答案

一、填空题

1. 0　2. $\sqrt{\dfrac{11}{3}}$　3. $(ad-eh)(bc-fg)$　4. -3　5. $a\neq 0$ 且 $a\neq -1$

二、选择题

1. C　2. A　3. D　4. D　5. C

三 、设过点$P(-1,2,3)$的直线为L:$\frac{x+1}{n}=\frac{y-2}{m}=\frac{z-3}{p}$，其中$\vec{n}=(n,m,p)$是$L$的方向向量。

(1) 由L与直线L_0:$\frac{x}{4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+2}{6}$垂直，则$\vec{\mathrm{n}}$与直线$L_0$的方向向量$\overrightarrow{\mathrm{n}_0}=(4,5,6)$垂直；

(2) 且由L与平面π: $7\mathrm{x}+8\mathrm{y}+9\mathrm{z}+10=0$平行，知$\vec{\mathrm{n}}$与平面$\pi$的法向量$\overrightarrow{\mathrm{n}_1}=(7,8,9)$垂直。

故$\vec{\mathrm{n}}=\overrightarrow{\mathrm{n}_0}\times\overrightarrow{\mathrm{n}_1}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=-3(\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k})=-3(1,-2,1)$. 从而$L$的方程为 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$

四、

（1）由$A^3=0$得：$|A|=0$,得 $a=0$；

（2）由$X-XA^2-AX+AXA^2=E$ ，得：$X(E-A^2)-AX(E-A^2)=E$

$(E-A)X(E-A^2)=E$，$\rightarrow$ $(E-A)$，$(E-A^2)$ 必可逆

所以：$X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}=[(E-A^2)(E-A)]^{-1}$

$X=(E-A^2-A)^{-1}$

$$E-A^2-A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$(E-A^2-A \ \vdots\ E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow\cdots\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right)$$

所以：

$$X=(E-A^2-A)^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

五、

证明：（1） $R(A)\leq R(\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}})+R(\alpha_2\alpha_2^{\mathrm{T}})+R(\alpha_3\alpha_3^{\mathrm{T}})\leq R(\alpha_1)+R(\alpha_2)+R(\alpha_3)\leq 3.$

（2）不失一般性，设若$\alpha_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$。则有

$$A = \alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}} + \alpha_2\alpha_2^{\mathrm{T}} + \left(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2\right)\alpha_3^{\mathrm{T}} = \alpha_1\left(\alpha_1^{\mathrm{T}} + k_1\alpha_3^{\mathrm{T}}\right) + \alpha_2\left(\alpha_2^{\mathrm{T}} + k_2\alpha_3^{\mathrm{T}}\right),$$

$$\Rightarrow\ R(A) \le R\left(\alpha_1\left(\alpha_1^{\mathrm{T}} + k_1\alpha_3^{\mathrm{T}}\right)\right) + R\left(\alpha_2\left(\alpha_2^{\mathrm{T}} + k_2\alpha_3^{\mathrm{T}}\right)\right) \le R(\alpha_1) + R(\alpha_2) \le 2$$

六、

(1) 由于 A 为 m 阶可逆方阵，则

$|M| = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix}$（分块初等行变换：$r_2 - (CA^{-1}) * r_1$），

从而有$|M| = |A||D - CA^{-1}B| = |A||\Sigma|$.

(2) 当$\Sigma = D - CA^{-1}B$可逆时，根据分块初等变换：

$(M, E_{m+n}) = \begin{pmatrix} A & B & E_m & O \\ C & D & O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & E_m & 0 \\ 0 & \Sigma & -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}$（分块初等行变换：$r_2 - (CA^{-1}) * r_1$）

$= \begin{pmatrix} A & 0 & E_m + B\Sigma^{-1}CA^{-1} & -B\Sigma^{-1} \\ 0 & \Sigma & -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}$（分块初等行变换：$r_1 - (B\Sigma^{-1}) * r_2$）

$= \begin{pmatrix} E_m & 0 & A^{-1} + A^{-1}B\Sigma^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\Sigma^{-1} \\ 0 & E_n & -\Sigma^{-1}CA^{-1} & \Sigma^{-1} \end{pmatrix}$,

所以$M^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B\Sigma^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\Sigma^{-1} \\ -\Sigma^{-1}CA^{-1} & \Sigma^{-1} \end{pmatrix}$.

(3) 方法 1：

可以通过$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, CA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \Sigma = -1,$代入(2)的结论中得到：

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B\Sigma^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\Sigma^{-1} \\ -\Sigma^{-1}CA^{-1} & \Sigma^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

方法 2: 不基于前两步的方式和结论，采用直接通过矩阵的初等变换法求逆来计算：

$M^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$