代数与几何期中模拟答案及部分题解析

一、填空题(每题 1 分，共 5 分)

1. $[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$　　2. $\dfrac{8}{9}$　　3. $\lambda^3(\lambda+4)$

4. $\begin{pmatrix}12 & 0 & -12\end{pmatrix}$　　5. $-\dfrac{a}{b}$

提示：

1. $$\begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y \\ y & x & y & \dots & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & x \end{vmatrix} \underline{\underline{c_1 = c_1 + \dots + c_n}} [x+(n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & y & y & \dots & y \\ 1 & x & y & \dots & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y & y & \dots & x \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{matrix} r_2 - yr_1 \\ r_3 - yr_1 \\ \dots \end{matrix}}} [x+(n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-y & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x-y \end{vmatrix} = [x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$$

2. $$\left|3A^* - (3A)^{-1}\right| = \left|3\left|A\right| A^{-1} - \frac{1}{3} A^{-1}\right| = \left|\frac{2}{3} A^{-1}\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{8}{9}.$$

3. $$\left|\lambda E + A^2\right| = \left|\lambda E + \alpha^T\alpha\alpha^T\alpha\right| = \left|\lambda E + \alpha^T(\alpha\alpha^T)\alpha\right| = \left|\lambda E + 2\alpha^T\alpha\right| = \lambda^3\left|\lambda E_1 + 2\alpha\alpha^T\right| = \lambda^3(\lambda+4).$$

4. $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 8 & -4\end{pmatrix}, (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & 0 & -12\end{pmatrix}.$$

5. $A(A^{-1}-B^{-1})B = B - A$，两边同时取行列式得 $\left|A(A^{-1}-B^{-1})B\right| = \left|B-A\right|$，即

$$\left|A\right|\left|B\right|\left|A^{-1}-B^{-1}\right| = \left|(-1)(A-B)\right|，\text{即} \left|AB\right|\left|A^{-1}-B^{-1}\right| = (-1)^7\left|(A-B)\right|，\text{则} \left|AB\right| = -\frac{a}{b}.$$

二、选择题(每题 1 分，共 5 分)

1.（B）　　2.（A）　　3.（D）

4.（C）　　5.（C）

三、（5 **分**）$\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{-1}$

解：设待求直线与直线 L_1 的交点 B 的坐标为 $(2t,1+t,-1-t)$。

则 $\overrightarrow{AB}=(2t+3,1+t,-2-t)$，平面的法向量 $\vec{n}=(3,-4,-1)$

由于 $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$，所以 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，解得 $t=-\dfrac{7}{3}$，因此 $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{5}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}$ 就是待求直线的方向向量，因此待求直线方程为 $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{-1}$.

四、（5 **分**）

证明：先证明 A 可逆且 $|A|>0$

因为 $A^*=A^T\Rightarrow a_{ij}=A_{ij}$, 所以 $|A|=a_{11}A_{11}+\ldots+a_{1n}A_{1n}=a_{11}^2+\ldots+a_{1n}^2\geq 0$

又由于 A 非零，因此 $\exists a_{ij}\neq 0$, 因此 $|A|>0$。

$AA^*=|A|E$, 由 $|A|\neq 0,\therefore\ |A^*|=|A|^{n-1}$，又 $A^*=A^T$, $|A^T|=|A|$, $|A|\neq 0$, 得 $|A|^{n-2}=1$

又由 $|A|>0$，因此 $|A|=1$.

五、（5 **分**）$\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$。提示：$|A|=2$，故 A 可逆。$|A|A^{-1}X=A^{-1}+X$

由 $|A|=2\ \therefore\ 2A^{-1}X=A^{-1}+X$, 等式两端同时左乘 A, 有 $2X=E+AX$, 得 $X=(2E-A)^{-1}$

六、（5 **分**）解：$(A^6)^{-1}=(A^{-1})^6$。$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&&&\\3&-1&&&\\&&1&1&\\&&&1&\\&&&&1\end{pmatrix}^{-1}\overset{\text{记作}}{=}\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}B^{-1}&0\\0&C^{-1}\end{pmatrix}$

（伴随矩阵法）$B^{-1}=-\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}-1&-3\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{10}&\dfrac{3}{10}\\\dfrac{3}{10}&-\dfrac{1}{10}\end{pmatrix}$,

（初等变换法）$C^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

再利用分块矩阵的幂运算性质：

$$(A^{-1})^6=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{10}&\frac{3}{10}\\\frac{3}{10}&-\frac{1}{10}\end{pmatrix}^6&0\\0&\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{10}&\frac{3}{10}\\\frac{3}{10}&-\frac{1}{10}\end{pmatrix}^6=\begin{pmatrix}\frac{1}{10}&0\\0&\frac{1}{10}\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}\frac{1}{1000}&0\\0&\frac{1}{1000}\end{pmatrix}$$

把右下角的矩阵拆成一个单位阵+另一个矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^6=\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]^6=\sum_{k=0}^{6}\mathbf{C}_6^k\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}^{6-k}$$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^k\equiv E$，$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}^2=0$，因此上述求和式中仅有$k=5$和$k=6$的情形非零。

因此$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^6=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-6&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

综上，$(A^6)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{1000}&0&&&\\0&\frac{1}{1000}&&&\\&&1&-6&\\&&&1&\\&&&&1\end{pmatrix}$