一、 填空题（每小题 2 分，共 12 分）

1. 已知空间中四个点 $A(0,0,0)$，$B(1,1,1)$ $C(1,2,2)$，$D(1,2,3)$，则四面体 $ABCD$ 的体积=________________.

2. 已知两向量 β_1，β_2 线性无关，$a\beta_1-\beta_2$，$b\beta_2-\beta_1$ 线性相关，则 a，b 满足

______________.

3. 当 λ 满足条件___________时，齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ 只有零解.

4. 设 A 为三阶实对称矩阵，$R(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则

$A=$______________.

5. 在空间直角坐标系中，方程 $2x^2+6v^2=z$ 表示的几何图形是___________________

6. 母线平行于 x 轴，且通过曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+2z^2=1 \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程是__________________.

二、 选择题（每小题 2 分，共 12 分）

1. 设 $A \in R^{m\times n}$， $b \in R^m$， $AX=0$ 是 $AX=b$ 的导出组，则下列命题正确的是______.

(A) 如果 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=b$ 必有唯一解

(B) 如果 $AX=b$ 有两个不同的解，则 $AX=0$ 必有非零解

(C) 如果 $AX=0$ 有非零解，则 $A^TY=0$ 也有非零解

(D) 如果 $R(A)=r=n$ ，则 $AX=b$ 必有唯一解

2. 与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$ 合同的矩阵是__________.

(A) $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$

3. 下列关于矩阵正定的命题中，不正确的是__________.

(A) 设 A 是实对称矩阵，若 $A^2=E$ ，则 $A+E$ 是正定矩阵

(B) 设 A，B 是 n 阶正定矩阵， k ， l 是正数，则 $kA+lB$ 是正定矩阵

(C) 设 A 是正定矩阵，则 A^{-1}， A^* 均为正定矩阵

(D) 矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&2\end{pmatrix}$ 是正定矩阵

4. 下列命题中正确的是____________.

(A) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性无关

(B) 如果 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为 0 时，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 也线性无关

(D) 如 $\mathrm{R}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathrm{R}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，则 α_4 必可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

5. 下列矩阵中不可以相似对角化的为____________.

(A) $\begin{pmatrix}1&-3&-3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&4\\0&4&3\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-7&5&-1\\-6&6&-2\end{pmatrix}$

(D) 三阶矩阵 A 的三个特征值为 -2，-2，4，且 $R(A+2E)=1$

6. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$ 和 $\eta_1,\eta_2\cdots\eta_n$ 是 n 维欧式空间 V 的两组基，则下列选项正确的是____________.

(A) $\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$ 到 $\eta_1,\eta_2\cdots\eta_n$ 的过渡矩阵是正交矩阵

(B) 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$ 是规范正交基，且有 $(\eta_1,\eta_2\cdots\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)A$，则 $\eta_1,\eta_2\cdots\eta_n$ 是规范正交基的充要条件为 A 是正交矩阵

(C) 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$ 是规范正交基, V 中两个向量 α,β 在该基下的坐标为：$X=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$，$Y=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$，则 $|\alpha|=|\beta|$ 当且仅当 $X=Y$

(D) 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$ 是规范正交基，V 中两个向量 α,β 在该基下的坐标为：$X=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$，$Y=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$，则 $(\alpha,\beta)\neq(X,Y)$

三、　(本题 5 分)

四、

$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，运用相似对角化计算 A^n．

四、　(本题 5 分)

三阶实对称矩阵 A 满足 $R(A+2E)=1$ 且 $|A+3E|=0$，

(1) 求 A 的所有特征值;

(2) 求 A^* 的所有特征值．

五、　(本题 6 分)

线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+(a-1)x_3=1 \\ x_1+ax_3=2 \\ (a+1)x_1+x_2+ax_3=3 \end{cases}$$

中，a 为何值时无解、有唯一解和无穷多解？有解时，写出通解．

六、 (本题 5 分)

三阶实方阵 $A=(a_1,a_2,a_3)$ 满足如下条件:

(a) $a_1+2a_2+a_3=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$; (b) A 与 $D=\begin{pmatrix}-3&&\\&1&\\&&-4\end{pmatrix}$ 合同;

(c) $|A+2E|=0$; (d) $AA^T=4E$.

(1) 记矩阵 A 对应的二次型为 f. 问 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面.

(2) 求一个正交变换 $X=PY$ 将二次型 $f(X)=X^TAX$ 化为标准形.

七、(本题 5 分)

已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix},$$

(1) 求所有可能的 4 维列向量 X, 使得 $X^TA=0$;

(2) 证明二次型 $f(Y)=Y^T(A^TA)Y$ 为正定二次型.