哈尔滨工业大学（深圳）2018 级《代数与几何》期中试题及答案

（此卷满分 30 分）

注：本试卷中 $R(\boldsymbol{A})$ 、$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 、$\boldsymbol{A}^*$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵、$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵.

一、填空题（每小题 1 分，共 5 分）

1．行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$ ______________.

2．设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n =$ ____________________ .

3．已知两直线 $L_1: x-1=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$, $L_2: \dfrac{x+2}{2}=y-1=z$，则过 L_1 且平行于 L_2 的

平面方程为__________________.

4．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=$__________________.

5．设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=a\neq 0$，则 $\left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^{-1}\right| =$ ____________________ .

二、选择题（每小题 1 分，共 5 分）

1．过点 $(2,-1,3)$，且和平面 $\pi_1: 2x-y+3z-1=0$ 与 $\pi_2: 5x+4y-z-7=0$

都平行的直线方程为 【 】

（A）$\dfrac{x-2}{11}=\dfrac{y+1}{-17}=\dfrac{z-3}{-13}$；　（B）$\dfrac{x-2}{-11}=\dfrac{y+1}{-17}=\dfrac{z-3}{13}$；

（C）$11x-17y-13z=0$；　（D）$11x+17y-13z=0$.

2．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n（n>1）阶方阵，则下列结论正确的是 【 】

（A）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|$；　（B）$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^*)$；

（C）$\boldsymbol{A}^* = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{-1}$；（D）若$|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则$|\boldsymbol{A}^*| \neq 0$.

3. 设$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}$是4阶方阵，且$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}) = 3$，则$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{AB} - 2\boldsymbol{B})$为【　　】

（A）4；（B）3；（C）2；（D）1.

4. 设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，$\boldsymbol{B}$为3阶可逆阵，且$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，若将$\boldsymbol{B}$的第2列加到第1列得$\boldsymbol{P}$，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为【　　】

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

5. 设$\boldsymbol{A}$为3阶方阵，满足$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，若$a_{31} = a_{32} = a_{33} > 0$，则$a_{31}$的值为【　　】

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；（B）3；（C）$\dfrac{1}{3}$；（D）$\sqrt{3}$.

三、**（本题5分）**

求过点$M_0(2,1,3)$且与直线$L:\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

四、**（本题 5 分）** 设矩阵$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，其中$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{AB}$.

五、（本题 5 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶可逆方阵，满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$ ，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，

. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

六、（本题 3 分）设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, n\in\mathrm{N}, k$ 为常数，（1）求 R（A）（2）求行列式 $|k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{n}|$ 的值.

七、（本题 2 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 可逆，满足 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}$，.

证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

参考答案

一、填空题

1．-15　　2、$(-4)^{n-1}\boldsymbol{A}$．3．$x-3y+z+2=0$　　4．n　　5．$(-1)^{n^2}a^{-n}$

二、选择题

1．A　　2．D　　3．B　　4．D　　5、A.

三、解：$L:\begin{cases} x=-1+3t \\ y=1+2t \\ z=-t \end{cases}$

设过M_0与L垂直相交的直线为L_0.

L_0与L的交点为$P_0(-1+3t_0，1+2t_0，-t_0)$.

L_0的方向向量为$\overline{P_0M_0}=(3t_0-3,\ 2t_0，-t_0-3)$.

$\because\ L_0\perp L$，$\therefore\ 3(3t_0-3)+2\times(2t_0)+(-1)\times(-t_0-3)=0$

解得$t_0=\dfrac{3}{7}$，$\therefore\ L_0$的方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

四、解：$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\\&=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\\&=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\\&=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\\&=\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

五、解：因为$2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$，两边乘$\boldsymbol{A}$得

$2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-4\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})$

$$\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix},\quad |\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}|\neq 0$$

$\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$ 可逆

$$(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}-3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

六、证：（1） $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0},\ 1\leq \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\leq \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\alpha})=1$.（C 卷有）

$\therefore\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=1$

(2)**解 1:** 因为$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1\ \ 0\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2$，$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^n=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=2^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.

$$|k\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{A}^n|=|k\boldsymbol{E}_3+2^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}|=\left|k\boldsymbol{E}_3+2^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}(1\ \ 0\ \ -1)\right|$$

$$=k^2\left|k\boldsymbol{E}_1+2^{n-1}(1\ \ 0\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right|$$

$$=k^2\,|k+2^{n-1}+2^{n-1}|$$

$$=k^2(k+2^n)$$

解 2: $|k\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{A}^n|=\left|\begin{pmatrix}k&&\\&k&\\&&k\end{pmatrix}+2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}k+2^{n-1}&0&-2^{n-1}\\0&k&0\\-2^{n-1}&0&k+2^{n-1}\end{vmatrix}$

$$=k^2(k+2^n)$$

七、证：因 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 可逆，

$$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$$

故 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\neq 0$

即 $\boldsymbol{B}$ 可逆.