哈尔滨工业大学（深圳）2021/2022 学年秋季学期

代数与几何期末试题 A 参考答案

（根据回忆版本编写）

一、填空题（每题 2 分，共 12 分）

1．0　　2．$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \\ z = t+1 \end{cases}$　　3．0

4．± 1　　5．$a > \dfrac{6}{11}$　　6．$(6,-2,3)$

二、选择题（每题 2 分，共 12 分）

1.C　　2．A　　3．B/C　　4．B　　5．C　　6．C

三、(本题 5 分)

证明：首先，B 必为 n 阶方阵，否则 AB 和 BA 的乘式没有意义。

因此设 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$，则 $AB = \begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_2b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}$，

$BA = \begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}$。若 AB=BA，考虑两矩阵第一行，应有

$a_1b_{11} = a_1b_{11}, a_2b_{12} = a_1b_{12}, \ldots, a_1b_{1n} = a_nb_{11}$，即 $(a_2 - a_1)b_{12} = 0, \ldots, (a_n - a_1)b_{1n} = 0$

由于当 $i \neq j$ 时，$a_i \neq a_j$，所以 $a_2 - a_1 \neq 0, \ldots, a_n - a_1 \neq 0$，所以 $b_{12} = \ldots = b_{1n} = 0$.

类似地，可以证明 $b_{ij} = 0(i \neq j)$，因此 B 除了对角线上的项均为 0，所以 B 只能是对角矩阵。

四、(本题 5 分)

解：$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&2\\1&1&1&3\\1&0&2&x\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&2\\0&0&-1&2\\0&-1&0&x-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&2\\0&0&-1&2\\0&0&1&x+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&2\\0&0&-1&2\\0&0&0&x+3\end{pmatrix}$

则：①$x\neq-3$ 时，α_1，α_2，α_3，α_4线性无关，所以其极大无关组即为其自身；

②$x=-3$ 时，α_1，α_2，α_3，α_4线性相关，且其秩为 3，因此其极大无关组中所含向量个数为 3。选取其中任意三个向量，可以验证这三个向量是线性无关的。

选取α_1，α_2，α_3时，由$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

据矩阵判别法知α_1，α_2，α_3线性无关；

选取α_1，α_2，α_4时，由$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&1&3\\1&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&2\\0&-1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&2\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

据矩阵判别法知α_1，α_2，α_4线性无关；

选取α_1，α_3，α_4时，由$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\1&1&3\\1&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&-1&2\\0&0&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&4\\0&0&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$

据矩阵判别法知α_1，α_3，α_4线性无关；

选取α_2，α_3，α_4时，由$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&2\\1&1&3\\0&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&-1&2\\0&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

据矩阵判别法知α_2，α_3，α_4线性无关；

因此，此时该向量组中任意三个向量均可作为其极大无关组。

五、(本题 5 分)

解：A 的所有特征值之和等于其迹 $tr(A)$，因此 $2+2+\lambda_3=10$，$\lambda_3=6$.

矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & -x\\ 3 & 3 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-9\lambda+20)-3x+6+3(\lambda-4)+3x(\lambda-1)+2(\lambda-5)$$

代入 $\lambda_3=6$，有 $5\times2-3x+6+6+15x+2=0$，得 $x=-2$.

（亦可利用行列式等于特征值之积求解）

六、(本题 5 分)

解：$B=(A|b)=\begin{pmatrix}a & b & b & \dots & b & 0\\ b & a & b & \dots & b & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ b & b & b & \cdots & a & 1\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}a & b & b & \dots & b\\ b & a & b & \dots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & b & \cdots & a\end{pmatrix}$，

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b & b & \dots & b\\ b & a & b & \dots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+(n-1)b & b & b & \dots & b\\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & b & b & \dots & b\\ 1 & a & b & \dots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & b & \dots & b\\ & a-b & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-b\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

1° 如果 $a=b$，则 $B\to\begin{pmatrix}a & b & b & \cdots & 0\\ b-a & a-b & & & 0\\ & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & b-a & a-b & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a & b & b & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$R(\mathrm{A})<R(\mathrm{B})$，

方程组无解；

2° 如果 $a+(n-1)b=0$，则 $B\to\begin{pmatrix}a & b & b & \dots & b & 0\\ b & a & b & \dots & b & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b & 1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b & 0 \\ b & a & b & \dots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$，可见 $R(\mathrm{A})<R(\mathrm{B})$，方程组无解；

3° 如果 $a+(n-1)b\neq 0$，则 $|A|\neq 0$，$R(\mathrm{A})=n=R(\mathrm{B})$，方程组有唯一解。

综上，$a=b$ 或 $a+(n-1)b=0$ 时方程组无解；$a+(n-1)b\neq 0$ 且 $a\neq b$ 时方程组有唯一解。

七、(本题 6 分)

解：（1）由正交变换知 A 的所有特征值为 2，-1，-1，且 A 可逆。

由 $A^*\alpha=\alpha$，化为$|A|A^{-1}\alpha=\alpha$，$|A|\alpha=A\alpha$，又由于$|A|=2$，知α即为对应 A 的特征值 2 的特征向量。设 A 对应于特征值 -2 的特征向量为 $\beta=(x_1\quad x_2\quad x_3)^T$，由实对称阵对应于不同特征值的特征向量正交，则 $x_1+x_2-x_3=0$。此式中分别取 $x_2=1,x_3=0$ 和 $x_2=0,x_3=1$，得 $\beta_1=(-1\ 1\ 0)^T$，$\beta_2=(1\ 0\ 1)^T$，对其正交化得 $\gamma_1=(-1\ 1\ 0)^T$，

$\gamma_2=(1\ 0\ 1)^T-\dfrac{(\gamma_1,\beta_2)}{(\gamma_1,\gamma_1)}\gamma_1=(\dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{2}\ 1)^T$，规范化得 $\gamma_1=(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ 0)^T$，$\gamma_2=(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\ \dfrac{2}{\sqrt{6}})^T$

再将α规范化即得正交变换矩阵 $P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$。由 $P^{\mathrm{T}}AP=D=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

得 $$A=PDP^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$，所以二次型表达式为

$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

（2）A 不是正定矩阵。理由：正定矩阵的特征值全为正值，而 A 有负特征值。