代数与几何期末试题 第一次模拟考答案

一、 填空题（每题 2 分，共 10 分）

1. 原式$=\left|(A-E)^2+E\right|=\left|\alpha\beta^T\alpha\beta^T+E\right|=5$

2. 由已知条件“对任意 n 维向量α，均有$A^*\alpha=0$”知齐次线性方程组$A^*\alpha=0$的基础解系中解向量个数应为 n 个，即$n-r(A^*)=n$，从而$r(A^*)=0$，也即$A^*=0$，根据矩阵 A 与 A^* 之间关系知 r（A）<n−1，即$n-k<n-1$，故应填$k>1$

3. 由

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1 & \ldots & -1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & \lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$$

故λ的 n 个特征值为$n,\overbrace{0,\cdots,0}^{n-1个}$

4. 由$|3E+A|=0$，知$|-3E-A|=0$，所以$\lambda=-3$是 A 的一个特征值，由条件，有$\left|AA^T\right|=|2E|=2^4|E|=16$，所以$|A|=\pm4$，由于$|A|<0$，故$|A|=-4$，所以$A^*$的一个特征值为$\dfrac{-4}{-3}=\dfrac{4}{3}$

$(AX=\lambda X,A^*X=\dfrac{1}{|A|}AX=\dfrac{1}{|A|}\lambda X)$

5. 椭圆抛物面

二、选择题（每题 2 分，共 10 分）

1. 齐次线性方程组 AX=0 有非 0 解的充要条件是 r（A）<n，而矩阵 A 有 n 列，所以 A 的列向量组线性相关，从而必至少有一个列向量是其余列向量的线性组合，故选（C）

2. 若α，β，λ线性无关，则其部分向量α,β线性无关，而由α，β，δ线性相关知存在k_1,k_2,k_3，使得$k_1\alpha+k_2\beta+k_3\delta=0$，且$k_3\neq 0$，等式两端同时除以$k_3$并整理得$\delta=-\frac{k_1}{k_3}\alpha-\frac{k_2}{k_3}\beta$，则$\delta$可由$\alpha,\beta$线性表示，把上式写为

$\delta=-\frac{k_1}{k_3}\alpha-\frac{k_2}{k_3}\beta+0\lambda$则$\delta$必可由$\alpha$，$\beta$，$\lambda$线性表示，选（C）

3. 有无穷多解，且解为一维（n-R=1）所以相交，但不一定重合，选（D）

4. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},|A|=0,\text{所以}|\mathrm{A}（\mathrm{E\text{-}A}）|=0$$

$$|\lambda\mathrm{E}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-1=(\lambda-2)\lambda=0$$

$\lambda=2\text{或}\lambda=0$，1 不是 A 的特征值，D 错，选（D）

5. f正定，二次型的矩阵的顺序主子式大于零，令

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ a & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},1>0,\begin{vmatrix}1 & a\\ a & 4\end{vmatrix}=4-a^2>0,a^2<4$$

$|A|=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=8-1-a(2a)>0,a^2<\frac{7}{2}$，选（A）

三、（本题 5 分）

证　因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

故有数 k_1,k_2,k_3，使得

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

显然有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)\begin{pmatrix}1&0&0&-k_1\\0&1&0&-k_2\\0&0&1&-k_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，而表示矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0&-k_1\\0&1&0&-k_2\\0&0&1&-k_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 显然列满秩，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

四、（本题 5 分）

解：(1) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-k\boldsymbol{E}|$

$$=(\lambda-k)^3(\lambda-k-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})$$

$$=(\lambda-k)^3(\lambda-k-4)$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 k（3 重根），$k+4$.

当 $\lambda=k$ 时

$$k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=-\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

因此,属于 k 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$,$k_1,k_2,k_3$ 是不全为 0 的任意常数;

当 $\lambda=k+4$ 时

$$(k+4)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}=4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

属于 $k+4$ 的全部特征向量为 $k_4\boldsymbol{\xi}_4$,$k_4\neq 0$.

(2)$k>0$.

（正定矩阵所有特征值大于零）

五、（本题 5 分）

解　线性方程组的系数矩阵行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 2 \\ a & a-1 & 1 \\ 3(a+1) & a & a+3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & a+3 & 2 \\ a-1 & a & 1 \\ a & 3a+3 & a+3 \end{vmatrix}=$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & a+3 & 2 \\ -1 & -2a-3 & -a-2 \\ a & 3a+3 & a+3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & a+3 & 2 \\ 0 & -a & -a \\ 0 & 3-a^2 & -a+3 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a & a \\ 3-a^2 & -a+3 \end{vmatrix}=a^2(a-1)$$

令 $|A|=0$，则 $a=0$ 或 $a=1$.

(1) $a=0$ 时，线性方程组的增广矩阵为

$$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

因为 $r(A)=2\neq 3=r(A \vdots b)$，所以，此时方程组无解；

(2) 当 $a=1$ 时，$(A \vdots b)=\left(\begin{array}{ccc:c} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，

方程组等价于 $\begin{cases} x_1=-x_3+2 \\ x_2=2x_3-9 \end{cases}$，$\boldsymbol{\xi}=(-1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 为导出组的基础解系，$\boldsymbol{\eta}_0=(2,-9,0)^{\mathrm{T}}$ 为方程组的一个特解. 故通解为

$$\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_0 \quad (k\in\mathbf{R})$$

(3) 当 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$ 时，方程组有唯一解

由克莱姆法则计算得

$$x_1=-\frac{a^2+9}{a^2}, x_2=\frac{3a^2+3a+9}{a^2}, x_3=\frac{3a+9}{a^2}$$

六、（本题 5 分）

【解】 令 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,\cdots,n)$，则 $b=\boldsymbol{\alpha\alpha}'=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

由 $\boldsymbol{A}$ 的定义知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n\\ 3 & 6 & 9 & \cdots & 3n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & 2n & 3n & \cdots & nn\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\ \vdots\\ n\end{pmatrix}(1,2,3,\cdots,n)=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}$$

且$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha\alpha}'\boldsymbol{\alpha}=b\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}=b\boldsymbol{A}$.

由$\boldsymbol{A}^2-b\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值必为 $\lambda^2-b\lambda=0$ 的根 0 或 b.

由 $\boldsymbol{A\alpha}'=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha\alpha}'=b\boldsymbol{\alpha}'$ 知 $\boldsymbol{\alpha}'$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=b$ 的特征向量.

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量就是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解. 由 $R(\boldsymbol{A})=1$ 知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有一个独立方程

$$x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=0$$

它有 $n-1$ 个线性无关的解

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_{n-1}=\begin{pmatrix}-n\\0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$$

于是存在可逆矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2 & -3 & \cdots & -n & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 2\\ & 1 & \cdots & 0 & 3\\ & & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & & 1 & n\end{pmatrix}\text{ 使 }\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & b\end{pmatrix}$$

【注】 由 $|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}|=\lambda^{n-1}|\lambda-\boldsymbol{\alpha\alpha}'|=\lambda^{n-1}|\lambda-b|=0$ 也可求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为单根 b 和 $n-1$ 重根 0.

七、（本题 6 分）

解　由题意,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

因为 $\lambda_3=0$,所以 $|\boldsymbol{A}|=0$.

由

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{vmatrix}=-3(a-2)=0$$

得

$$a=2$$

由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 4\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 4 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)=0$$

得

$$\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$$

由

$$-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 4\\ -1 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $\lambda_1=-3$ 对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

由

$$6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 4\\ -1 & 7 & -1\\ 4 & -1 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $\lambda_2=6$ 对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

由

$$0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ -1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 $\lambda_3=0$ 对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

单位正交化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

故正交矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$