一些其他线代题目

V2.0　2022.5.24 更新

1．已知向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$可由向量组（Ⅱ）$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$线性表示。证明：

（1）若 $s=t$ 且向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关，则向量组（Ⅱ）线性无关；

（2）若向量组（Ⅰ）和（Ⅱ）具有相同的秩，证明：向量组（Ⅰ）和（Ⅱ）等价。

2．证明：n 个 n 维实列向量$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

3．设矩阵 A,B 为 n 阶方阵，若 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解，则（　　）

（A）$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}X=0$ 和$\begin{pmatrix} B & A \\ 0 & A \end{pmatrix}X=0$ 同解；　　（B）$\begin{pmatrix} A & 0 \\ E & B \end{pmatrix}X=0$ 仅有零解；

（C）$\begin{pmatrix} AB & B \\ 0 & A \end{pmatrix}X=0$ 和$\begin{pmatrix} BA & A \\ 0 & B \end{pmatrix}X=0$ 同解；　　（D）$\begin{pmatrix} AB & B \\ 0 & A \end{pmatrix}X=0$ 仅有零解。

4．（1）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶实列满秩阵，证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定。

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，证明：存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$。

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实可逆矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 一定可以表为一个正交矩阵和一个正定矩阵的乘积。

**且表示形式唯一？

5．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交线性变换 $X=QY$ 下的标准型为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q。

6．已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称阵，$\xi_1=(1,1,1)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值－1 的特征向量，且二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 下化为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$。

（1）求出将 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 化为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ 的一个正交变换矩阵；

（2）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^n$；

（3）在空间直角坐标系中，方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$表示何种几何图形。

7．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

（1）证明 $\boldsymbol{A}$ 可被相似对角化，并求矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵；

（2）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$，记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$，将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合。

8．设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$B=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$。若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以用向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示，则（　　）

（A）$AX=0$ 的解均为 $BX=0$ 的解；　（B）$A^TX=0$ 的解均为 $B^TX=0$ 的解；

（C）$BX=0$ 的解均为 $AX=0$ 的解；　（D）$B^TX=0$ 的解均为 $A^TX=0$ 的解。

9． 若实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}$ 正定，则 t 的取值范围是__________________。

10． 设向量 $\alpha=(1,-1,0,1)^T$，则 $\boldsymbol{A}=\alpha\alpha^T$ 的非零特征值为__________。

11． 已知 A 为 n 阶正定矩阵，α 为非零 n 维实列向量，则 $R\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=$______________。

12． 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶方阵，且 $R(A)=3$，则齐次线性方程组 $A^*X=0$（A^* 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵）的基础解系所含解向量个数是（　　）

（A）1；　（B）2；　（C）3；　（D）4

13． 下列说法正确的是（　　）

（A）极大无关组唯一的向量组线性无关；

（B）所含向量个数相同的两个线性无关向量组等价；

（C）向量在基下的坐标向量属于该向量所在空间；

（D）矩阵的秩与其行（列）向量组的秩相等。

14． 下列是方阵 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 可被相似对角化的充分非必要条件是（　　）

（A）$\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 有三个线性无关的特征向量；　（B）$\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 有三个不同的特征值；

（C）$\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 有三个两两线性无关的特征向量；

（D）$\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 不同特征值对应的特征向量正交。

15. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}$，现矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$，$\boldsymbol{b}=(1,0,\dots,0)^T$.

（1）求$|\boldsymbol{A}|$;

（2）a 为何值时，方程组有唯一解？求 x_1.

（3）a 为何值时，方程组有无穷多解？求通解.

部分参考解答

（组编时间仓促，且编者水平有限，欢迎各位纠错及提供新的解法）

1．已知向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 可由向量组（Ⅱ）$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 线性表示。证明：

（1）若 $s=t$ 且向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性无关，则向量组（Ⅱ）线性无关；

（2）若向量组（Ⅰ）和（Ⅱ）具有相同的秩，证明：向量组（Ⅰ）和（Ⅱ）等价。

1.【解】（1）$s=t=n, A=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n), B=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$，由向量组（Ⅰ）可由向量组（Ⅱ）线性表示，则存在非零矩阵 P，$A=BP$，则$R(A)\le R(B)$, $R(B)=n$，即向量组（Ⅱ）线性无关。

（2）设两个向量组的秩为 r，则向量组（Ⅱ）的极大无关组 $\beta_{k_1},\beta_{k_2},...,\beta_{k_r}$；向量组（Ⅰ）的极大无关组 $\alpha_{t_1},\alpha_{t_2},...,\alpha_{t_r}$。由向量组（Ⅰ）可由向量组（Ⅱ）线性表示，则向量组（Ⅰ）可由 $\beta_{k_1},\beta_{k_2},...,\beta_{k_r}$ 线性表示，自然向量组（Ⅰ）的极大无关组 $\alpha_{t_1},\alpha_{t_2},...,\alpha_{t_r}$ 也可由 $\beta_{k_1},\beta_{k_2},...,\beta_{k_r}$ 线性表示，设 $A_1=(\alpha_{t_1},\alpha_{t_2},...,\alpha_{t_r}), B_1=(\beta_{k_1},\beta_{k_2},...,\beta_{k_r})$，$A_1=B_1P$，则$R(A_1)\le R(P)$，所以$R(P)=r$

P可逆，所以 $B_1=A_1P^{-1}$, $\beta_{k_1},\beta_{k_2},...,\beta_{k_r}$ 可由 $\alpha_{t_1},\alpha_{t_2},...,\alpha_{t_r}$ 线性表示，所以向量组（Ⅱ）可由 $\alpha_{t_1},\alpha_{t_2},...,\alpha_{t_r}$ 线性表示，即向量组（Ⅱ）可由向量组（Ⅰ）线性表示，故向量组（Ⅰ）和（Ⅱ）等价。

2．证明：n 个 n 维实列向量 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \ne 0.$$

【见疑难解答第 3 章 10 题】【类似题作业里也有，可对照】

3．[2021 数一]设矩阵 A,B 为 n 阶方阵，若 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解，则（ A ）

（A）$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix}X=0$ 和 $\begin{pmatrix} B & A \\ 0 & A \end{pmatrix}X=0$ 同解；（B）$\begin{pmatrix} A & 0 \\ E & B \end{pmatrix}X=0$ 仅有零解；

（C）$\begin{pmatrix} AB & B \\ 0 & A \end{pmatrix}X=0$ 和 $\begin{pmatrix} BA & A \\ 0 & B \end{pmatrix}X=0$ 同解；（D）$\begin{pmatrix} AB & B \\ 0 & A \end{pmatrix}X=0$ 仅有零解。

4.（1）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶实列满秩阵，证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定。

【证】对于任一非零列向量 X，得 $X^TA^TAX=(AX)^TAX=(AX,AX)$，下证 $AX=0$ 当且仅当 X 为零向量：充分性是显然的，下证必要性。$R(A)+R(X)-n\le R(AX)=0\Rightarrow R(X)\le 0\Rightarrow R(X)=0$。因此，对于任意非零列向量 X，$X^TA^TAX=(AX,AX)>0$，所以 A^TA 正定。

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，证明：存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$。【见疑难解答第四章 36 题】

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实可逆矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 一定可以表为一个正交矩阵和一个正定矩阵的乘积。【见疑难解答第四章 37 题】

**且表示形式唯一？【见资料《正定矩阵的算术平方根》】

5．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交线性变换 $X=QY$ 下的标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q。【见疑难解答 2017 年数一 21 题】

6．已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称阵，$\xi_1=(1,1,1)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值－1 的特征向量，且二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 下化为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$。

（1）求出将 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 化为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ 的一个正交变换矩阵；

（2）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^n$；

（3）在空间直角坐标系中，方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种几何图形。

【见习题指导 2015 年期末卷第六大题，题目稍有改动但答案相同】

7．[2016 数一，21 改编，答案也可参考疑难解答] 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$。

（1）证明 $\boldsymbol{A}$ 可被相似对角化，并求矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵；

（2）设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$，记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)$，将 $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 的线性组合。

7.【解】(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&0\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值：$\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$。

$\boldsymbol{A}$ 有三个互不相同的特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 可被相似对角化。对 $\lambda_1=0$，解得特征向量为 $\alpha_1=(3,2,2)^T$；对 $\lambda_2=-1$，解得特征向量为 $\alpha_2=(1,1,0)^T$；对 $\lambda_3=-2$，解得特征向量为 $\alpha_2=(1,2,0)^T$。所求矩阵 P 为

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，且 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$。

（2）在 $B^2=BA$ 两边同时右乘 A，得 $B^2A=BA^2$，而 $B^2A=BBA=B^3$，即 $B^3=BA^2$。反复操作即可得：$B^{100}=BA^{99}$。由 $P^{-1}AP=\Lambda$，所以 $A=P\Lambda P^{-1}$，$A^{99}=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}...P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^{99}P^{-1}=$

$P\begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2^{99} \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以 $\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2$，

$\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2$，$\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2$。

[注意] 1. 本题判定矩阵可被相似对角化，用的是"*A* 有 *n* 个互不相同的特征值"；但若 *A* 的特征值有重根，也不一定能说明 *A* 不能被相似对角化：若 *A* 有 *n* 个线性无关的特征向量，仍可说明 *A* 可被相似对角化；2. 矩阵可以被相似对角化，不代表矩阵可以被正交相似对角化！(因此本题设问为 $P^{-1}AP$ 而非 P^TAP)

8．[2020 数一]设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$，$B=(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)$。若向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 可以用向量组 $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$ 线性表示，则（ D ）

（A） $AX=0$ 的解均为 $BX=0$ 的解；

（B） $A^TX=0$ 的解均为 $B^TX=0$ 的解；

（C） $BX=0$ 的解均为 $AX=0$ 的解；

（D） $B^TX=0$ 的解均为 $A^TX=0$ 的解。

8.【析】向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 可以用向量组 $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$ 线性表示，则 $\begin{cases} \alpha_1=k_{11}\beta_1+k_{21}\beta_2+k_{31}\beta_3 \\ \alpha_2=k_{12}\beta_1+k_{22}\beta_2+k_{32}\beta_3 \\ \alpha_3=k_{13}\beta_1+k_{23}\beta_2+k_{33}\beta_3 \end{cases}$ (表示系数不全为 0)，也即 $A=BP$，其中 $P=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$，则 $A^T=(BP)^T=P^TB^T$。方程组 $B^TX=0$ 的每个解 ξ_i 均满足 $B^T\xi_i=0$，上式两边同时左乘 P^T，得 $P^TB^T\xi_i=0$，也即 $A^T\xi_i=0$，可知 ξ_i 是 $A^TX=0$ 的解。

9.(习题指导 2016 哈工大期末卷第 2 题)若实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}$ 正定，则 t 的取值范围是 $\underline{(-1,1)}$。

10． (习题指导 2018 哈工大期末卷 3 题)设向量$\alpha=(1,-1,0,1)^T$，则 $\boldsymbol{A}=\alpha\alpha^T$ 的非零特征值为 <u>3</u>。

【析】$A^2=\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=3\alpha\alpha^T=3A$，设$\lambda$为$A$的特征值，则$\lambda^2$是$A^2$的特征值，

因而$\lambda^2=3\lambda$，解得非零特征值λ=3.

11． (题目有更正，习题指导 2015 哈工大期末卷第 10 题) 已知 A 为 n 阶<u>正定矩阵</u>，α 为非零 n 维实列向量，则 $R\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=$ <u>$n+1$</u>。

【析】构造 $P=\begin{pmatrix} E & -A^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，显然 P 可逆，$P^T\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -\alpha^T A^{-1}\alpha \end{pmatrix}$。由$A$正定，

则A^{-1}也正定，$-\alpha^T A^{-1}\alpha<0$，则$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & -\alpha^T A^{-1}\alpha \end{vmatrix}\neq 0$，$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -\alpha^T A^{-1}\alpha \end{pmatrix}$可逆，所以$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}$可逆。

【注】同样的方法也用在线代复习卷第七大题；此构造法来自习题八 12 题。

12． 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶方阵，且 $R(A)=3$，则齐次线性方程组 $A^*X=0$（A^* 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵）的基础解系所含解向量个数是（ C ）

（A）1；（B）2；（C）3；（D）4

【提示】$R(A^*)=\begin{cases} n, R(A)=n, \\ 1, R(A)=n-1, \\ 0, R(A)<n-1. \end{cases}$

13． 下列说法正确的是（ D ）[见疑难解答第三章选择题第（1）题]

（A）极大无关组唯一的向量组线性无关；

（B）所含向量个数相同的两个线性无关向量组等价；

（C）向量在基下的坐标向量属于该向量所在空间；

（D）矩阵的秩与其行（列）向量组的秩相等。

14． [2021 数一]下列是方阵 $\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 可被相似对角化的充分非必要条件是（ B ）

（A）$\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 有三个线性无关的特征向量；

（B）$\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 有三个不同的特征值；

（C）$\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 有三个两两线性无关的特征向量；

（D）$\boldsymbol{A}_{3\times3}$ 不同特征值对应的特征向量正交。

【提示】（A）充要条件；（B）充分不必要条件；

（C）必要不充分条件。整体无关、部分无关；部分无关，整体不一定无关。

（D）既不充分也不必要条件。反例$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$（不同特征值对应的特征向量正交但不可被相似对角化）；$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$（可被相似对角化但不同特征值对应的特征向量不正交）

15. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}$，现矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，$\boldsymbol{b}=(1,0,\ldots,0)^T$.

（1）求$|\boldsymbol{A}|$；

（2）a 为何值时，方程组有唯一解？求 x_1.

（3）a 为何值时，方程组有无穷多解？求通解.

【解】（1）

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-\frac{1}{2}r_1} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{vmatrix} \xlongequal[i=3,\ldots,n]{r_i-\left(\frac{i-1}{i}r_{i-1}\right)a} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 0 & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix}=2\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{n+1}{n}=(n+1)a^n.$$

（2）$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 即可，也即 $a\neq 0$。由 Cramer 法则，$x_1=\dfrac{|A_1|}{|A|}$，其中$|A_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第1行展开}}\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}$$，利用(1)中结论有$|A_1|=na^{n-1}$，所以 $x_1=\dfrac{n}{(n+1)a}$.

（3）$|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$a=0$。而此时 $(A|b)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & 1 \\ & 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \therefore R(A|b)=R(A)=n-1$，符合题意。$AX=0$ 的同解方程组是 $\begin{cases} x_2=0, \\ x_3=0, \\ \cdots \\ x_n=0, \end{cases}$ 则基础解系为 $k(1,0,\ldots,0)^T$，k 为任意常数。

又 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，所以取特解为 $\eta=(0,1,\ldots,0)^T$，所以 $AX=b$ 的通解为

$k(1,0,\ldots,0)^T+(0,1,\ldots,0)^T$，$k$ 为任意常数 。