# 哈尔滨工业大学（深圳）2021/2022 学年秋季学期

# 代数与几何期末试题 A（回忆版本）

【2022.5.28 10:30—12:30】（此卷满分 50 分）

## 一、填空题（每题 2 分，共 12 分）

$R(A-B)=n$　　$AB=B$　　$|A-E|\neq 0$

1. $n$ 阶矩阵 A、B、C，满足 $AC=BC$，$|A-B|\neq 0$，则 $C=$ __0__.

$AC=BC \Rightarrow (A-B)C=0$

$A\ m\times n$　$B\ n\times q$　$R(AB)\geq R(A)+R(B)-n$

$R((A-B)C)\geq R(A-B)+R(C)-n$

$0 \geq n + R(C)-n$

$R(C)\leq 0$　$R(C)=0 \Leftrightarrow C=0$

矩阵的秩的性质：

1. $0\leq R(A)\leq \min\{m,n\}$
2. $R(A')=R(A)$
3. $R(kA)=\begin{cases}0, & k=0\\ R(A), & k\neq 0\end{cases}$
4. 子矩阵之秩≤原矩阵
5. $R\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=R(A)+R(B)$
6. $R\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}\geq R(A)+R(B)$
7. $R(A\mid B)\leq R(A)+R(B)$
8. $R(AB)\leq \min\{R(A),R(B)\}$
9. $R(A+B)\leq R(A)+R(B)$
10. $A_{m\times n}$　$B_{n\times p}$　$R(AB)\geq R(A)+R(B)-n$
    $R(AB)=0 \rightarrow R(A)+R(B)\leq n$
11. 若 $R(A)\leq 1$ 则 $\exists \alpha,\beta\in F^{n\times 1}$，使得 $A=\alpha\beta^T$，$A^m=(\beta^T\alpha)^{m-1}A$.

2. 过点(1,1,1)且与 $x+y+z+1=0$ 垂直的直线的参数方程是________.

什么的方程？ 平面/直线？

(1,1,1) 法向量　//　方向向量(直线)　(关系？) (1,1,1)

$t=\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$　点向式方程（$x_0$，$y_0$，$z_0$）

$\begin{cases}x=t+1\\ y=t+1\\ z=t+1\end{cases}$ (t为参数)

几何向量复习要点：
① 直线、平面方程的种类
每一种有哪些信息？
② 数量积、叉乘、混合积
的运算性质和计算法
(哪几个结果是数？
哪几个是向量？)
③ 点、直线、平面的位置关系？
④ 平面束方程

3. 设三维向量 $\delta$ 可由 $\alpha,\beta$ 线性表示，则行列式 $|\ \alpha\quad \beta\quad \delta\ |$ 的值是 __0__.

$\delta=k\alpha+m\beta$　$(k、m\in R)$　$\rightarrow$　$k\alpha+m\beta-\delta=0$　??

$\alpha、\beta、\delta$ 线性相关

线性相关、无关的判定法？
① 矩阵判别法 (n×n时可用行列式)
② $\beta_1\cdots\beta_n$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关　$(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)K$
K为可逆 ⇒ $\beta_1\cdots\beta_n$ 线性无关
反之线性相关
③ 向量组中(至少)有一向量可由其他向量线性表示.

4. 齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=0\\ ax_1+x_2+x_3=0\\ x_1-x_2+3x_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 $a=$ __±1__.

齐次方程组是否有无穷多解(或非零解) ⇔
- 系数矩阵 A 是否列满秩　　列满秩 ⇔ 仅有零解 ①
- (A为方阵时) A 是否可逆　　可逆 ⇔ 仅有零解 ②
- A的列向量组是否线性相关　　线性无关 ⇔ 仅有零解 ③

非齐次？ 第三大题、

$\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=3-3a^2=0$ ?　$\Rightarrow a=\pm 1$

5．二次型 $f = 2x^2 + 6y^2 + az^2 - 2xy - 2xz$ $\boxed{\text{正定，}}$ 则 $a$ 的取值范围是 $a > \frac{6}{11}$．　$\frac{11}{6}$ ×

判定矩阵正定的方法：

① 先看是否为实对称阵．若不是 → ×

② 若是实对称阵：f的标准形中n个系数全为正数，即f的正惯性指数是n．

f的矩阵A的特征值全大于0

∃Q为实可逆矩阵，$A = Q'Q$ [A合同于单位阵] ← $A = Q'EQ$

A的各阶顺序主子式都大于0．

A的各阶主子式都大于0．② 存在列满秩阵P，$A = P^TP$．

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$2 > 0$

$11 > 0$

$12a + 0 + 0 - 6 - 0 - a > 0$

$11a > 6$　　$a > \frac{6}{11}$

6．二次曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0$ 的中心点坐标是 $(6, -2, 3)$．

$(x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$

## 二、选择题（每题 2 分，共 12 分）

1. A 为 $n$ 阶矩阵，以下说法正确的是 C

A．$R(A) = R(A^*)$

B．$R(A) > R(A^*)$

C．若 A 可逆，则$|A^*| = |A|^{n-1}$

D．若$|A| = 0$，则 A = 0

$R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n \\ 1, & R(A) = n-1 & ① \\ 0, & R(A) < n-1 & ② \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1与2列

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} ?$$

$A_{mn}$　m行n列元素的代数余子式

2×2　~~3×3~~

① $A^*A = AA^* = |A|E_n$

② A可逆　$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$．

$AA^* = |A|E_n$

$|A|\,|A^*| = \big||A|E_n\big|$

$|kA| = k^n|A|$

$|A|E_n$ 行列式

$|A|\,|A^*| = |A|^n \times \underbrace{|E_n|}_{=1} = |A|^n \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$．

2．$n \times m$ 阶矩阵 A，$m \times p$ 阶矩阵 B，AB = C，以下说法正确的是 A

$n \times p$

A．C 的列向量组是 A 的列向量组的线性组合

B．C 的列向量组是 B 的列向量组的线性组合

C．R(B) = R(C)

D．R(A) = R(C)

$$\underset{A}{(\alpha_1 \cdots \alpha_m)_{1\times m}} \underset{B}{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p}} = \underset{C}{(\gamma_1 \cdots \gamma_p)_{1\times p}}$$

$\gamma_1 = b_{11}\alpha_1 + \cdots + b_{m1}\alpha_m$

$\vdots$

$\gamma_p = b_{1p}\alpha_1 + \cdots + b_{mp}\alpha_m$

$AB = C$

$\Leftrightarrow R(A) = R(A|C)$

3．以下说法正确的是 B/C

A．若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性~~无~~相关，则有不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0$

B．若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关，则对不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m \neq 0$

C．若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关，则存在一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0$

D．若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关，则其中~~任意~~一向量可被其余向量线性表示

存在（至少有一个）

4．$n \times m$ 阶矩阵 A，$m < n$，以下选项正确的是 B

A．A 的列向量组线性相关 m个 n维向量 ×

B．A 的行向量组线性相关 n个向量 m维向量

C．$R(A) = m$

D．$m \leqslant R(A) \leqslant n$

A= n个 n行m列 扁

$\rightarrow R(A) \leq \min\{m, n\} \leq m < n$

5．以下选项正确的是 C

A．若方程组 $AX = 0$ 仅有零解，则方程组 $AX = \beta$ 有唯一解 无解 X

B．若方程组 $AX = 0$ 有非零解，则方程组 $AX = \beta$ 有无穷解 X

C．若方程组 $AX = \beta$ 有无穷解，则方程组 $AX = 0$ 有非零解 √

D．方程组 $AX = \beta$ 的解构成一个向量空间 X

$\eta_1$、$\eta_2$ $(\eta_1 \neq \eta_2)$

$A\eta_1 = \beta$，$A\eta_2 = \beta$

$A(\eta_1 - \eta_2) = 0$ $\neq 0$ $AX=0$ 解

6. $n$ 阶方阵 A 相似于对角矩阵，以下选项正确的是 C

① ✓ ② ×

~~A~~. A 有 $n$ 个不同的特征值

~~B~~. $R(A) = n$

C. A 有 $n$ 个线性无关的特征向量 ✓

~~D~~. A 属于不同特征值的特征向量彼此正交 → 反例

## 三、(本题 5 分)

已知对于 $i$，$j = 1$，$2$，… ，$n$，当 $i \neq j$ 时，$a_i \neq a_j$. 证明：与矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵只能是对角矩阵.（若 AB = BA，则称 A 与 B 可交换）

B 方阵　　设出B　　AB　　BA

矩阵乘法的条件和顺序/规则？

## 四、(本题 5 分)

求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\x\end{pmatrix}$的所有极大无关组.

$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_4)$

$$\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&2\\1&1&1&3\\1&0&2&x\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&2\\0&0&-1&2\\0&-1&0&x-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&2\\0&0&-1&2\\0&0&1&x+1\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&1&2\\0&0&-1&2\\0&0&0&x+3\end{bmatrix}$$

$R(A)\geq 3$ ① $x\neq -3$ $R(A)=4$ $\alpha_1\cdots\alpha_4$ 线性无关 极大无关组→自身;

② $x=-3$ $R(A)=3$ 向量组的秩$=3$

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4$ → 无关

$\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_4$

$\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$

## 五、(本题 5 分)

矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & x \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，A 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda = 2$ 为 A 的二重特征值，求 $x$ 以及 A 的所有特征值. 2, 2, 6

3 个 $\begin{cases} 2 \\ 2 \\ ? \end{cases}$

$2+2+\_\_ = 10$

$\lambda_1 = 6$

$20 + 3x - 6 + 12 + 3x + 10 = 24$ 行列式

$6x = -12 \Rightarrow x = -2$

特征多项式

## 六、(本题 5 分)

对于 $n\geqslant 2$，考虑如下 $n$ 元线性方程组：

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + \ldots + bx_n = 0 \\ bx_1 + ax_2 + \ldots + bx_n = 0 \\ \ldots \\ bx_1 + bx_2 + \ldots + ax_n = 1 \end{cases}$$

讨论方程组有解与无解的条件，并给出理由.

3、求秩？

(1) 行列式 若存在一个 $r$ 阶行列式 $D\neq 0$，而所有 $r+1$ 阶子式（若有）全为 0，则 $R(A)=r$

(2) 化行阶梯形 则看非零行行数.

$n$ 方程 $n$ 个未知数

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c} a & b & \cdots & b & 0 \\ b & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & 1 \end{array}\right]_{n\times(n+1)}$$

$R(B)\leq n$

$R(A)=n$ $\quad R(B)=n$ $\quad$ 有解

$R(A)\leq R(B)\leq n$

$R(A)\neq n$ ?

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\times 1\times(a-b)^{n-1}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

展开

$|A|=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$

① $R(A)=n$ （$A$ 可逆） $a\neq b$ 且 $a+(n-1)b\neq 0$

$R(A)=R(B)=n$ 原方程组有解 √

② $a=b$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & b & \cdots & b & 0 \\ b & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & 1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|c} b & b & \cdots & b & 0 \\ b & b & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & b & 1 \end{array}\right]\xrightarrow{行}\left[\begin{array}{cccc|c} b & b & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

得到 A与B的秩不变

$R(A)=1$ $\quad R(B)=2$ $\quad R(A)\neq R(B)$ →无解

③ $a+(n-1)b=0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & b & \cdots & b & 0 \\ b & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & 1 \end{array}\right]\xrightarrow{r_n+r_1+\cdots+r_{n-1}}\left[\begin{array}{cccc|c} a & b & \cdots & b & 0 \\ b & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b & 1 \end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c} a & b & \cdots & b & 0 \\ b & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$A$ $\quad B$

$R(A)\neq R(B)$ $\quad$ 无解.

$R(A)\leq R(B)-1<R(B)$

A至多有 $n-1$ 个非零行（阶梯形）

B在 $n-1$ 个非零行之外，多出最后一行

综上，$a\neq b$ 且 $a+(n-1)b\neq 0$ 原方程组有解

$a=b$ 或 $a+(n-1)b=0$，原方程组无解.

## 七、(本题 6 分)

$A \xrightarrow[\text{可逆}]{\text{正交相似变换}} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ 可逆

三元二次型 $f = X^TAX$ 经正交变换后化为 $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$，又知 $A^*\alpha = \alpha$， $\alpha = (1,1,-1)^T$.

对称

A的特征值：$2, -1, -1$.

p206 定理8.1 （$-1$ 二重）

$AA^* = |A|E$

$A^* = |A|A^{-1}$ （左乘 $A^{-1}$）

$|A|A^{-1}\alpha = \alpha$ （左乘A）

$|A|\alpha = A\alpha$ ✓

$A\alpha = \lambda\alpha$

$|A|$ 一个特征值

$|A| = \lambda_1 = 2$.

A属于2的特征向量是 $(1,1,-1)^T$.

特征子空间的基，$\alpha_1 = (1,1,-1)^T$.

求：

(1) 二次型的表达式.

(2) 判断 A 是否为正定矩阵，并给出理由.

(1) 设正交变换矩阵为P.

$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$. （左乘P右乘$P^{-1}$，也即$P^T$）

（相似）

$A = PDP^{-1} = PDP^T$.

问题：P？

剩两个特征向量？ → 都属于特征值 $-1$.

设属于特征值 $-1$ 的特征向量 $X = (x_1\ x_2\ x_3)^T$

$x^T(1,1,-1)^T = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$M = [1\ \ 1\ \ -1]$， $R(M) = 1$

属于特征值 $-1$ ← $x_2 = 1, x_3 = 0$：$\alpha_2 = (-1, 1, 0)^T$

$x_3 = 1, x_2 = 0$：$\alpha_3 = (1, 0, 1)^T$. 基础解系

Schmidt：

$\beta_1 = \alpha_1 = (1,1,-1)^T$. $\beta_2 = \alpha_2 = (-1,1,0)^T$， $\beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{\langle\alpha_3, \beta_2\rangle}{\langle\beta_2, \beta_2\rangle}\beta_2$

$= (1,0,1)^T - \dfrac{-1}{2}(-1,1,0)^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)^T$.

模 $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

规范化：

$\gamma_1 = \dfrac{\beta_1}{\sqrt{3}} = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})^T$， $\gamma_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^T$， $\gamma_3 = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})^T$.

$P = (\gamma_1\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3)$ $A = P\underset{\text{对角阵}}{D}P^T$ ✓ → 二次型表达式

(2) 不是. A的特征值中有负数. 而正定阵的特征值全为正，所以A不是正定阵.

二次型 f 化成的标准型中正惯性指数不为3，…