2022 年线性代数期末考试 回忆版试卷

填空

> 一空 2 分, 共 12 分

1

若 n 阶矩阵 A, B 满足 $|A+B|=1, |A-B|=-1$, 则下式为?

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$$

2

点 $(1,1,1)$ 在平面 $x+y+z+1=0$ 上的投影点为?

3

设 A 为正交矩阵, 若有向量内积 $(\alpha, \beta)=-1$, 则 $(A\alpha, A\beta)$ 为?

4

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, $R(A)=r$, 则齐次线性方程组 $A^T X=0$ 的解空间维数为?

5

若二次型 $f=(a-1)x^2+y^2+z^2-2xy-2xy$ 是正定的, 则 a 为?

6

二次曲面 $x^2+4y^2-9z^2+25=0$ 是什么种类?

选择

> 一空 2 分, 共 12 分

1

设 A 是 n 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若 $|A|=2$, 则 $|(A^*)^T A^{-1}|$ 等于?

- A. 2

- B. $\frac{1}{2}$
- C. 2^{n-2}
- D. 2^n

2

设有 $n \times m$ 阶矩阵 A 和 $m \times p$ 阶矩阵 B 满足 $AB = C$, 下列说法争取的是:

- A. C 的列向量组与 A 的列向量组等价
- B. C 的行向量组与 A 的行向量组等价
- C. C 的列向量组可用 A 的列向量组线性表示
- D. C 的列向量组可用 B 的列向量组线性表示

3

下列说法正确的是:

- A. 若有常数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关
- B. 若向量 α_1 不能被 $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_m$ 线性表示, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关
- C. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关, 则其中任何一个向量可以被其余向量线性表示
- D. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关, 则其中存在一个向量可以被其它向量线性表示

4

下列集合中是向量空间的是:

- A. 一条经过原点的空间直线上所有向量的集合
- B. 一条不经过原点的空间直线上所有向量的集合
- C. 三维向量 (x_1, x_2, x_3) 的集合, 满足 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$
- D. 三维向量 (x_1, x_2, x_3) 的集合, 满足 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

5

设矩阵 A 是 $n \times m$ 矩阵, 若对任意 n 维向量 β, 线性方程组 $AX = \beta$ 总是有解, 则下列说法正确的是:

- A. $AX = 0$ 只有零解
- B. $AX = 0$ 有非零解

- C. $R(A)=n$
- D. $R(A)<n$

6

已知 n 阶方阵 A 相似于对角矩阵, 则正确的说法是:

- A. 矩阵 A 有 n 个不同的特征值
- B. $R(A)=n$
- C. 矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量
- D. 矩阵 A 有 n 个两两正交的特征向量

大题

> 1-4 题一题 5 分, 第 5 题 6 分, 共 26 分

1

考虑分块矩阵 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 B 是 n 阶可逆矩阵, C 是 m 阶方阵, 求 M 可逆的充要条件

2

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 s 个 n 维列向量, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是 t 个 n 维列向量, P 是 $s\times t$ 的矩阵, 使得 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)P$. 已知矩阵 P 的秩 $R(P)=s$, 试讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是否等价, 并说明原因.

3

已知三元线性方程组:

$$\begin{cases} x_1+ax_2+(a-1)x_3=1 \\ ax_1+4x_2+ax_3=1 \end{cases} \qquad (*)$$

1. 讨论 a 的不同取值下方程组的解的情况, 并给出理由
2. 在上述方程组无解时, 若记方程组 $(*)$ 的系数矩阵为 A, 右端向量为 b, 可通过求解广义方程 $A^TAx=A^Tb$ 获得 $(*)$ 的最小二乘解, 试给出此广义方程的通解.

4

设 3 阶方阵 A 满足: 对任意 x_1, x_2, x_3 都有:

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

1. 求矩阵 A
2. 求可逆矩阵 P 及对角矩阵 D, 使得 $P^{-1}AP = D$

5

已知二次曲面方程 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3 = 4$ 可通过正交线性变换 $X = PY$ 化为椭圆柱面方程 $y_2^2 + 2y_3^2 = 4$

1. 求常数 a, b 的值
2. 给出二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3 = 4$ 的规范型
3. 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3 = 4$ 是否为正定二次型, 并给出理由