

主管
领导
审核
签字

哈尔滨工业大学（深圳）2017 学年 秋 季学期

《代数与几何》试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范 遵守考场纪律

姓名

密

学号

封

班号

线

学院

注：本试卷中 E 表示单位矩阵， $R(A), A^*, A^T$ 分别表示 A 的秩， A 的伴随矩阵和 A 的转置矩阵。

一、填空题（每小题 1 分，共 5 分）

1. 如果
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$
, 则 $x =$ _____。

2. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$, 则 $A^{10} =$ _____。

3. 过点 $(2, 0, -3)$ 且与直线 $\begin{cases} x - 2y + 4z - 7 = 0 \\ 3x + 5y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ 垂直的平面方程是 _____。

4. 已知空间中四点 $A(1, 1, 1), B(4, 4, 4), C(3, 5, 5), D(2, 4, 7)$, 则四面体 $ABCD$ 的体积是 _____。

5. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩 $R(A) =$ _____。

二、选择题 (每小题 1 分, 共 5 分)

1. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 设 B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵, 若 $AB = E$, 则 ()。

(A) 秩 $R(A) = m$, 秩 $R(B) = m$ (B) 秩 $R(A) = m$, 秩 $R(B) = n$

(C) 秩 $R(A) = n$, 秩 $R(B) = m$ (D) 秩 $R(A) = n$, 秩 $R(B) = n$

2. 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵,

记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A = ($)。

(A) $P_1 P_2$ (B) $P_1^{-1} P_2$ (C) $P_2 P_1$ (D) $P_2 P_1^{-1}$

3. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 下述论断不正确的是 ()。

(A) A 可逆, 且 $AB = 0$, 则 $B = 0$

(B) A, B 中有一个不可逆, 则 AB 不可逆

(C) A, B 可逆, 则 $A+B$ 可逆

(D) A, B 可逆, 则 $A^T B$ 可逆

4. 若向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的秩为 r , 则下列结论哪一个不成立 ()。

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中至少有一个含 r 个向量的向量组线性无关

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中任意 r 个线性无关的向量组与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 等价

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中任意 r 个向量都线性无关

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中 $r+1$ 个向量均线性相关

5. 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵。若 $|A|=2$, $|B|=3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$

的伴随矩阵为 ()。

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$

三、(4分) 求两异面直线 $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, $l_2: x-2=y=z-3$ 之间的距离。

姓名

学号

班号

学院

密

封

线

四、(4分) 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a+1 & b & c & d \\ a & b+2 & c & d \\ a & b & c+3 & d \\ a & b & c & d+4 \end{vmatrix}$.

五、(4分) 已知 $A^*X = A^{-1} + 2X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X .

六、(3分) 设 A 是 $m \times n (m \geq n)$ 矩阵, 若 $R(A) = n$, $AB = 0$, 则 $B = 0$.

姓名

学号

班号

学院

七、(3分) 设 α, β 是 3 维列向量, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 其中 α^T, β^T 分别为 α, β 的转置。证明:

(1) $R(A) \leq 2$.

(2) 若 α, β 线性相关, 则 $R(A) < 2$.

八、(2分) 设 A 是 n 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 n 维列向量。已知 $A\alpha_1 = c_1\alpha_1$, $A\alpha_2 = c_2\alpha_1 + c_1\alpha_2$, $A\alpha_3 = c_2\alpha_2 + c_1\alpha_3$, $c_2 \neq 0$. 如果 α_1, α_2 线性无关, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。