2021 年 秋 季 学 期

代数与几何期末复习试卷

2022.2

说明：

1. 本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 50 分。
2. 仅供复习参考，不作猜题押题之用。
3. 请务必限时训练，不要中断计时，把握好答题节奏。

注意行为规范　遵守考场纪律

一、填空题（共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

1． 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，若 α_1，α_2，α_3 与 α_1，α_2，α_4 等价，则 λ 的取值范围是__________________。

2． 由 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为_______________。

3． 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，则 a＝__________。

4． 已知 3 阶方阵的特征值是 $-1,1,2$，则 $|A+tr(A)A^{-1}+A^*|$＝_________。

5． 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，记 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-k\beta_1,\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2$，若 β_1,β_2,β_3 两两正交，则 l_1、l_2 依次为______________。

二、单项选择题（共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

1．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶实矩阵，则“$|A^T A|\neq 0$”是“$A^T A$ 正定”的（　　）条件。

（A）充分不必要；　　（B）必要不充分；

（C）充分必要；　　（D）既不充分也不必要。

2．下列关于向量空间的说法正确的是（　　）

（A）n 个 n 维向量生成的向量空间是 n 维的；

（B）V 的子空间的维数一定小于 V 的维数；

（C）集合 $V=\{\gamma\mid\gamma=(1,x_1,x_2),x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$ 是向量空间；

（D）n 维向量空间 V 中的 n 个线性无关的向量是 V 的一组基。

3．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2)^2+(2x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数和负惯性指数分别是（　　）

（A）2,0；　　（B）1,1；　　（C）2,1；　　（D）1,2。

4．设向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性表示，但不能由向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{m-1}$ 线性表示，记向量组（Ⅱ）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{m-1},\beta$，则（　　）

（A）α_m 不能由（Ⅰ）线性表示，也不能由（Ⅱ）线性表示；

（B）α_m 不能由（Ⅰ）线性表示，但可以由（Ⅱ）线性表示；

（C）α_m 可以由（Ⅰ）线性表示，也可以由（Ⅱ）线性表示；

（D）α_m 可以由（Ⅰ）线性表示，但不能由（Ⅱ）线性表示。

5．对于矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的关系表述正确的是（　　）

（A）合同，但不相似；　　（B）既合同又相似；

（C）相似，但不合同；　　（D）既不合同又不相似。

三、**(6 分)** 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$线性无关，有 j 个实数$a_1,a_2,...,a_j$，设

$\beta_k=\alpha_1+a_k\alpha_2+a_k^2\alpha_3+...+a_k^{s-1}\alpha_s\,(k=1,2,...,j)$，讨论$\beta_1,\beta_2,...,\beta_j$的线性相关性。

四、**(6 分)** 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵。

（1）求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；

（2）求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$。

五、**(6 分)** 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 1 & -1\\ 1 & a & -1\\ -1 & -1 & a\end{pmatrix}$

（1）求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵；

（2）记 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$，设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，则 a=3 和 a=－1 时，$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 分别表示空间中什么图形？

六、**(6 分)**

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times p$ 实矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 同解；

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times p$ 实矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $p\times n$ 实矩阵，证明：$\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$；

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $l\times n$ 实矩阵，证明：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解 $\Leftrightarrow R\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$。

七、**(6 分)** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，称顺序选取 $\boldsymbol{A}$ 的前 k $(0<k\leqslant n)$行、前 k 列构成的矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子阵，其行列式称为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式。若 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式都大于 0。