

代数与几何期中模拟试题

(此卷满分 30 分)

一、填空题(每题 1 分, 共 5 分)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y \\ y & x & y & \dots & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & x \end{vmatrix}$ 的值为 _____。

2. 已知三阶方阵 A , $|A| = \frac{1}{3}$, 则 $|3A^* - (3A)^{-1}| =$ _____。

3. 已知 $\alpha = (1 \ 0 \ -1 \ 0)$, $A = \alpha^T \alpha$, 则 $|\lambda E + A^2| =$ _____。

4. 已知 $\vec{a} = (1 \ 2 \ 3)$, $\vec{b} = (3 \ 2 \ 1)$, $\vec{c} = (1 \ 1 \ 1)$, 则 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} =$ _____。

5. 设 A 、 B 为 7 阶方阵, 且 $A-B$ 和 $A^{-1} - B^{-1}$ 的行列式依次为 a 和 b , $b \neq 0$, 则 $|AB| =$ _____。

二、选择题(每题 1 分, 共 5 分)

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵的秩为 1, 则必有

- (A) $a + 2b = 0$ (B) $b + 2a = 0$ (C) $a = b \neq 0$ (D) $b^3 + 2a^3 = 0$

2. n 阶方阵 A, B 满足 $AB = 0$, $A \neq 0$, 则

- (A) $|B| = 0$ (B) $|A| \neq 0$ (C) $|B^*| \neq 0$ (D) $|A^*| \neq 0$

3. 下列说法正确的是

- (A) 等价矩阵的行列式相同
(B) 若 α 为三维列向量, $A = \alpha \alpha^T$, 则 $R(A) = 1$
(C) 秩相同的矩阵等价
(D) 任意秩为 r 的矩阵都可以写成两个秩为 r 的矩阵的乘积

4. 已知 n 阶方阵 B, C, D , C 可逆, $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ E & D \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} E & C \\ 0 & E \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} E & C^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix}$, 则

$P_1 M P_2 =$

(A) $\begin{pmatrix} 0 & B \\ E & D \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} C + C^{-1} & CD + C^{-1}D + B \\ E & D \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} C & E + CD + B \\ E & C^{-1} + D \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} C & E + CD + B \\ E & DC^{-1} \end{pmatrix}$

5. 直线 $L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-2}$ 与直线 $L_2 : \begin{cases} 2x + 3y + z - 11 = 0 \\ 4x + y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$ 的位置关系是

(A) 相交

(B) 平行

(C) 重合

(D) 异面

三、(5 分) 求过点 $A(-3, 0, 1)$ 且平行于平面 $\pi : 3x - 4y - z + 5 = 0$ 还与直线

$L_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$ 相交的直线方程。

四、(5分)已知 A 是 n 阶非零实矩阵, $A^* = A^T$, 证明: 若 $n > 2$, 则 $|A| = 1$ 。

五、(5分)已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^*X = A^{-1} + X$, 求 X 。

六、(5分)已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & & & \\ 3 & -1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_5$, 求 $(A^6)^{-1}$ 。