哈尔滨工业大学（深圳）2019—2020 学年秋季学期

代数与几何试题 A 参考答案

（此卷满分 30 分）

一、填空题(每题 1 分，共 5 分)

1. $[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$ 2. $\dfrac{8}{9}$ 3. $\lambda^3(\lambda+4)$

4. $\begin{pmatrix}12 & 0 & -12\end{pmatrix}$ 5. $\vec{a}_1,\vec{a}_2$

提示：

1. $\begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y \\ y & x & y & \dots & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & x \end{vmatrix} \underline{\underline{c_1 = c_1 + \dots + c_n}} [x+(n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & y & y & \dots & y \\ 1 & x & y & \dots & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y & y & \dots & x \end{vmatrix}$

$\underline{\underline{\begin{matrix} r_2 - yr_1 \\ r_3 - yr_1 \\ \dots \end{matrix}}} [x+(n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-y & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x-y \end{vmatrix} = [x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$

2. $\left|3A^* - (3A)^{-1}\right| = \left|3\,|A|\,A^{-1} - \frac{1}{3}A^{-1}\right| = \left|\frac{2}{3}A^{-1}\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{8}{9}.$

3. $\left|\lambda E + A^2\right| = \left|\lambda E + \alpha^T\alpha\alpha^T\alpha\right| = \left|\lambda E + \alpha^T(\alpha\alpha^T)\alpha\right| = \left|\lambda E + 2\alpha^T\alpha\right| = \lambda^3\left|\lambda E_1 + 2\alpha\alpha^T\right| = \lambda^3(\lambda+4).$

4. $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 8 & -4\end{pmatrix}, (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & 0 & -12\end{pmatrix}.$

5. 将其写为矩阵形式 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

说明该向量组中只有前两个向量是线性无关的，后两个向量可用前两个向量的线性组合来表示。因此极大无关组是前两个向量，即 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$。

二、选择题(每题 1 分，共 5 分)

1.（B）　　2.（A）　　3.（D）

4.（C）　　5.（C）

三、(5 **分**) 解：设待求直线与直线 L_1 的交点 B 的坐标为 $(2t, 1+t, -1-t)$。

则 $\overrightarrow{AB} = (2t+3, 1+t, -2-t)$，平面的法向量 $\vec{n} = (3, -4, -1)$

由于 $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$，所以 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$，解得 $t = -\dfrac{7}{3}$，因此 $\overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{5}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}$ 就是待求直线的方向向量，因此待求直线方程为 $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{-1}$.

四、(5 **分**) 证明：先证明 A 可逆且 $|A| > 0$

因为 $A^* = A^T \Rightarrow a_{ij} = A_{ij}$, 所以 $|A| = a_{11}A_{11} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = a_{11}^2 + \ldots + a_{1n}^2 \geq 0$

又由于 A 非零，因此 $\exists a_{ij} \neq 0$, 因此 $|A| > 0$。

$AA^* = |A|E$, 由 $|A| \neq 0, \therefore |A^*| = |A|^{n-1}$, 又 $A^* = A^T, |A^T| = |A|, |A| \neq 0$, 得 $|A|^{n-2} = 1$

又由 $|A| > 0$，因此 $|A| = 1$.

五、(5 **分**) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。提示：$|A| = 2$，故 A 可逆。$|A|A^{-1}X = A^{-1} + X$

由 $|A| = 2 \therefore 2A^{-1}X = A^{-1} + X$, 等式两端同时左乘 A, 有 $2X = E + AX$, 得 $X = (2E - A)^{-1}$

六、(5 **分**) 解：$(A^6)^{-1} = (A^{-1})^6$。$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & & & \\ 3 & -1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \overset{\text{记作}}{=} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$

（伴随矩阵法）$B^{-1} = -\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{10} & \dfrac{3}{10} \\ \dfrac{3}{10} & -\dfrac{1}{10} \end{pmatrix}$,

（初等变换法）$C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

再利用分块矩阵的幂运算性质：

$$(A^{-1})^6=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10}\end{pmatrix}^6 & 0\\ 0 & \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10}\end{pmatrix}^6=\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & 0\\ 0 & \frac{1}{10}\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}\frac{1}{1000} & 0\\ 0 & \frac{1}{1000}\end{pmatrix}$$

把右下角的矩阵拆成一个单位阵+另一个矩阵的形式：

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^6=\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]^6=\sum_{k=0}^{6}\mathbf{C}_6^k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^{6-k}$$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^k\equiv E$，$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2=0$，因此上述求和式中仅有$k=5$和$k=6$的情形非零。

因此$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^6=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

综上，$(A^6)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{1000} & 0 & & & \\ 0 & \frac{1}{1000} & & & \\ & & 1 & -6 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{pmatrix}$