哈尔滨工业大学（深圳）2021/2022 学年秋季学期

代数与几何期末试题 A（回忆版本）

【2022.5.28 10:30—12:30】（此卷满分 50 分）

一、填空题（每题 2 分，共 12 分）

1. n 阶矩阵 A、B、C，满足 $AC=BC$，$|A-B|\neq 0$，则 $C=$ ______.

2. 过点(1,1,1)且与 $x+y+z+1=0$ 垂直的直线的参数方程是________.

3. 设三维向量 δ 可由 α,β 线性表示，则行列式 $|\alpha\quad\beta\quad\delta|$ 的值是________.

4. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+ax_2+x_3=0 \\ ax_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+3x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则 $a=$ ________.

5. 二次型 $f=2x^2+6y^2+az^2-2xy-2xz$ 正定，则 a 的取值范围是________.

6. 二次曲面 $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0$ 的中心点坐标是________.

二、选择题（每题 2 分，共 12 分）

1. A 为 n 阶矩阵，以下说法正确的是

A. $R(A)=R(A^*)$

B. $R(A)>R(A^*)$

C. 若 A 可逆，则 $|A^*|=|A|^{n-1}$

D. 若 $|A|=0$，则 $A=0$

2. $n\times m$ 阶矩阵 A，$m\times p$ 阶矩阵 B，AB = C，以下说法正确的是

A. C 的列向量组是 A 的列向量组的线性组合

B. C 的列向量组是 B 的列向量组的线性组合

C. R(B) = R(C)

D. R(A) = R(C)

3．以下说法正确的是

A.若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关，则有不全为零的数$k_1,k_2,\ldots,k_m$使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m=0$

B.若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关，则对不全为零的数$k_1,k_2,\ldots,k_m$有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m\neq 0$

C.若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性相关，则存在一组数$k_1,k_2,\ldots,k_m$使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m=0$

D. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性相关，则其中任意一向量可被其余向量线性表示

4．$n\times m$阶矩阵 A，$m<n$，以下选项正确的是

A. A 的列向量组线性相关

B. A 的行向量组线性相关

C. $R(A)=m$

D. $m\leqslant R(A)\leqslant n$

5．以下选项正确的是

A. 若方程组 AX = 0 仅有零解，则方程组 AX = β有唯一解

B. 若方程组 AX = 0 有非零解，则方程组 AX = β有无穷解

C. 若方程组 AX = β有无穷解，则方程组 AX = 0 有非零解

D. 方程组 AX = β的解构成一个向量空间

6．n 阶方阵 A 相似于对角矩阵，以下选项正确的是

A. A 有 n 个不同的特征值

B. $R(A)=n$

C. A 有 n 个线性无关的特征向量

D. A 属于不同特征值的特征向量彼此正交

三、(本题 5 分)

已知对于 i，$j=1$，2，…，n，当 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j$. 证明：与矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$

可交换的矩阵只能是对角矩阵.（若 AB = BA，则称 A 与 B 可交换）

四、(本题 5 分)

求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\x\end{pmatrix}$的所有极大无关组.

五、(本题 5 分)

矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & x\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$，A 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 为 A 的二重特征值，求

x 以及 A 的所有特征值.

六、(本题 5 分)

对于 $n\geqslant 2$，考虑如下 n 元线性方程组：

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+\dots+bx_n=0 \\ bx_1+ax_2+\dots+bx_n=0 \\ \dots \\ bx_1+bx_2+\dots+ax_n=1 \end{cases}$$

讨论方程组有解与无解的条件，并给出理由.

七、(本题 6 分)

三元二次型 $f=X^TAX$ 经正交变换后化为 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$，又知 $A^*\alpha=\alpha$，$\alpha=(1,1,-1)^T$.

求：

(1) 二次型的表达式.

(2) 判断 A 是否为正定矩阵，并给出理由.