向量都是线性方程组 $AX=0$ 的解，试问 B 的四个行向量能否构成该方程组的基础解系？为什么？

3. 设四元齐次线性方程组为 （Ⅰ）：$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

1）求（Ⅰ）的一个基础解系

2）如果 $k_1(0,1,1,0)^T + k_2(-1,2,2,1)^T$ 是某齐次线性方程组（ II）的通解，问方程组（Ⅰ）和（II）是否有非零的公共解？若有，求出其全部非零公共解；若无，说明理由。

4. 问 a, b 为何值时，下列方程组无解？有唯一解？有无穷解？在有解时求出全部解（用基础解系表示全部解）。

1）$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$ 2）$\begin{cases} x_1 + x_2 + bx_3 = 4 \\ -x_1 + bx_2 + x_3 = b^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$

5. 求一个非齐次线性方程组，使它的全部解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (c_1, c_2 \text{为任意实数})$$

6. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$，求 4×2 一个矩阵 B，使得 $AB = 0$，且 $r(B) = 2$。

参考答案

一、单项选择题

1.B 2.D 3.C 4.B 5.A 6.C 7.B 8.D 9.A 10.C

二、填空题

1. 100 2. $k\neq -2$且$k\neq 3$ 3. 1 4. r 5. m 6. 7

7. $k(1,1,\cdots,1)^T$ （k为任意实数） 8. 0 9. $a\neq -1$或3 10. $a=-1$ 11. 0

12. $(\frac{1}{2},0,0,0)^T+k(0,2,3,4)^T$, k任意实数 13. 无穷, $n-r$

三、计算题

1. 是 2. 不能

3. 1）$v_1=(0,0,1,0)^T, v_2=(-1,1,0,1)^T$ 2）$k(-1,1,1,1)^T$ (其中k为任意非零常数)

4. 1）当$a=-2$时，无解；当$a\neq -2$且$a\neq 1$时有唯一解：$(-\frac{1+a}{2+a},\frac{1}{2+a},\frac{(1+a)^2}{2+a})^T$；当$a=1$时有无穷多解：$c_1(-1,1,0)^T+c_2(-1,0,1)^T+(1,0,0)^T$ (其中c_1,c_2为任意常数)

2）当$b=-1$时，无解；当$b\neq -1$且$b\neq 4$时有唯一解：$(\frac{b(b+2)}{b+1},\frac{b^2+2b+4}{b+1},-\frac{2b}{b+1})^T$；当$b=4$时有无穷多解：$c(-3,-1,1)^T+(0,4,0)^T$ (其中c为任意常数)

5. $9x_1+5x_2-3x_3=-5$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 11/2 & 1/2 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

第五章　特征值与特征向量

一、单项选择题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, 则 A的特征值是 ( ) 。

(a) -1,1,1　(b) 0,1,1　(c) -1,1,2　(d) 1,1,2

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 则 A的特征值是 ( ) 。

(a) 0,1,1　(b) 1,1,2　(c) -1,1,2　(d) -1,1,1

3. 设 A为 n阶方阵，$A^2=I$，则( ) 。

(a) $|A|=1$　(b) A的特征根都是 1　(c) $r(A)=n$　(d) A一定是对称阵

4. 若 x_1,x_2 分别是方阵 A的两个不同的特征值对应的特征向量，则 $k_1x_1+k_2x_2$ 也是 A的特征向量的充分条件是 ( ) 。

(a) $k_1=0$且$k_2=0$　(b) $k_1\neq0$且$k_2\neq0$　(c) $k_1k_2=0$　(d) $k_1\neq0$且$k_2=0$

5. 若 n阶方阵 A, B 的特征值相同，则( ) 。

(a) $A=B$　(b) $|A|=|B|$　(c) A与B相似　(d) A与B合同

6. 设 A为 n阶可逆矩阵，λ 是 A的特征值，则 A^* 的特征根之一是 ( ) 。

(a) $\lambda^{-1}|A|^n$　(b) $\lambda^{-1}|A|$　(c) $\lambda|A|$　(d) $\lambda|A|^n$

7. 设 2 是非奇异阵 A的一个特征值，则 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 至少有一个特征值等于 ( ) 。

(a) 4/3　(b) 3/4　(c) 1/2　(d) 1/4

8. 设 n 阶方阵 A 的每一行元素之和均为 $a(a\neq0)$，则 $2A^{-1}+E$ 有一特征值为

( ) 。

(a)a (b)2a (c)2a+1 (d) $\frac{2}{a}+1$

9. 矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量（ ）。

(a) 线性相关 (b) 线性无关

(c) 两两相交 (d) 其和仍是特征向量

10. $|A|=|B|$是 n 阶矩阵 A 与 B 相似的( ) 。

(a) 充要条件 (b) 充分而非必要条件

(c) 必要而非充分条件 (d) 既不充分也不必要条件

11. n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征根是 A 与对角阵相似的 ( ) 。

(a) 充要条件 (b) 充分而非必要条件

(c) 必要而非充分条件 (d) 既不充分也不必要条件

12. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 1\\ \alpha & 1 & \beta\\ 1 & \beta & 1\end{pmatrix}$与 $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$相似，则 α,β 的值分别为 ( ) 。

(a) 0,0 (b) 0,1 (c) 1,0 (d) 1,1

13. 设 A, B 为相似的 n 阶方阵，则( ) 。

(a) 存在非奇异阵 P，使 $P^{-1}AP=B$ (b) 存在对角阵 D，使 A 与 B 都相似于 D

(c) 存在非奇异阵 P，使 $P^{T}AP=B$ (d) A 与 B 有相同的特征向量

14. 若 n 阶方阵 A 与某对角阵相似，则( ) 。

(a) $r(A)=n$ (b) A 有 n 个不同的特征值

(c) A 有 n 个线性无关的特征向量 (d) A 必为对称阵

15. 若 A 相似于 B，则( ) 。

(a) $\lambda I-A=\lambda I-B$ (b) $|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$

(c) A 及 B 与同一对角阵相似 (d) A 和 B 有相同的伴随矩阵

16. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则与 A 相似的矩阵是 ( ) 。

(a) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

17. 下列说法不妥的是 ( )

(a) 因为特征向量是非零向量，所以它所对应的特征向量非零

(b) 属于一个特征值的向量也许只有一个

(c) 一个特征向量只能属于一个特征值

(d) 特征值为零的矩阵未必是零矩阵

18. 若 $A\sim B$，则下列结论错误的是 ( )

(a) $\lambda E-A=\lambda E-B$ (b) $|A|=|B|$

(c) 存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$ (d) $trA=trB$

二、填空题

1. n 阶零矩阵的全部特征值为 ________。

2. 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2=I$，则 A 的全部特征值为 ________。

3. 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^m=0$ (m 是自然数)，则 A 的特征值为 ________。

4. 若 $A^2=A$，则 A 的全部特征值为 ________。

5. 若方阵 A 与 4I 相似，则 A = ________。

6. 若 n 阶矩阵 A 有 n 个相应于特征值 λ 的线性无关的特征向量，则 A = ________。

7. 设三阶矩阵 A 的特征值分别为 -1,0,2，则行列式 $|A^2+A+I|=$ ____________ 。

8. 设二阶矩阵 A 满足 $A^2-3A+2E=O$，则 A 的特征值为 __________。

9. 特征值全为 1 的正交阵必是 ________阵。

10. 若四阶矩阵 A与B相似， A的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则 $|B^{-1}-E|=$________。

11. 若 $A=\begin{pmatrix}22 & 31\\ y & x\end{pmatrix}\square\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=B$，则 $x=$__________， $y=$_______。

三、计算题

1. 若 n 阶方阵 A 的每一行元素之和都等于 a , 试求 A 的一个特征值及该特征值对应的一个特征向量 .

2. 求非奇异矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵 .

1) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -3 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$

3. 已 知 三 阶 方 阵 A 的 三 个 特 征 根 为 1,1,2, 其 相 应 的 特 征 向 量 依 次 为 $(0,0,1)^T,(-1,1,0)^T,(-2,1,1)^T$, 求矩阵 A .

4. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$，有一个特征向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$，求 a,b 的值，并求出对应于 α 的特征值。

5. 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ t & -2 & 2\\ 3 & s & -1\end{pmatrix}$，有一个特征向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$，求 s,t 的值。

6. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x, y 满足的条件。

7. 求正交阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵，其中 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$。

8. 设三阶矩阵 A 的特征值为 -1,2,5 ，矩阵 $B=3A-A^2$，求

（1） B 的特征值；

（2） B 可否对角化，若可对角化求出与 B 相似的对角阵；

（3）求 $|B|,|A-3E|$.

9. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似,

（1） 求 y ；

（2） 求一个满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆阵 P 。

10. 设 $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^{100} .

四、证明题

1. 设 A 是非奇异阵， λ 是 A 的任一特征根，求证 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的一个特征根，并且 A 关于 λ 的特征向量也是 A^{-1} 关于 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量 .

2. 设 $A^2=E$, 求证 A 的特征根只能是 ± 1.

3. 设 n 阶方阵 A 与 B 中有一个是非奇异的，求证矩阵 AB 相似于 BA .

4. 证明: 相似矩阵具有相同的特征值 .

5. 设 n 阶矩阵 $A \neq E$，如果 $r(A+E)+r(A-E)=n$，证明： -1 是 A 的特征值。

6. 设 $A \sim B$，证明 $A^k \sim B^k$ 。

7. 设 α_1,α_2 是 n 阶矩阵 A 分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，证明 $\alpha_1+\alpha_2$ 不是 A 的特征向量。

第五章　　参考答案

一、单项选择题

1.a　2.c　3.c　4.d　5.b　6.b　7.b　8.d　9.b　10.c　11.b　12.a　13.a　14.c　15.b　16.b　17.a　18.a

二、填空题

1.0　2.1,-1　3.0　4.0,1　5.4I　6. λI　7.7　8.1,2　9. 单 位　10.24　11.-17,-12

三、计算题

1. a, $(1,1,\cdots,1)^T$

2.(1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $a=3, b=0, \lambda=-1$　5. $s=9, t=-2, \lambda=-6$　6. $x+y=0$

7. $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$

8.(1)-4,2,-10　(2) $\begin{pmatrix} -4 & & \\ & 2 & \\ & & -10 \end{pmatrix}$,　(3)8

9.（1） $y=6$,（2）特征值 2,2,6； $p=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 3^{100}+2(2^{100}-1) & 2-2^{100}-3^{100} & 3^{100}-1 \\ 2(2^{100}+3^{100})-4 & 4-2^{100}-2\cdot 3^{100} & 2(3^{100}-1) \\ 2(3^{100}-1) & 2(1-3^{100}) & 2\cdot 3^{100}-1 \end{pmatrix}$

四**.** 证明题 **(**略**)**

第六章　二次型

一、单项选择题

1．n 阶对称矩阵 A 正定的充分必要条件是（　　）。

(a) $|A|>0$　　(b) 存在阶阵 C，使 $A=C^TC$

(c) 负惯性指数为零　　(d) 各阶顺序主子式为正

2．设 A 为 n 阶方阵，则下列结论正确的是（　　）。

(a) A 必与一对角阵合同

(b) 若 A 的所有顺序主子式为正，则 A 正定

(c) 若 A 与正定阵 B 合同，则 A 正定

(d) 若 A 与一对角阵相似，则 A 必与一对角阵合同

3．设 A 为正定矩阵，则下列结论不正确的是（　　）。

(a) A 可逆　　(b) A^{-1} 正定

(c) A 的所有元素为正　　(d) 任给 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$,均有 $X^TAX>0$

4．方阵 A 正定的充要条件是（　　）。

(a) A 的各阶顺序主子式为正；　　(b) A^{-1} 是正定阵；

(c) A 的所有特征值均大于零；　　(d) AA^T 是正定阵。

5．下列 $f(x,y,z)$ 为二次型的是（　　）。

(a) $ax^2+by^2+cz^2$　　(b) $ax+by^2+cz$

(c) $axy+byz+cxz+dxyz$　　(d) $ax^2+bxy+czx^2$

6．设 A、B 为 n 阶方阵，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 且 $X^TAX=X^TBX$ 则 A=B 的充要条件是（　　）。

(a) $r(A)=r(B)$　　(b) $A^T=A$

(c) $B^T=B$　　(d) $A^T=A$，$B^T=B$，

7．正定二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的矩阵为 **A**，则(　　)必成立 .

(a) **A** 的所有顺序主子式为非负数　　(b) **A** 的所有特征值为非负数

(c) **A** 的所有顺序主子式大于零　　　　(d) **A** 的所有特征值互不相同

8．设 A，B 为 n 阶矩阵，若 (　　)，则 A 与 B 合同．

(a)．存在 n 阶可逆矩阵 P,Q 且 $PAQ=B$

(b) 存在 n 阶可逆矩阵 P，且 $P^{-1}AP=B$

(c) 存在 n 阶正交矩阵 Q，且 $Q^{-1}AQ=B$

(d) 存在 n 阶方阵 C,T，且 $CAT=B$

9．下列矩阵中，不是 二次型矩阵的为（　　　）

(a)．$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

10．下列矩阵中是正定矩阵的为（　　　）

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$　　(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$　　(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

11．已知 A 是一个三阶实对称且正定的矩阵，那么 A 的特征值可能是（　　　）

(a) 3，i，－1;　(b) 2，－1, 3;　(c) 2, i, 4;　(d) 1, 3, 4

二、填空题

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3,)=x_1x_2+2x_2x_3+x_3^2$ 的秩为 ____________。

2. 二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2x_2+6x_1x_2+3x_2^2$ 的矩阵为 ____________。

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&4\\2&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则二次型 $f=X^TAX$ 的矩阵为 ___________。

4. 若 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 正定，则 t 的取值范围是 ________。

5. 设 A 为 n 阶负定矩阵，则对任何 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$ 均有 X^TAX___________。

6．任何一个二次型的矩阵都能与一个对角阵 _______。

7．设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&a&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}$是正定矩阵，则 a 满足条件 ______。

8．设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+ax_3^2$ 则当 a 的取值为 __________时，

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定的。

9. 二次型 $f(x_1,x_2)=x_1x_2$ 的负惯性指数是 __________。

10. 二次型 $(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$的矩阵为 _______。

三、计算题

1. 求一个非退化的线性变换，将下列二次型化为标准型。

1） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$

2） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-4x_1x_3+2x_2^2-2x_2x_3$

2. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求非奇异矩阵 C，使 $A=C^TBC$。

3. 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3$ 为标准形，并写出相应的满秩线性变换

4. 求非奇异矩阵 P，使 $P^{-1}AP$为对角阵 .

$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -3 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$

四、证明题

1. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，

且 Q 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

(Ⅰ)求矩阵 A；（II）证明 $A+E$ 为正定矩阵，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

2. 设 A、B 为同阶正定矩阵，λ，$\mu>0$，求证 $\lambda A+\mu B$ 也是正定矩阵。

3. 设 A, B 是同阶正定矩阵，试证 A＋B 也是正定矩阵。

第六章 参考答案

一、单项选择题

1. (d) **2.** (c) **3.** (c) **4.** (b) **5.** (a) **6.** (d) **7.** (c) **8.** (c)

9. (d) 10. (c) 11. (d)

二、填空题

1. 3 2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, **4.** $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

5. <0

6. 合同

7. $a>1$

8. $a>0$

9. 1

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

三、计算题

1.

1） $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

2） $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

3. 解：令 $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 即 $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y = C_1 Y$

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_1y_2+y_1y_3$$

则：

$$=(y_1+\tfrac{1}{2}y_2+\tfrac{1}{2}y_3)^2-\tfrac{1}{4}(y_2+y_3)^2$$

令 $\begin{cases} w_1=y_1+\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}y_3 \\ w_2=y_2+y_3 \\ w_3=y_3 \end{cases}$ 即 $Y=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}W=C_2W$

即 $X=C_1C_2W$ 使 $f(x_1,x_2,x_3)=w_1^2-\frac{1}{4}w_2^2$

4. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

四、证明题

1. 解：由题意 A 的特征值为 1,1,0. 且 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$ 为特征值 0 的特征血量

所以 1 的特征向量若为 $(x_1,x_2,x_3)^T$ 时有

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0$$

解方程即得 Q 的前 2 列为 $(0,1,0)^T$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$

$$\therefore Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\therefore A=Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^T=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

山 西 财 经 大 学

2006—2007 学年第二学期期末

2007 级《线性代数》课程试卷（A）

题 号	一	二	三	四	五	总分
分 数						
评卷人						
复核人						

1、本卷考试形式为 闭卷， 考试时间为 两小时。

2、考生不得将装订成册的试卷拆散，不得将试卷或答题卡带出考场。

3、考生只允许在密封线以外答题，答在密封线以内的将不予评分。

4、考生答题时一律使用蓝色、黑色钢笔或圆珠笔（制图、制表等除外）。

5、考生禁止携带手机、耳麦等通讯器材。否则，视为为作弊。

6、不可以使用普通计算器等计算工具。

一、单项选择题（共 5 小题，每题 2 分，共计 10 分）

二、填空题（共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

三、计算题（一）（共 4 小题，每题 8 分，共计 32 分）

四、计算题（二）（共 3 小题，每题 10 分，共计 30 分）

五、证明题（共 2 小题，每题 4 分，共计 8 分）

本题得分	

一、单项选择题（共 5 小题，每题 2 分，共计 10 分）

答题要求：（每题只有一个是符合题目要求的，请将所选项填在题后的括号内，错选、多选或未选均无分）

1、设 n 阶方阵 A与B 等价，则必有 （ ）

(A) 当 $|A|=a(a\neq 0)$时, $|B|=a$ (B) 当 $|A|=a(a\neq 0)$时, $|B|=-a$

(C) 当 $|A|\neq 0$时, $|B|=0$ (D) 当 $|A|=0$时, $|B|=0$

2、设 A, B 为同阶可逆矩阵，则 （ ）

(A) 矩阵 A 与 B 等价 (B) 矩阵 A 与 B 相似

(C) 矩阵 A 与 B 合同 (D) 矩阵 A 与 B 可交换

3、向量组Ⅰ： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ ；可由向量组Ⅱ： $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则（ ）

(A) 当 $r<s$时，向量组Ⅱ必线性相关

(B) 当 $r>s$时，向量组Ⅰ必线性相关

(C) 当 $r<s$时，向量组Ⅰ必线性相关

(D) 当 $r>s$时，向量组Ⅱ必线性相关

4、已知 β_1和 β_2 是非奇次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解， α_1,α_2 是对应导出组的基础解系， k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $Ax=b$ 的通解（一般解）为（ ）

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$ (B) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$ (D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

5、若方阵 $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 则 C 的特征值为 （ ）

(A) 1，0，1 (B) 1，1，2 (C) -1，1，2 (D) -1，1，1

本题得分	

二、填空题（共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

答题要求：将正确答案填写在横线上

1、已知 α_1，α_2 为 2 维列向量，矩阵 $A=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)$, $B=(\alpha_1,\alpha_2)$，若行列式 $|A|=-6$,则 $|B|=$__________。

2、设 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 A 的逆矩阵 $A^{-1}=$__________。

3、设 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为三阶单位矩阵，则 B 的行列式 $|B|=$__________。

4、设 A 是 3×5 阶矩阵，A 的秩 $r(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，则 $r(BA)=$__________。

5、已知四阶行列式中第二列元素依次为 1，2，3，4，其对应的余子式依次为 4，3，2，1，则该行列式的值为 __________。

6、设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$__________。

7、设四阶矩阵 A 相似于 B，A 的特征值为 2，3，4，5，E 为四阶单位矩阵，则行列式 $|B-E|=$__________。

8、如果 10 阶方阵 A 的各行元素之和均为 0，且 $r(A)=9$，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 __________。

9、若方阵 A 与对角阵相似，且 $A^m=0$，（m 为自然数），则 $A=$__________。

10、若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 正定，则 t 的所属区间

为______________。

本题 得分	

三、计算题（一）（共 4 小题，每题 8 分，共计 32 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，解题时应写出文字说明或计算步骤）

1、解方程 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

2、求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其余的向量。其中 $\alpha_1=(1,\ 4,\ 0,\ 2)^T$，$\alpha_2=(-2,-7,1,-4)^T$，$\alpha_3=(1,4,-1,3)^T$

$\alpha_4=(-4,-4,3,1)^T$，$\alpha_5=(2,5,1,0)^T$。

3、设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 3 & 5 & -1 & 2\\ 5 & 3 & \lambda & 6\end{pmatrix}$，求 A的秩。

4、求矩阵 X，使 $XA=2XB+C$。其中 $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 9\\ 6 & 5 & 7\\ -5 & 3 & -2\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$。

本题得分	

四、计算题（二）（共 3 小题，每题 10 分，共 30 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，解题时应写出文字说明或计算步骤）

1、已知向量 $\beta=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}5\\-5\\12\\11\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\6\\3\end{pmatrix}$，判断向量 β 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，若能，写出它的一般表示方式；若不能，请说明理由。

2、设 $A=\begin{pmatrix}1&-8&1\\4&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$， $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

（1）计算二次型 X^TAX，写出该二次型所对应的矩阵；

（2）将二次型 X^TAX 化为标准形，写出所用的可逆线性变换及变换矩阵。

3、设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & & \\ & y & \\ & & -4\end{pmatrix}$，如果 A,B 相似，求

（1） x,y 的值

（2）相应的正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$。

本题 得分	

五、证明题（共 2 小题，每题 4 分，共计 8 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，并写清证明过程）

1、设 A 为 n 阶方阵， E 为 n 阶单位矩阵，且 $A^2-2A-4E=0$。试证： $A-3E$ 可逆，并求 $(A-3E)^{-1}$。

2、若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 是否线性相关？说明其理由。

2008—2009 学年第二学期期末

线性代数 课程试卷（A）

本题得分	

一、单项选择题（共 5 小题，每题 2 分，共计 10 分）

答题要求：（每题只有一个是符合题目要求的，请将所选项填在题后的括号内，错选、多选或未选均无分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$ 的展开式中， x^2 的系数为 （ ）

(A) -1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 设 A, B 为 n 阶非零矩阵，且 $AB = 0$，则 （ ）

(A) $r(A) + r(B) \le n$ (B) $r(A) = n, r(B) = 0$

(C) $r(A) + r(B) < n$ (D) $r(A) + r(B) > n$

3. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关的充要条件是 （ ）

(A) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 不含零向量

(B) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中任意两个线性无关

(C) 向量 α_1 不能由向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_s$ 线性表出

(D) 任一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，都使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s \neq 0$$

4. 已知四阶方阵 A 有特征值 0，1，2，3，则方程组 $AX = 0$ 的基础解系所含解向量个数为 （ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. n 阶对称阵 A 为正定矩阵的充分必要条件是 (　　)

(A) $|A|>0$　　(B) A 等价于单位矩阵 E

(C) A 的特征值都大于 0　　(D) 存在 n 阶矩阵 C，使 $A=C^TC$

本题得分	

二、填空题（共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

答题要求：将正确答案填写在横线上

1. 三阶行列式 $|a_{ij}|$ 的展开式中，$a_{32}a_{11}a_{23}$ 前面的符号应是 ________。

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 为 A 中元 a_{ij} 的代数余子式，则

$A_{11}+A_{12}+A_{13}=$ ________。

3. 设 n 阶矩阵 A 的秩 $r(A)<n-1$，则 A 的伴随矩阵 A^* 的元素之和

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}=$ ________。

4. 三阶初等矩阵 $E(1,2)$ 的伴随矩阵为 ________。

5. 若非齐次线性方程组 $AX=B$ 有唯一解，则其导出组 $AX=0$ 解的情况是 ________。

6. 若向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ 线性相关，则向量组 $\alpha_2=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ 的线性关系是 ________。

7. 设矩阵 A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，则行列式

$\left|2A^{-1}+A^{*}-3E\right|=$ __________。

8. 如果 n 阶方阵 A 的各行元素之和均为 2，则矩阵 A 必有特征值 ________。

9. 设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 为正交矩阵，则其逆矩阵 $A^{-1}=$ __________。

10. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$ 的正惯性指数为 ____________。

本题得分	

三、计算题（一）（共 4 小题，每题 8 分，共计 32 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，解题时应写出文字说明或计算步骤）

1. 计算 n 阶行列式：$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，(1) 用初等变换法求 A^{-1}；（2）将 A^{-1} 表示为初等矩阵之积。

3. 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\1 & 3 & 0\\-1 & -1 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$，且满足 $AX-2X=B$，求 X。

4. 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 为标准形，并写出可逆的线性变换。

本题得分	

四、计算题（二）（共 3 小题，每题 10 分，共 30 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，解题时应写出文字说明或计算步骤）

1. 当 a 为何值时，方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ \quad\quad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=a \end{cases}$$

有无穷多组解？在有无穷多组解时，用导出组的基础解系表示全部解。

2. 判别向量组 $\beta_1=(1,2,5,2)^T$，$\beta_2=(3,0,7,14)^T$ 能否由向量组 $\alpha_1=(1,-1,0,4)^T$，$\alpha_2=(2,1,5,6)^T$，$\alpha_3=(1,-1,-2,0)^T$ 线性表出，并求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 的一个极大无关组。

3. 设 $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$ 求正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并写出相应的对角阵。

本题得分	

五、证明题（共 2 小题，每题 4 分，共计 8 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，并写清证明过程）

1. 设 n 阶方阵 A 有不同的特征值 λ_1,λ_2，相应的特征向量分别是 α_1,α_2，证明：当 k_1,k_2 全不为零时，线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 不是 A 的特征向量。

2. 设 n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关， A 为 n 阶方阵，证明：向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关。

附：《线性代数》（A 卷）答案要点及评分标准

一. 选择题（共 5 小题，每题 2 分，共计 10 分）

1. B； 2 . A； 3 . D； 4. A； 5 . C.

二. 填空题（ 共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

1. 负号 ； 2 . 1； 3 . 0； 4. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 或 $-E(1,2)$ ； 5 . 唯一解 （或只有零解）； 6 . 线性相关 ； 7 . -27 ； 8. 2； 9. $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ ； 10. 3.

三、计算题（一）（共 4 小题，每题 8 分，共计 32 分）

1、解：按照第一行展开得到

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1}$$

$$= \begin{cases} 2, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

……… 8 分

2、解：

（1） $(A \quad E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ……… 2 分

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-2&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$ ……… 5 分

（2） $A^{-1}=E(1,2(-2))E(3,4(-1))E(4,3(-1))E(3(\frac{1}{2}))$ ……… 8 分

3、解：方法一：由 $AX-2X=B$，得到 $(A-2E)X=B$， …… 2 分

$$(A-2E,E)=\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\-1&-1&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&-1&0&-1\\0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}$$ …… 5 分

所以，$A-2E$ 可逆，$X=(A-2E)^{-1}B=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-1\\1&1\end{pmatrix}$. …… 8 分

方法二：由 $AX-2X=B$，得到 $(A-2E)X=B$， …… 2 分

用初等行变换求 X

$$(A-2E,B)=\begin{pmatrix}1&0&-1&1&1\\1&1&0&0&1\\-1&-1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2&2\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$ ……6 分

所以， $A-2E$ 可逆， $X=(A-2E)^{-1}B=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-1\\1&1\end{pmatrix}$. ……8 分

4、 $f=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

$=(x_1+x_3)^2+(x_2-x_3)^2-x_2^2$ ………6 分

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_3\\y_2=x_2-x_3\\y_3=x_2\end{cases}$ 即可逆线性变换为

$\begin{cases}x_1=y_1+y_2-y_3\\x_2=y_3\\x_3=y_3-y_2\end{cases}$. ………8 分

四、计算题（二）（共 3 小题，每题 10 分，共计 30 分）

1、解：由

$$r(A,b)=\begin{pmatrix}3&2&1&1&-3&0\\0&1&2&2&6&3\\1&1&1&1&1&1\\5&4&3&3&-1&a\end{pmatrix}\rightarrow\cdots$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&a-2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组有无穷多组解，所以 $r(A)=r(A,b)=2$，故 $a=2$ ……4 分

$$r(A,b) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 原方程组等价于方程组

$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = 3 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$$

取 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$，得到特解 $\eta = (-2,3,0,0,0)^T$ ……7 分

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，分别代入等价方程组的齐次线性方程组中求得基础解系为

$$\xi_1 = (1,-2,1,0,0)^T,\quad \xi_2 = (1,-2,0,1,0)^T,\quad \xi_3 = (5,-6,0,0,1)^T$$

方程组的全部解为

$$x = \eta + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$$ 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数

……10 分

2、解：初等行变换矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)$ 到行最简梯矩阵为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 0 & 2 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

……6 分

可得到 β_1, β_2 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且

$$\beta_1 = -\alpha_1 + \alpha_2,\ \beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 的一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ……10 分

3、解：

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-8)(\lambda-2)^2$$ ⋯⋯⋯ 4 分

得到矩阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=8$

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，由 $(2E-A)x=0$ 得一个基础解系

$\xi_1=(-1,1,0)^T, \xi_2=(-1,0,1)^T$

正交化，单位化 $\beta_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$， $\beta_2=(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3})^T$ ⋯7 分

当 $\lambda_3=8$ 时，由 $(8E-A)x=0$ 的一个基础解 $\xi_3=(1,1,1)^T$

将其单位化得 $\beta_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$ ⋯⋯⋯ 9 分

则正交阵 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，使 $P^{-1}AP=B$，

相应的对角阵为 $\Lambda=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ ⋯⋯ 10 分

五、证明题（共 2 小题，每题 4 分，共计 8 分）

1、证明： $A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=Ak_1\alpha_1+Ak_2\alpha_2=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2$

因为 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$

$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2$ 而 $\lambda_1\neq\lambda_2$

所以 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$不是 A的特征向量 . ········· 4 分

2、证明：由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，根据定义，存在不全为 0 的$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ ，用矩阵 A 左乘等号两边得到

$A k_1\alpha_1+A k_2\alpha_2+\cdots+A k_s\alpha_s=k_1 A\alpha_1+k_2 A\alpha_2+\cdots+k_s A\alpha_s=0$

k_i不全为 0，根据线性相关的定义

得到向量组 $k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,\cdots,k_s\alpha_s$线性相关 . ········· 4 分

山 西 财 经 大 学

2009—2010 学年第二学期期末

本题得分	

一、单项选择题（共 5 小题，每题 2 分，共计 10 分）

答题要求：（每题只有一个是符合题目要求的，请将所选项填在题后的括号内，错选、多选或未选均无分）

1. 在 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & x+1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ x+1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 展开式中，x^2 的系数为（　　）

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2

2. A 是 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=r$，B 是 m阶可逆矩阵，C 是 m阶不可逆矩阵，且 $r(C)<r$，则（　　）

(A) $BAX=O$ 的基础解系由 n-m 个向量组成

(B) $BAX=O$ 的基础解系由 n-r 个向量组成

(C) $CAX=O$ 的基础解系由 n-m 个向量组成

(D) $CAX=O$ 的基础解系由 n-r 个向量组成

3. 设 n 阶矩阵 A,B 有共同的特征值，且各自有 n 个线性无关的特征向量，则（　）

(A) $A=B$　(B) $A\neq B$，但 $|A-B|=0$

(C) $A\sim B$　(D) A与B 不一定相似，但 $|A|=|B|$

4. 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，且 $AB=BC=CA=E$，其中 E 为 n 阶单位阵，则

$A^2+B^2+C^2=$（　　）

(A) O　(B) E　(C) 2E　(D) 3E

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$，则 A与B　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)

(A) 合同，且相似　　　(B)　　不合同，但相似

(C) 合同，但不相似　　　（D）既不合同，又不相似

本题得分	

二、填空题（共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

答题要求：将正确答案填写在横线上

1. 已知 $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=m\neq 0$，则 $\begin{vmatrix}2a_1&b_1+c_1&3c_1\\2a_2&b_2+c_2&3c_2\\2a_3&b_3+c_3&3c_3\end{vmatrix}=$____________。

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，若三阶矩阵 Q 满足 $AQ+E=A^2+Q$，则 Q 的第一行的行向量是 ___________。

3. 已知 β 为 n 维单位列向量，β^T 为 β 的转置，若 $C=\beta\beta^T$，则 $C^2=$______________。

4. 设 α_1,α_2 分别是属于实对称矩阵 A 的两个互异特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，则 $\alpha_1^T\alpha_2=$ __________。

5. 设 A 是四阶矩阵，A^* 为其伴随矩阵，α_1,α_2 是齐次方程组 $AX=0$ 的两个线性无关解，则 $r(A^*)=$_____________。

6. 向量组 $\alpha_1=(1,3,0,5,0)^T, \alpha_2=(0,2,4,6,0)^T, \alpha_3=(0,3,0,6,9)^T$ 的线性关系是__________。

7. 已知三阶非零矩阵 B 的每一列都是方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 的解，则 $\lambda=$__________。

8. 已知三维向量空间 R^3 的基底为 $\alpha_1=(1,1,0)^T, \alpha_2=(1,0,1)^T, \alpha_3=(0,1,1)^T$，则向量

$\beta=(2,0,0)^T$ 在此基底下的坐标是 ________。

9. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix} \square \begin{pmatrix}1&0&0\\0&a&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，则 $a=$ ________。

10. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的秩为 ________。

本题 得分	

三、计算题（一）（共 4 小题，每题 8 分，共计 32 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上， 解题时应写出文字说明或计算步骤）

1. 试求行列式 $D=\begin{vmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\1&2&3&4\end{vmatrix}$ 的第四行元素的代数余子式之和 .

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$，求 $(AB)^{-1}$.

3．设 n 阶方阵 A,B 满足 $A+2B=AB$，已知 $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

4．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$中，二次型的矩阵 A的特征值之和为 1，特征值之积为 -12．（1）求 a,b 的值；（2）用配方法化该二次型为标准形 .

本题得分	

四、计算题（二）（共 3 小题，每题 10 分，共 30 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，解题时应写出文字说明或计算步骤）

1. 当 λ 为何值时，方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

无解、有唯一解或有无穷多组解？在有无穷多组解时，用导出组的基础解系表示全部解．

2 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 2, 0)^T$, $\alpha_2 = (7,0,14,3)^T$，$\alpha_3 = (2,-1,0,1)^T$，$\alpha_4 = (5,1,6,2)^T$, $\alpha_5 = (2,-1,4,1)^T$，（1）求向量组的秩；（2）求该向量组的一个极大无关组，并把其余向量分别用该极大无关组线性表示．

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$；判断 A 能否对角化，若可对角化，求正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并写出相应的对角矩阵。

本题得分	

五、证明题（共 2 小题，每题 4 分，共计 8 分）

答题要求：（请将答案写在指定位置上，并写清证明过程）

1. 设 α 是 n 阶矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量．证明：α 也是 A^5-4A^3+E 的特征向量． 其中 E 为 n 阶单位矩阵．

2. 设 n 维向量组 α , β , γ 线性无关，向量组 α , β , δ 线性相关，证明： δ 必可由 α , β , γ 线性表示 .

2009—2010 学年第二学期期末

《线性代数》（A 卷）答案要点及评分标准

一． 选择题（共 5 小题，每题 2 分，共计 10 分）

1. A； 2 ． B； 3 ． C； 4. D； 5 ． C.

二．填空题（ 共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

1. 6m； 2 ． (2,0,1) ； 3. $\beta\beta^T$ ； 4 ． 0； 5 ． 0；

6. 线性无关 ； 7 ． 1 ； 8. 1,1,-1 ； 9. 1； 10. 2 .

三、计算题（一）（共 4 小题，每题 8 分，共计 32 分）

1、解：

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ ………4 分

$$=\begin{vmatrix} a & b-a & b-a & b-a \\ b & a-b & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(a-b)^3$$ ………8 分

2、解：方法一： $$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

………2 分

$$(AB\quad E)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&0&1&0\\0&9&3&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&3&0&-\frac{9}{2}&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&-\frac{3}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

所以 $(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ ……… 8 分

（2）方法二：

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$ ……… 8 分

3、解：方法一：由 $A+2B=AB$，得到 $A(E-B)=-2B$， …… 2 分

$$(E-B,E)=\begin{pmatrix}0&-2&0&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\0&0&-2&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ ……5 分

所以， $E-B$ 可逆， $A=-2B(E-B)^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. ……8 分

方法二：由 $A+2B=AB$， 得到 $A(E-B)=-2B$， ……2 分

用初等列变换求 A

$$\begin{pmatrix}E-B\\-2B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&0\\1&-1&0\\0&0&-2\\-2&-4&0\\2&-4&0\\0&0&-6\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\3&-2&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

……6 分

所以， $A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. ……8 分

4、 解：二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}$ 根据题意得到

$a+2+(-2)=1, -4a-2b^2=-12$ $a=1, b=2$ ………4 分

$f=x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_3=(x_1+2x_3)^2+2x_2^2-6x_3^2$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$，标准形为 $y_1^2 + 2y_2^2 - 6y_3^2$.　　　　………8 分

四、计算题（二）（共 3 小题，每题 10 分，共计 30 分）

1、解： $|A| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(5\lambda + 4)$　由克莱姆法则

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$ 时，方程组有唯一解；　　　　……2 分

当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时

$$r(A,b) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{4}{5} & -1 & 1 \\ -\frac{4}{5} & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 10 & -4 & -5 & 5 \\ -4 & -5 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

有 $r(A) \neq r(A,b)$，所以方程组无解；　　　　……4 分

当 $\lambda = 1$ 时

$$r(A,b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

有 $r(A) = r(A,b) = 2 < 3$，方程组有无穷多组解，原方程组等价于方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

取 $x_3 = 0$，得到特解 $\eta = (1,-1,0)^T$

令 $x_3 = 1$，代入等价方程组的齐次线性方程组中求得基础解系为

$\xi=(1,0,1)^T$

方程组的全部解为

$x=\eta+k\xi$ 其中 k 为任意常数 ……10 分

2、解：初等行变换矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 到行最简梯矩阵为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&7&2&5&2\\3&0&-1&1&-1\\2&14&0&6&4\\0&3&1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

……6 分

可得向量组的秩为 3,

向量组的一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$， 且

$\alpha_4=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2+\alpha_3,\alpha_5=-\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2$ ……10 分

3、解： A的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$$ ………3 分

得到矩阵 A的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$时，由 $(-E-A)x=0$得一个基础解系

$\xi_1=(-1,1,0)^T,\xi_2=(-1,0,1)^T$

正交化，单位化 $\beta_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$， $\beta_2=(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3})^T$

当 $\lambda_3=5$时，由 $(5E-A)x=0$ 的一个基础解 $\xi_3=(1,1,1)^T$

将其单位化得 $\beta_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$ ·········8 分

因此 A能对角化

且正交阵 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, 使 $P^{-1}AP=\Lambda$,

相应的对角阵为 $\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ ······10 分

五、证明题（共 2 小题，每题 4 分，共计 8 分）

1、证明： 因为 $A\alpha=\lambda\alpha$， 有

$$(A^5-4A^3+E)\alpha=A^5\alpha-4A^3\alpha+\alpha$$
$$=\lambda^5\alpha-4\lambda^3\alpha+\alpha=(\lambda^5-4\lambda^3+1)\alpha$$

根据特征值和特征向量的定义得 α 也是 A^5-4A^3+E 的特征向量 .

·········4 分

2、证明：由 α,β,γ 线性无关，得到 α,β 线性无关，又 α,β,δ 线性相关，则 δ 可以由 α,β 线性表示，所以 δ 必可由 α,β,γ 线性表示 .

·········4 分

山西财经大学华商学院

2008-2009 学年第二学期期末

线性代数 课程试卷（ A）

1 、本卷考试形式为 闭卷， 考试时间为 两小时。

2、考生不得将装订成册的试卷拆散， 不得将试卷或答题卡带出考场。

3、考生只允许在密封线以外答题，答在密封线以内的将不予评分。

4、考生答题时一律使用蓝色、黑色钢笔。

5、考生禁止携带手机、耳麦等通讯器材。否则，视为作弊。

6、禁止使用电子翻译工具和字典。

客观题：

一、单项选择题（共 10 题，每题 2 分，共 20 分， 1—10 题）

二、判断题 （共 10 题，每题 1 分，共 10 分， 11--20 题）

主观题：

S1：填空题 （共 5 题，每题 2 分，共 10 分）

S2：计算题 (一) （共 3 题，每题 6 分，共 18 分）

S3：计算题 (二) （共 2 题，每题 8 分，共 16 分）

S4：计算题 (三) （共 2 题，每题 10 分，共 20 分）

S5：证明题　（共 1 题，每题 6 分，共 6 分）

第一部分　客观题（共 30 分）

一、单项选择题（共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 若行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = d$，则 $\begin{vmatrix} a_{21} & 2a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ a_{31} & 2a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}$ 等于 (　　)

(A) 2d　　(B) 3d　　(C) 6d　　(D) $-6d$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$M_{ij}$ 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的余子式，则 $M_{31} - M_{32} + M_{33} =$ (　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

3. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则下列各式恒成立的是（　　）

(A) $|2A| = 2|A^T|$　　(B) $(2A)^{-1} = 2A^{-1}$

(C) $|A^*| = |A^{-1}|$　　(D) $[(A^T)^T]^{-1} = [(A^{-1})^T]^T$

4. 初等矩阵满足（　　）

(A) 任两个之乘积仍是初等矩阵　　(B) 任两个之和仍是初等矩阵

(C) 都是可逆矩阵　　(D) 所对应的行列式的值为 1

5. 下列不是 n 阶矩阵 A 可逆的充要条件为（　　）

(A) $|A| \neq 0$　　(B) A 可以表示成有限个初等阵的乘积

(C) 伴随矩阵存在　　(D) A 的等价标准型为单位矩阵

6. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，C 为 n 阶可逆矩阵，$B = AC$，则 (　　)。

(A) 秩(A)> 秩(B)　　(B) 秩(A)= 秩(B)

(C) 秩(A)< 秩(B) (D) 秩(A)与秩(B)的关系依 C 而定

7. 如果向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示 ,则下列结论中正确的是（ ）

(A) 存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_s$，使得 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 成立

(B) 存在一组全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_s$，使得 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 成立

(C) 存在一组数 $k_1,k_2,\cdots k_s$，使得 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 成立

(D) 对 β 的线性表达式唯一

8. 设 ξ_1,ξ_2 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，η_1,η_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解，则（ ）

(A) $2\xi_1+\eta_1$ 为 $AX=0$ 的解 (B) $\eta_1+\eta_2$ 为 $AX=b$ 的解

(C) $\xi_1+\xi_2$ 为 $AX=0$ 的解 (D) $\eta_1-\eta_2$ 为 $AX=b$ 的解

9. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 则 A 的特征值是（ ）。

(A) 0,1,1 (B) 1,1, 2 (C) $-1,1,2$ (D) $-1,1,1$

10. 若 n 阶方阵 A 与某对角阵相似，则 ( )。

(A) $r(A)=n$ (B) A 有 n 个互不相同的特征值

(C) A 有 n 个线性无关的特征向量 (D) A 必为对称矩阵

二、判断题（共 10 小题，每小题 1 分，共 10 分 ）注：正确选择 A, 错误选择 B.

11. 设 A 和 B 为 n 阶方阵，则有 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$。（ ）

12. 当 n 为奇数时，n 阶反对称矩阵 A 是奇异矩阵。（ ）

13. 设 A, B, C 为同阶方阵， $AB = AC$，则 $B = C$。（ ）

14. 若矩阵 A 有一个 r 阶子式 $D \neq 0$，且 A 中有一个含有 D 的 $r+1$ 阶子式等于零，则 A 的秩等于 r。（ ）

15. 若非齐次线性方程组 $AX = b$ 有无穷多解，则其导出组 $AX = 0$ 一定有非零解。（ ）

16 若向量组 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ 线性无关，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_9$ 线性无关。（ ）

17. 等价的向量组的秩相等。（ ）

18. 设 A 与 B 都是 n 阶正交矩阵，则 $A+B$ 也是正交矩阵。（ ）

19. 矩阵 A 不同特征值对应的特征向量必线性无关。（ ）

20. 两个相似的方阵必等价，两个合同的方阵也必等价。（ ）

第二部分 主观题（共 70 分）

题 号	得 分
s1	

三、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1. 在5阶行列式中，$a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}$ 的符号是 ________

2. 若 A 为 3 阶方阵，A^{-1} 为 A 的逆矩阵且 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $A =$ ________.

3.线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 仅有零解的充要条件是 ________.

4.已知三阶矩阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$，则 $|A^3 - 5A^2 + 7A| =$ ________.

5. 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + tx_2^2 + 3x_3^2$，当 $t =$ ______时，其秩为 2。

题 号	得 分
s2	

四、计算题（一）（共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

1. 计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

2. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 2, 1)^T$，$\alpha_2 = (1, 0, 0, 2)^T$，$\alpha_3 = (-1, -4, -8, k)^T$ 线性相关，求 k.

3. 设$\alpha_1=(1,-2,2)^T$， $\alpha_2=(-1,0,-1)^T$， $\alpha_3=(5,-3,-7)^T$， 用施密特正交化法将该向量组正交化。

题 号	得 分
s3	

五、计算题（二）（共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$， 若矩阵 X 满足 $AX-X=B$， 求 X 。

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & a\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，问 a 为何值时，矩阵 A 能对角化？

题 号	得 分
s4	

六、计算题（三）（共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

1.当 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=\lambda \end{cases}$$

有解？在有解的情况下，求其全部解（若有无穷解，用其导出组的基础解系表示）。

2. 求向量组 $\alpha_1=(2,1,4,3)^T$、$\alpha_2=(-1,1,-6,6)^T$、$\alpha_3=(-1,-2,2,-9)^T$、$\alpha_4=(1,1,-2,7)^T$、$\alpha_5=(2,4,4,9)^T$的一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示。

题 号	得 分
s5	

七、证明题（共 1 小题，每题 6 分，共计 6 分）

设 λ_1和 λ_2是矩阵 A的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为 p_1和 p_2，证明 p_1+p_2不是 A的特征向量。

山西财经大学华商学院

2009-2010 学年第二学期期末

<u>线性代数</u>课程试卷（ A）及答案

本题得分	

一、单项选择题（共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

答题要求：请将正确选项前的字母填在题后的括号内

1. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式 $|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_1| = m$，$|\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \alpha_3| = n$，则四阶行列式 $|\alpha_3\ \alpha_2\ \alpha_1\ (\beta_1+\beta_2)| =$ (C)

   (A)m+n　(B)-(m+n)　(C)n-m　(D)m-n

2. 设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2-a & 3 \\ 2 & 6 & 5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ b & 6 & c-8 \end{pmatrix}$，则（ B）

   (A) $a=1\quad b=-2\quad c=2$　(B) $a=1\quad b=2\quad c=-2$

   (C) $a=-1\quad b=-2\quad c=2$　(D) $a=-1\quad b=2\quad c=-2$

3. 若 A、B 均为非零方阵，且 AB=O，则有 A、B（D）

   (A) 都可逆　(B) 至少有一个可逆　(C)r(A)=r(B)　(D) 都不可逆

4. 下列向量中，可由 $\alpha_1=(0,1,0)^T$ 与 $\alpha_2=(1,0,0)^T$ 线性表示的是（ B）

   (A) $(0,0,1)^T$　(B) $(0,3,0)^T$　(C) $(0,2,1)^T$　(D) $(2,0,1)^T$

5. 设矩阵 A 满足 $A^2+4A-5E=O$，则（ A）

   (A)A 与 A+4E同时可逆　(B)A+5E 一定可逆

(C) 齐次线性方程组 $(A+5E)X=O$有非零解　(D)A-E　一定可逆

6. 若 n 阶矩阵 A的行列式 $|A|=1$，则 A的秩为（ D）

(A)1　(B)0　(C)n-1　(D)n

7. 设 A为 n 阶方阵，且 $|A|=0$，有（ C）

(A)A 中必有两行（列）元素对应成比例

(B)A 中至少有一行（列）元素全为零

(C)A 中必有一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合

(D)A 中任意一行（列）向量是其余各行（列）向量的线性组合

8. 设 A为 $m\times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 AX=O 仅有零解的充要条件是（D）

(A)A 的行向量线性相关　(B)A　的列向量线性相关

(C)A 的行向量线性无关　(D)A　的列向量线性无关

9. 可逆矩阵 A与矩阵（ A）有相同的特征值

(A) A^T　(B)　A^{-1}　(C)　A^2　(D)A+E

10. α_1与α_2分别是 n 阶方阵 A的属于特征值 λ_1,λ_2的特征向量，若$\lambda_1\neq\lambda_2$，则α_1与α_2（B）

(A) 线性相关　(B)　线性无关　(C)　相等　(D)　正交

本题得分	

二、判断题（共 10 小题，每题 1 分，共计 10 分）

答题要求：判断正误，正确选择 A，错误选择 B

11. 若方阵 A^T 可逆，则 A^* 也可逆 （A）

12. 设 A、B 均为 n 阶方阵，则 $|A+B|=|A|+|B|$ （B）

13. 对任意 n 阶方阵（n>1）A 与 B, 都有 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ （B）

14. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 等价，则 $s=t$ （B）

15. 若齐次线性方程组 AX=O 存在基础解系，则方程组 AX=b（b≠0）有无穷多解 (B)

16. 若同阶矩阵 A 与 B 的秩相等，则 A 可经过有限次的初等变换化成 B

（A）

17. 若 λ 是方阵 A 的特征值，则 λ^n 是 A^n 的特征值（其中 n 为自然数）（A）

18. 若 n 阶方阵 A 相似于对角矩阵，则 A 有 n 个互异特征值 （B）

19. 设 X_1 与 X_2 是 A 的任意两个特征向量，则 X_1+X_2 也是其特征向量

（B）

20. 若 A 为正交矩阵，则 $|A|=\pm1$ （A）

本题得分	

三、填空题（共 10 小题，每题 2 分，共计 20 分）

答题要求：请将最终答案直接填在题中横线上 .

21. 设 A 为三阶矩阵，且 $|A|=2$，则 $|3A|=$ __54__

22. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，则 $(A+E)^{-1}(A^2-E)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

23. 设矩阵 A 可逆，则其伴随矩阵 A^*可逆，且 $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$

24. 如果 4×5 阶矩阵 A 的行向量组线性无关，则齐次线性方程组 AX=O 的基础解系中含有 $\underline{1}$ 个向量

25. 若向量组中含有零向量，则此向量组线性相关____

26. 若 $\alpha_1=(1,2,k,4)^T$ 与 $\alpha_2=(4,3,2,-2)^T$ 正交，则 $k=\underline{-1}$

27. 设 A 为正交矩阵，则 $|A^TA|=\underline{1}$

28. 设三阶矩阵 A 的特征值为 -2、1、4，则 $|A|=\underline{-8}$

29. 已知-5 是方阵 A 的特征值，则 A-2E 一定有一个特征值 $\underline{-7}$

30. 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 为非齐次线性方程组 AX=b的一组解，如果 $c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_s\eta_s$ 也是该方程组的一个解，则 $\sum\limits_{i=1}^{s}c_i=\underline{1}$

本题得分	

S1：计算题一（共 2 小题，每题 8 分，共 16 分）

答题要求：写出文字说明和主要验算步骤

1. 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix}3&-1&-1&0\\1&2&3&4\\1&2&0&5\\1&0&1&2\end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix}3&-1&-1&0\\1&2&3&4\\1&2&0&5\\1&0&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&1&2\\1&2&3&4\\1&2&0&5\\3&-1&-1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&2&2&2\\0&2&-1&3\\0&-1&-4&-6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&2&-1&3\\0&1&4&6\end{vmatrix}$

$$=2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&-3&1\\0&0&3&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&-3&1\\0&0&0&6\end{vmatrix}=-36$$

2. 解矩阵方程 $(E-A)X=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&3\end{pmatrix}$

解： $E-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$

$$(E-A,B)=\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&2&5&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&1&2&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&3&3&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&1\\0&1&0&2&2\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}\qquad\therefore X=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\\1&1\end{pmatrix}$$

本题 得分	

S2：计算题二（共 3 小题，每题 10 分，共 30 分）

答题要求：写出文字说明和主要验算步骤

1. 给定向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T$， $\alpha_2=(1,-1,1,-1)^T$， $\alpha_3=(1,3,1,3)^T$，

$\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T$ ，求该向量组的秩，并确定一个极大无关组，将其余向量用该极大无关组线性表示。

解：
$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&3&-1\\1&1&1&-1\\1&-1&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&2&-2\\0&0&0&-2\\0&-2&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以：$r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是一个极大无关组，且 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$

2. 用其导出组的基础解系表示下面方程组的全部解

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-2x_4=0\\2x_1-x_2-x_3+x_4=1\\3x_1+x_2-2x_3-x_4=1\end{cases}$$

$$\text{解}:\bar{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&-2&0\\2&-1&-1&1&1\\3&1&-2&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&-2&0\\0&-5&1&5&1\\0&-5&1&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&-2&0\\0&-5&1&5&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&-3&0&3&1\\0&-5&1&5&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}x_1=1-3x_4+3x_2\\x_3=1-5x_4+5x_2\end{cases}$$

令 $x_2=x_4=0$，得线性方程组的一个特解 $\gamma_0=(1,0,1,0)^T$

其导出组的一般解为：$\begin{cases}x_1=3x_4+3x_2\\x_3=5x_4+5x_2\end{cases}$

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$分别为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

得导出组的基础解系为： $\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以，方程组的全部解为： $\gamma_0 + c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ （c_1, c_2为任意实数 ）

3.已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$的特征值为 -1,2 ， 5, 求正交矩阵 P， 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

解： 当 $\lambda_1 = -1$时，由 $(-E - A)X = O$，得基础解系为 $p_1 = (2,2,1)^T$

当 $\lambda_2 = 2$时，由 $(2E - A)X = O$，得基础解系为 $p_2 = (2,-1,-2)^T$

当 $\lambda_3 = 5$时，由 $(5E - A)X = O$，得基础解系为 $p_3 = (1,-2,2)^T$

不难验证 p_1, p_2, p_3是正交向量组，把 p_1, p_2, p_3单位化，得

$\eta_1 = \dfrac{p_1}{\|p_1\|} = (2/3,\ \ 2/3,\ \ 1/3)^T$； $\eta_2 = \dfrac{p_2}{\|p_2\|} = (2/3,\ \ -1/3,\ \ -2/3)^T$

$\eta_3 = \dfrac{p_3}{\|p_3\|} = (1/3,\ \ -2/3,\ \ 2/3)^T$

取$P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$，有$P^{-1}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(-1, 2, 5)$

本题得分	

S3：证明题（共 1 小题，共计 4 分）

答题要求：应写出文字说明

1. 已知 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关。

证明： $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=O$

整理得： $(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=O$

∵ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

$$\therefore \begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

解得： $k_1=k_2=k_3=0$

所以，向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关。

第三部分　近六年考研试题

一、单项选择题

1.[2006-3] 若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 均为 n 维列向量，A 是 $m \times n$ 矩阵，下列选项正确的是

(A) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性相关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性相关．

(B) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性相关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性无关．

(C) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性无关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性相关．

(D) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性无关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性无关． [A]

2.[2006-3、4] 设 A 为 3 的阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

(A) $C=P^{-1}AP$．　(B) $C=PAP^{-1}$．　(C) $C=P^{T}AP$．　(D) $C=PAP^{T}$．　[B]

3.[2007-3、4] 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$　(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$　[A]

4[2007-3、4]设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B

(A) 合同，且相似　(B) 合同，但不相似

(C) 不合同，但相似　(D) 不合同，也不相似　[B]

5. [2008-3] 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 $A^3=0$，则

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆．　(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆．

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆．　(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆　[C]

6. [2008-3] 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 A 合同的矩阵为

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$　[D]

7. [2009-3] 设 A, B 均为 2 阶矩阵，A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵，若 $|A|=2$，$|B|=3$，则

分块矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & A \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 3\mathbf{B}^* \\ 2\mathbf{A}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 2\mathbf{B}^* \\ 3\mathbf{A}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 3\mathbf{A}^* \\ 2\mathbf{B}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 2\mathbf{A}^* \\ 3\mathbf{B}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ [B]

8. [2009-3] 设 $\mathbf{A}, \mathbf{P}$ 均为 3 阶矩阵，$\mathbf{P}^T$ 为 $\mathbf{P}$ 的转置矩阵，且 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 若

$\mathbf{P} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$\mathbf{Q} = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$，则 $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$ 为

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ [A]

9. [2010-3] 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性表出 . 下列命题正确的是

(A) 若向量组 I 线性无关，则 $r \le s$ (B) 若向量组 I 线性相关，则 $r > s$

(C) 若向量组 II 线性无关，则 $r \le s$ (D) 若向量组 II 线性相关，则 $r > s$ [A]

10. [2010-3] 设 $\mathbf{A}$ 为 4 阶实对称矩阵，且 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = \mathbf{O}$.若 $\mathbf{A}$ 的秩为 3，则 $\mathbf{A}$ 相似于

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ [D]

11.[2011-3] 设 A 为 3 阶方阵，将 A 的第 2 列加到第一列得到矩阵 B，再交换 B 的第二行与第三行得单位矩阵，记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 A=

(A) P_1P_2 (B) $P_1^{-1}P_2$ (C) P_2P_1 (D) $P_1P_2^{-1}$ [D]

12. [2011-3] 设 A 为 4×3 矩阵，η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的 3 个线性无关的解，k_1, k_2 为任意常数，则 $Ax = \beta$ 的通解为

(A) $\dfrac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$ (B) $\dfrac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$

(C) $\dfrac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$ (D) $\dfrac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$ [C]

二、填空题

1.[2006-3、4] 已知 a_1,a_2 为 2 维列向量，矩阵 $A=(2a_1+a_2,a_1-a_2)$，$B=(a_1,\ a_2)$.若行列式 $|A|=6$，则 $|B|=$ __-2__.

2.[2006-4] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，E 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足矩阵 $BA=B+2E$，则 B $=\underline{\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}}$

3.[2007-3、4] 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为 __1__

4. [2008-3] 设 3 阶矩阵 A 的特征值是 1, 2, 2，E 为 3 阶单位矩阵，则 $\left|4A^{-1}-E\right|=$ __3__

5. [2009-3] 设 $\alpha=(1,1,1)^T$，$\beta=(1,0,k)^T$。若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$ __2__.

6. [2010-3] 设 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\mathbf{A}|=3$，$|\mathbf{B}|=2$，$|\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}|=2$，则 $|\mathbf{A}+\mathbf{B}^{-1}|=$ __3__.

7. [2011-3] 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的秩为 1，A 的各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $\underline{3y_1^2}$.

三、解答题

1.[2006-3、4] 设 4 维向量组 $a_1=(1+a,1,1,1)^T$，$a_2=(2,2+a,2,2)^T$，$a_3=(3,3,3+a,3)^T$，$a_4=(4,4,4,4+a)^T$，问 a 为何值时，a_1,a_2,a_3,a_4 线性相关？当 a_1,a_2,a_3,a_4 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

2.[2006-3、4] 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量 $a_1=(-1,2,-1)^T$，$a_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(Ⅰ) 求 A 的特征值与特征向量； (Ⅱ) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使得 $Q^TAQ=\Lambda$；

(III) 求 A 及 $\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.