2021 秋 代数与几何期末复习试题参考答案及解析

初版 2022.2 最后修订于 2023.11

一、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	$\{\lambda\in\mathbb{R}\mid\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$	$\begin{pmatrix}2&3&2\\-1&-2&-2\\-1&-3&-1\end{pmatrix}$	-1	-2	$\frac{5}{2},\frac{1}{2}$

提示：

1． $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&\lambda\\1&1&\lambda^2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$。

当 $\lambda=1$ 时，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4$，此时两向量组等价；当 $\lambda=-2$ 时，$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2\neq3=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$，此时两向量组不等价；当 $\lambda=-1$ 时，$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3\neq1=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$，此时两向量组不等价；其他情形，$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=3$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 都是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，显然等价。

2． 设由基 α_1，α_2，α_3 到 β_1，β_2，β_3 的过渡矩阵为 P，则(β_1，β_2，β_3)＝(α_1，α_2，α_3)P，即 P＝$(\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3)^{-1}(\beta_1，\beta_2，\beta_3)$。之后用初等变换法求解即可。（$A=(\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3)$，$B=(\beta_1，\beta_2，\beta_3)$，将 $(A\mid B)$ 化为 $(E\mid P)$ 即可）

3．利用特征值、特征向量定义，$\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3+2a\\2\end{pmatrix}$，所以 $\frac{1}{1}=\frac{1}{3+2a}=\frac{2}{2}$，即可得解。

4．$tr(A)=-1+1+2=2,|A|=-2$，$|A+tr(A)A^{-1}+A^*|=|A+2A^{-1}+|A|A^{-1}|=|A|=-2$。

5．利用 Schmidt 正交化方法公式易得。（公式不建议死记硬背，可以自行推导一下帮助记忆）

二、单项选择题（共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	**C**	**D**	**B**	**B**	**A**

提示：

1.“$\Rightarrow$”: $(A^TA)^T=A^TA$，所以 A^TA 为实对称矩阵。设有列向量 X，则 $X^TA^TAX=(AX)^TAX=(AX,AX)$，

下证 $AX=0$ 当且仅当 X 为零向量：充分性是显然的，下证必要性。由 $AX=0$ 则 $A^TAX=0$，由 $|A^TA|\neq 0$

则 A^TA 可逆，$R(A^TA)+R(X)-n\leq R(A^TAX)=0\Rightarrow R(X)\leq 0\Rightarrow R(X)=0$。

因此，对于任意非零列向量 X，$X^TA^TAX=(AX,AX)>0$，所以 A^TA 正定。

"$\Leftarrow$"：A^TA 正定 $\Rightarrow A^TA$ 的所有特征值全大于 0 $\Rightarrow |A^TA|>0$。

2.（A）n 个**线性无关的** n 维向量生成的向量空间是 n 维的；（B）V 的子空间的维数**小于或等于** V 的维数；（C）V 对数乘运算不封闭。事实上，$\alpha=(1,1,1)\in V$，但是 $2\alpha=(2,2,2)\notin V$。（D）显然是正确的。

3．将二次型展开：$f=x_1^2+4x_2^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_2^2+x_3^2-x_3^2-x_1^2+2x_1x_3$，写出二次型矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&8&2\\1&2&0\end{pmatrix},\ |\lambda E-A|=\begin{pmatrix}\lambda&-2&-1\\-2&\lambda-8&-2\\-1&-2&\lambda\end{pmatrix}=\lambda^3-8\lambda^2-4-4-(\lambda-8)-8\lambda=\lambda^3-8\lambda^2-9\lambda$$

$=\lambda(\lambda+1)(\lambda-9)$，所以 A 经正交线性变换可化为标准型：$f=-y_1^2+9y_2^2$，所以二次型的正惯性指数是 1、负惯性指数是 1。

注：由题中的配方法配出的式子不能判定正惯性指数和负惯性指数，因为所作变换不是可逆线性变换。

4．由第一个已知条件，存在数 $k_1,k_2,...,k_m$ 使得 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_m\alpha_m$（*）成立；由第二个已知条件，可推出 $k_m\neq 0$（若不为 0 则与第二个已知条件矛盾），从而可得 $\alpha_m=\frac{1}{k_m}\beta-\frac{k_1}{k_m}\alpha_1-...-\frac{k_{m-1}}{k_m}\alpha_m$，这说明 α_m 可由向量组（Ⅱ）线性表示；如果 a_m 可以由（Ⅰ）线性表示，则存在数 $l_1,l_2,...,l_{m-1}$ 使得 $\alpha_m=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+...+l_{m-1}\alpha_{m-1}$ 成立，所以由（*）式，$\beta=(k_1+l_1)\alpha_1+(k_2+l_2)\alpha_2+...+(k_{m-1}+l_{m-1})\alpha_{m-1}$，与第二个已知条件矛盾，所以 a_m 不能由（Ⅰ）线性表示。

5．相似的两个矩阵应有相同的迹。$tr(A)=6$，$tr(B)=4$，所以 A,B 不相似。(通过行列式判断也可)

A 为正定矩阵（各阶顺序主子式 $2>0,\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=2>0,|A|>0$），$B$ 为正定矩阵，从而 A,B 都合同于单位阵（为什么？），根据合同传递性可知 A,B 是合同的。

[归纳总结] 两个矩阵合同 $\Leftrightarrow$ 两个矩阵对应的二次型的正惯性指数、负惯性指数分别相等。

两个矩阵相似 $\Rightarrow$ 两个矩阵有相同的秩、特征多项式、特征值、行列式、迹。

三、**(6 分) 解:** 设 $B=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_j)$，$A=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$，则有 $B=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ a_1 & a_2 & ... & a_j \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_j^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{s-1} & a_2^{s-1} & ... & a_j^{s-1} \end{pmatrix}$

记 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ a_1 & a_2 & ... & a_j \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_j^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{s-1} & a_2^{s-1} & ... & a_j^{s-1} \end{pmatrix}$，由于 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性无关，所以 $R(A)=s$，则 $R(B)\ge R(A)+R(P)-s$，

即 $R(B)\ge R(P)$，又 $R(B)\le R(P)$，所以 $R(B)=R(P)$。

(这是一个很有用的结论：当 $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_j)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ a_1 & a_2 & ... & a_j \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_j^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{s-1} & a_2^{s-1} & ... & a_j^{s-1} \end{pmatrix}$**，且** $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ **线性无关时，** $\beta_1,\beta_2,...,\beta_j$ **的秩等于 表示系数矩阵 的秩)**

当 $j>s$ 时，$R(B)=R(P)\le\min\{j,s\}=s<j$，显然 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_j$ 线性相关。

当 $j\le s$ 时，取 P 的前 j 行 j 列构成矩阵 Q，而 $|Q|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ a_1 & a_2 & ... & a_j \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_j^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{j-1} & a_2^{j-1} & ... & a_j^{j-1} \end{vmatrix}=\prod\limits_{1\le m<n\le j}(a_n-a_m)$

若 $a_1,a_2,...,a_j$ 互不相同，则 $|Q|\ne 0$，即 $j=R(Q)\le R(P)\le j$，所以 $R(P)=R(B)=j$，所以 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_j$ 线性无关；

若 $a_1,a_2,...,a_j$ 中有相同的数，则 P 中有两行（或多行）成比例，则 $R(B)=R(P)<j$，所以 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_j$ 线性相关。

四、(6 分)解： (1) $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to$

$\begin{pmatrix}1&-2&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\xi=(-1,2,3,1)^T$ 。

(2) 令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\\x_{10}&x_{11}&x_{12}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}x_1-2x_4+3x_7-4x_{10}&x_2-2x_5+3x_8-4x_{11}&x_3-2x_6+3x_9-4x_{12}\\x_4-x_7+x_{10}&x_5-x_8+x_{11}&x_6-x_9+x_{12}\\x_1+2x_4-3x_{10}&x_2+2x_5-3x_{11}&x_3+2x_6-3x_{12}\end{pmatrix}$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 得 $\begin{cases}x_1-2x_4+3x_7-4x_{10}=1\\x_4-x_7+x_{10}=0\\x_1+2x_4-3x_{10}=0\end{cases}$ ①, $\begin{cases}x_2-2x_5+3x_8-4x_{11}=0\\x_5-x_8+x_{11}=1\\x_2+2x_5-3x_{11}=0\end{cases}$ ②, $\begin{cases}x_3-2x_6+3x_9-4x_{12}=0\\x_6-x_9+x_{12}=0\\x_3+2x_6-3x_{12}=1\end{cases}$ ③

对于①，由 $\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\1&2&0&-3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\0&4&-3&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix}\to$

$\begin{pmatrix}1&-2&0&5&4\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2\\0&1&0&-2&-1\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_4\\x_7\\x_{10}\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-k_1\\2k_1-1\\3k_1-1\\k_1\end{pmatrix}$。

对于②，由 $\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&1\\1&2&0&-3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&6\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&-3&-4\end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix}x_2\\x_5\\x_8\\x_{11}\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-k_2\\2k_2-3\\3k_2-4\\k_2\end{pmatrix}$。

对于③，由 $\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&0\\0&1&-1&1&1\\1&2&0&-3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&0&-2&1\\0&0&1&-3&1\end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix}x_3\\x_6\\x_9\\x_{12}\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-k_3\\2k_3+1\\3k_3+1\\k_3\end{pmatrix}$。

所以 $B=\begin{pmatrix}2-k_1&6-k_2&-1-k_3\\2k_1-1&2k_2-3&2k_3+1\\3k_1-1&3k_2-4&3k_3+1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数。

[评分说明] (1) 2 分；(2) 4 分，设出 $\boldsymbol{B}$ 并列出三个方程组 1 分，求出一个基础解系得 1 分。

[思考] (2)问方程组①②③的基础解系有相同之处，请比较并思考其与变换后的增广矩阵的关系；①②③求解过程中对增广矩阵做的变换实际上是一样的(为什么？) 发现这一点可以帮我们减少计算量。

五、(6分) 解：

（1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & 1\\ -1 & \lambda-a & 1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a+1)^2(\lambda-a-2)=0$，得 A 的特征值：$\lambda_1=a+2,$

$\lambda_2=\lambda_3=a-1$。当 $\lambda_1=a+2$ 时，$|(a+2)E-A|=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，解得特征向量为

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$，规范化得 $\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}^T$；当 $\lambda_2=\lambda_3=a-1$ 时，$|(a-1)E-A|=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，解得特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$。规范正交化（对于本题的情况，只需规范化）

得：$\beta_2=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}^T,\beta_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}^T$，所以正交矩阵 P 为 $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$。

（2）$P^TAP=\Lambda$，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}a+2 & & \\ & a-1 & \\ & & a-1\end{pmatrix}$（对角阵），即二次型化为标准形：

$f=(a+2)y_1^2+(a-1)y_2^2+(a-1)y_3^2$，当 $a=3$ 时，图形为(旋转)椭球面；当 $a=-1$ 时，图形为双叶双曲面。

[拓广思考] a 取不同值时，$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 分别表示空间中什么图形？$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 呢？

六、(6分) 证明：

（1）对于满足 $AX=0$ 的所有列向量 X，在 $AX=0$ 两边同时左乘 A^T，可得列向量 X 也满足 $A^TAX=0$；对于满足 $A^TAX=0$ 的所有列向量 X，在 $A^TAX=0$ 两边同时左乘 X^T，可得 $(AX)^TAX=0$，即 $(AX,AX)=0$，由向量内积性质可知 $AX=0$，所以列向量 X 也满足 $AX=0$。综上，$AX=0$ 与 $A^TAX=0$ 同解。

（2）“$\Rightarrow$”：因为 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解，所以 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有相同的解空间，即 $N(\boldsymbol{AB})=N(\boldsymbol{B})$，也即 $n-R(AB)=n-R(B)$，所以 $R(AB)=R(B)$。

“$\Leftarrow$”: 对于满足 $BX=0$ 的所有列向量 X，在 $BX=0$ 两边同时左乘 A，可得列向量 X 也满足 $ABX=0$。（即：$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 的解）设 $R(B)=r$，$\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$ 为 $BX=0$ 的基础解系，则 $\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$ 也是 $ABX=0$ 的线性无关解向量，且由 $R(AB)=R(B)$，知 $ABX=0$ 基础解系所含线性无关解向量的个数也是 $n-r$，所以 $\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$ 也是 $ABX=0$ 的基础解系，所以 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解。

（3）“$\Rightarrow$”：若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解，则 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 都同解。所以 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有相同的解空间，即 $N\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=N(\boldsymbol{A})=N(\boldsymbol{B})$，所以 $R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=R(A)=R(B)$。

“$\Leftarrow$”：首先，$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 的解都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解。设 $R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r$，$\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$ 为 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 的基础解系，则 $\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$ 也是 $AX=0$ 的线性无关解向量，且由 $R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=R(A)$，知 $AX=0$ 基础解系所含线性无关解向量的个数也是 $n-r$，所以 $\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$ 也是 $AX=0$ 的基础解系，所以 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 同解。同理 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解，所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解。

[评分说明] 每问 2 分。

[思考与归纳] 设 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$。

七、(6 分) 证明：

“$\Rightarrow$”(必要性):

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}M_{k\times k} & *\\ * & *\end{pmatrix}$，其中 $M_{k\times k}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $k(0<k\leqslant n)$阶顺序主子阵。

任取 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{pmatrix}_{1\times k}$ ($\boldsymbol{X}$ 非零)，$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{1\times(n-k)}$，$\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，有

$0<Z^TAZ=\begin{pmatrix}X^T & Y^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_{k\times k} & *\\ * & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=X^TMX$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子阵都是正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 的

各阶顺序主子阵的特征值全大于 0，又由于 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式等于其对应的矩阵的特征值之积，所以 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式都大于 0。

“$\Leftarrow$”(充分性)：$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{pmatrix}^T$. 对 n 作数学归纳法.

法一：

(1) $n=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式就是它自身，显然对于任意的 $\boldsymbol{X}=(x)$ ($\boldsymbol{X}$ 非零)，$X^TAX=a_{11}x_1^2>0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵；

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时，假设论断对 $n-1$ 阶的方阵成立，下证 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 n 的情形：

$A=\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \alpha^T & a_{nn}\end{pmatrix}$，$A_{n-1}$ 是一个实对称矩阵且其所有的顺序主子式都大于 0，所以根据归纳假设，A_{n-1} 是正定的，所以 $A_{n-1}=C^TC$ (其中 C 为可逆矩阵)，即 $A_{n-1}=C^TEC$，$(C^T)^{-1}A_{n-1}C^{-1}=E,$ 即 $E=(C^{-1})^TA_{n-1}C^{-1}$，则 A_{n-1} 合同于单位矩阵。**(正定矩阵合同于单位矩阵)**

设 $P=\begin{pmatrix}E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，显然 P 可逆，$P^TAP=\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & a_{nn}-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}$。记 $b=a_{nn}-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha$

则 A 合同于 $\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$。由 $|A|=\begin{vmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}$(为什么？)，且 $|A|>0$，所以 $\begin{vmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}=|A_{n-1}|b>0$，所以 $b>0$，

又 $\begin{pmatrix}C^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{n-1} & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ 合同于 $\begin{pmatrix}E_{n-1} & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$，

由合同传递性，所以 A 合同于 $\begin{pmatrix}E_{n-1} & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$，容易知道 $\begin{pmatrix}E_{n-1} & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ 正定，所以 A 也是正定的，证毕。

(两个合同矩阵的正定性相同；两个正定矩阵也是彼此合同的)

(提示：此思路的一个变体见于习题八 第 12 题)

法二：

(1) $n=1$ 时，同上；

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时，假设论断对 $n-1$ 阶的方阵成立，下证 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 n 的情形：

$$X^TAX=a_{11}x_{11}^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\dots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\dots+2a_{2n}x_2x_n+\dots+a_{nn}x_n^2$$

注意到 $a_{11}>0$，将上式关于 x_1 配方，得到 $X^TAX=\dfrac{1}{a_{11}}(a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+\dots+a_{1n}x_n)^2+\sum\limits_{i=2}^{n}\sum\limits_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j$，

其中 $b_{ij}=a_{ij}-\dfrac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}(i,j=2,3,\ldots,n)$。由 $a_{ij}=a_{ji}$ 知 $b_{ij}=b_{ji}$。如果能证明 $n-1$ 元实二次型 $\sum\limits_{i=2}^{n}\sum\limits_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j$ 是正定的，那么由定义知 $\boldsymbol{A}$ 也是正定的。

而对于 $\boldsymbol{A}$ 的 $k(0<k\leqslant n)$阶顺序主子式，根据行列式性质得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\ldots,k]{r_i-\frac{a_{i1}}{a_{11}}r_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

，又由 $a_{11}>0$，

从而 $\begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} > 0(k=2,3,\ldots,n)$，由归纳假设知 $n-1$ 元实二次型 $\sum\limits_{i=2}^{n}\sum\limits_{j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j$ 是正定的，

所以 $\boldsymbol{A}$ 也是正定的。证毕。

[评分说明] 充分性、必要性证明各 3 分。