哈尔滨工业大学（深圳）2020 级代数与几何期中考试

一、填空题（每小题 1 分，共 5 分）

1. 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $A^TA=E, |A|<0$ ，则 $|A+E|=$________

2. 直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$ 与直线 $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{8}$ 间的距离是 ________

3. 计算 $D_4=\begin{vmatrix} a & & & e \\ & b & f & \\ & g & c & \\ h & & & d \end{vmatrix}=$________

4. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ，B 为三阶非零矩阵，且 $AB=0$ ，则 t=________

5. 若向量组 $\alpha_1=(1,0,-1,2)^T$ ，$\alpha_2=(1,a,-1,2)^T$，$\alpha_3=(1,-1,\ a,2)^T$ 线性无关，则 a 取值为：________

二、选择题（每小题 1 分，共 5 分）

1. 行列式不为零，利用行列式的性质对其进行变换后，行列式的值________.

（A）保持不变　　（B）可以变成任何值

（C）保持不为零　　（D）保持相同的正负号

2. 设 A,B 都是 n 阶非零方阵，且满足 $AB=0$，则 A,B 的秩________.

（A）都小于 n　　（B）必有一个为零

（C）都等于 n　　（D）和小于 n

3. 关于下述四条叙述，描述最确切的是________.

（1） 矩阵的标准形唯一；

（2）方阵一定可以通过初等行变换化为三角阵；

（3）若存在矩阵 A 和 B 满足 $AB = E$，则 $A^{-1} = B$；

（4）若矩阵 A 的 r 阶子式全为零，则 A 的秩一定小于 r。

（A）（2）（3）正确（1）（4）错误　　（B）（1）（4）正确（2）（3）错误

（C）（1）（2）（3）正确（4）错误　　（D）（1）（2）（4）正确（3）错误

4. 直线 $L_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{-2}$ 与直线 $L_2: \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \end{cases}$ 的位置关系为________.

（A）相交　　（B）平行

（C）重合　　（D）异面

5. 当向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ 线性相关时，使等式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0$$

成立的 $k_1, k_2, \ldots k_m$ ________.

（A）是任意一组常数　　（B）是任意一组不全为零的常数

（C）不唯一　　（D）是唯一的一组不全为零的常数

三、（5 分） 求过点 $P(-1,2,3)$，与直线 $L_0: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{6}$ 垂直，且与平面 $\pi: 7x + 8y + 9z + 10 = 0$ 平行的直线方程

四、（5分）设矩阵 A= $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，且 $A^3 = 0$

(1) 求 a 的值

（2）若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，求 X

五、（5分）设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 4 维列向量，矩阵 $A = \alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}} + \alpha_2\alpha_2^{\mathrm{T}} + \alpha_3\alpha_3^{\mathrm{T}}$。证明：

(1) $R(A) \le 3$.

(2) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，则 $R(A) < 3$

六、（5 分）对于分块矩阵$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，其中 A 为 m 阶可逆方阵，D 为 n 阶方阵，记 $\Sigma=D-CA^{-1}B$，它是 A 在 M 中的 schur（舒尔）补矩阵，在理论和数值方法中都具有重要的意义和作用。

(1) 证明：$|M|=|A|\,|\Sigma|$.

(2) 若$\sum$可逆，求 M 的逆矩阵.

(3) 若$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, D=1$,求$M^{-1}$.