2022 ~ 2023 学 年 秋 季 学 期

代数与几何期末第一次模拟考

2023.1.13

【此卷满分 50 分，考试时间 120 分钟】

一、 填空题（每题 2 分，共 10 分）

1. 设有两个 3×1 矩阵 $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 与 $\beta=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\beta}^T$，则 $\left|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\right|=$_________

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵（$n\geq 2$），对任意 n 维向量 α，均有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=0$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中所含向量个数 k 应满足_________

3. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 1，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是_________

4. 设四阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$，$\boldsymbol{AA}^T=2\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是四阶单位阵，求方阵 A 的伴随矩阵 A^* 的一个特征值_________

5. 在空间直角坐标系中，方程 $2x^2+6y^2=z$ 表示的几何图形是_________

二、 选择题（每题 2 分，共 10 分）

1. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是_________

（A） 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意两个列向量线性相关

（B） 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意两个行向量线性相关

（C） 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个列向量是其余列向量的线性组合

（D） 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任一列向量是其余列向量的线性组合

2. 若向量组α，β，λ线性无关，α，β，δ线性相关，则

（A）α必可由β，λ，δ线性表示　(B) β必不可由α，λ，δ线性表示

（C）δ必可由α，β，λ线性表示　（D）δ必不可由α,β,λ线性表示

3. 设有两个平面

$$\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

如果$R\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$=2，则一定有________

（A）π_1与π_2平行　（B）π_1与π_2垂直

（C）π_1与π_2重合　（D）π_1与π_2相交

4. 设$\boldsymbol{A}$是n阶实方阵，则下列命题错误的是________

（A）若$|\boldsymbol{A}|=0$，则 0 是$\boldsymbol{A}$的一个特征值

（B）若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{A}$的特征值只能是 1 或 0

（C）若$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=0$，则$\boldsymbol{A}$没有实特征值

（D）若$|\boldsymbol{A(E-A)}|=0$，则 1 是$\boldsymbol{A}$的一个特征值

5. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$ 正定，则常数 a 的取值范围是________

$(A)-\sqrt{\dfrac{7}{2}}<a<\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

$(B)-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$(C)-1<a<1$

$(D)-2<a<2$

三、（本题 5 分）

若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关,
证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

四、（本题 5 分）

已知k是实数，向量$\boldsymbol{\alpha}=\left(1,1,1,1\right)$，矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$.

(1)求 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值，特征向量;

(2)k满足什么条件时 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 正定.

五、（本题 5 分）

讨论方程组的解，并求解

$$\begin{cases}(a+3)\,x_1+x_2+2x_3=-a\,,\\ ax_1+(a-1)\,x_2+x_3=2a\,,\\ 3(a+1)\,x_1+ax_2+(a+3)x_3=3\,,\end{cases}$$

六、（本题 5 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 其第 i 行、第 j 列元素 $a_{ij}=i\times j, i, j=1, 2, \cdots, n$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量, 并求出可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

七、（本题 6 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的一个值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.