2022 ~ 2023 学年秋季学期

代数与几何期末第二次模拟考（答案）

一、 填空题（每题 2 分，共 12 分）

1. 设$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\alpha_3}$，$\boldsymbol{\beta}$均为 3 维向量，A=（$2\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\alpha_3}$），B=（$\boldsymbol{\alpha_1}$，$2\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\beta}$），

   其中$|A|$=a，$|B|$=b，则 $|A-B|$=___$\frac{b-a}{2}$______

   由行列式的性质可知，

   $|A-B|=\left|(\boldsymbol{\alpha_1},\ -\boldsymbol{\alpha_2},\ \boldsymbol{\alpha_3}-\boldsymbol{\beta})\right|$

   $=(-1)\left|(\boldsymbol{\alpha_1},\ \boldsymbol{\alpha_2},\ \boldsymbol{\alpha_3}-\boldsymbol{\beta})\right|$

   $=(-1)\left|(\boldsymbol{\alpha_1},\ \boldsymbol{\alpha_2},\ \boldsymbol{\alpha_3})\right|+\left|(\boldsymbol{\alpha_1},\ \boldsymbol{\alpha_2},\ \boldsymbol{\beta})\right|$

   $=-\frac{1}{2}|A|+\frac{1}{2}|B|$

   $=\frac{b-a}{2}$

2. 已知直线 $\ell_1: x-1=y=z+1$ ，直线 ℓ_2: $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=3+3t \end{cases}$

   则两条直线之间的距离为____$\frac{\sqrt{6}}{3}$_____

   ℓ_1为点向式方程，方向向量 $\boldsymbol{p}$=（1，1，1），取点 P（1，0，-1）

   ℓ_2为参数方程，方向向量 $\boldsymbol{q}$=（1，1，1），取点 Q（1，0，-1）

   $p\times q=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$=（1，-2，1） $\boldsymbol{s}$=（0，1，4）

   $d=\left|s\cdot\frac{p\times q}{|p\times q|}\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}$

3. 实对称矩阵 A 的所有特征值为-1，1，1，2，则$|A^*|$=_____-8_____

   由于实对称矩阵的特征值的几何重数与代数重数相等，且所有特征值的代数重数之和为 n（阶数），可知，A 为 4 阶方阵，并且$|A|$=$-1\times1\times1\times2=-2$

由于 $AA^*=|A|E$，$|A||A^*|=|A|^n$，故$|A^*|=|A|^{n-1}$

所以$|A^*|=（-2）^{4-1}=-8$

4. 已知 n 阶方阵 A 满足 R（A）=n-1，则对于齐次线性方程组A^*X，它的解集合 N（A^*）的维数是____n-1______

由 $AA^*=|A|E=0$可知，0≥R(A)+R(A^*)−n，即 R(A^*)≤1

又因为 A 存在不为零的 n-1 阶子式，故$A^*\neq\mathbf{0}$，那么 R(A^*)≥1，故 R(A^*)=1

对于齐次线性方程组A^*X，它的解向量空间维数是 n-R(A^*)=n-1

5. 二次曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 表示的是__双叶双曲面__

6. 向量组$\begin{pmatrix}2\\0\\2\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\1\\0\\8\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3\\0\\5\\-1\end{pmatrix}$的秩为____3______

这里$\boldsymbol{\alpha_4}=\boldsymbol{2\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_3}-\boldsymbol{\alpha_2}$

二、 选择题（每题 2 分，共 12 分）

1. A 为 n 阶方阵，以下说法正确的是（ D ）

A. R(A)+R(A^*)=n

R(A^*)=$\begin{cases} n\ ,\ \mathrm{R}(A)=\mathrm{n} \\ 1\ ,\ \mathrm{R}(A)=\mathrm{n}-1 \\ 0\ ,\ \mathrm{R}(A)\leq\mathrm{n}-2 \end{cases}$

B. B 为$n\times p$矩阵，若$AB=\mathbf{0}$，则$A=\mathbf{0}$

不一定

C. $|-A|$=（-1）$|A|$

$|-A|$=（-1)$^n|A|$

D. 若有 n 阶方阵 B，满足$A^*=B^*$，则不一定有$A=B$

当 n 为奇数，且$A=-B$时，$B^*=|B|B^{-1}=$（-1)$^n|A|$（-1）$A=A^*$

2. $A_{m\times n}=$（$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_n}$），其中$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_n}$为 A 的列向量，以下说法

正确的是（ C ）

A. 当$m > n$时，$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_n}$一定线性无关

B. 当$m < n$时，$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_n}$不一定线性相关

C. 对 A 施加初等列变换，即用可逆矩阵 P 右乘 A，得到的$AP = B$，则 A 与 B 的列向量组等价

对于$AP = B$，B的列向量是A的列向量的线性组合

D. 对 A 施加初等行变换，即用可逆矩阵 P 左乘 A，得到的$PA = B$，则 A 与 B 的列向量组等价

B的列向量是P的列向量的线性组合

3. 以下说法正确的是（ A ）

A. 若向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_m}$线性无关，则对于任意一组不全为 0 的数k_1，k_2，…，k_m，都有$k_1\boldsymbol{\alpha_1} + k_2\boldsymbol{\alpha_2} + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha_m} \neq \boldsymbol{0}$

这是向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_m}$线性无关的充要条件：当且仅当k_1，k_2，…，k_m均为 0 时，才有$k_1\boldsymbol{\alpha_1} + k_2\boldsymbol{\alpha_2} + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha_m} \neq \boldsymbol{0}$ 的逆否命题

B. 若存在一组一组不全为 0 的数k_1，k_2，…，k_m，使得$k_1\boldsymbol{\alpha_1} + k_2\boldsymbol{\alpha_2} + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha_m} \neq \boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_m}$线性无关

举反例，对于$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_m}$线性相关，且$\boldsymbol{\alpha_1} \neq \boldsymbol{0}$，取$k_1 = 1$，$k_2$，…，$k_m$均为 0，那么也有$k_1\boldsymbol{\alpha_1} + k_2\boldsymbol{\alpha_2} + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha_m} \neq \boldsymbol{0}$

C. 若向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_m}$线性相关，则其中任意一个向量都可以被其余 m-1 个向量线性表示

应该是：至少存在一个向量可以被其它向量线性表示

D. 若向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_m}$能被向量组$\boldsymbol{\beta_1}$，$\boldsymbol{\beta_2}$，…，$\boldsymbol{\beta_r}$线性表示，则$r \geq m$

这里并没有说向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_m}$线性无关，应该是秩的比较而不是向量个数的比较

4. 以下说法正确的是（ D ）

A. 若方程组$AX=\mathbf{0}$有非零解，则方程组$AX=\boldsymbol{\beta}$有无穷解

始终记住方程组$AX=\boldsymbol{\beta}$有解这个先决条件是 R（A）= R（$A\vdots\boldsymbol{\beta}$）

而这里只能确定 R（A）< n

B. 若方程组$AX=\mathbf{0}$仅有零解，则方程组$AX=\boldsymbol{\beta}$有唯一解

说明 R（A）= n，但是 R（$A\vdots\boldsymbol{\beta}$）可能大于 n

C. 若 A 为$m\times n$矩阵，且$m<n$，则方程组$AX=\boldsymbol{\beta}$有无穷解

同上

D. 若 A 为$m\times n$矩阵，且 R（A）$=n$，则方程组$AX=\boldsymbol{\beta}$可能无解

同上

5. 以下说法正确的是（ B ）

A. 若 A 可逆，且 A 的特征值为λ，则A^*的特征值为$\frac{\lambda}{|A|}$

应该是$\frac{|A|}{\lambda}$

B. 实对称正交矩阵的特征值为 1 或-1

实对称正交矩阵满足$A=A^{-1}=A^T$

那么有$A^TAX=A^T(AX)=\lambda A^TX=\lambda(AX)=\lambda^2X$

而$A^TAX=AA^{-1}X=X$，即$\lambda^2X=X$，故$\lambda=\pm1$

C. 若矩阵 A，B 的特征值都相同，则 A 与 B 相似

举反例$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

D. $\boldsymbol{\alpha}=(a_1，a_2，a_3)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1，b_2，b_3)$，$A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}$，若$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$均不是零向量，

则 0 是A的 2 重特征值

$|\lambda E-A|=|\lambda E-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}|$，利用降阶公式得到$\lambda^2|\lambda E-\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\alpha}|$

那么当$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$时，0 是 3 重特征值

6. 以下说法正确的是（ C ）

A. 若 n 阶方阵 A 能被相似对角化，则 A 有 n 个互不相等的特征值

应该是：A 有 n 个线性无关的特征向量

B. 若 n 阶方阵 A 能被相似对角化，则 A 属于不同特征值的特征向量必正交

原来的描述是：实对称矩阵属于不同特征值的特征向量必正交

C. 设 A 为正定矩阵，P 为可逆矩阵，则P^TAP为正定矩阵

任选非零向量 X，那么$X^TP^TAPX=(PX)^TA(PX)$

因为 A 为正定矩阵，所以$X^TP^TAPX=(PX)^TA(PX)>0$

故P^TAP为正定矩阵

D. 并非所有实对称矩阵都与对角矩阵合同

所有实对称矩阵都与对角矩阵合同

第 3 题（满分 7 分）

（20）（本题满分 11 分）

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

（Ⅰ）证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基；

（Ⅱ）当 k 为何值时，存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同，并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

解 （Ⅰ）证明

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3)=$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$$

且
$$\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\2k&k+1\end{vmatrix}=4\neq0$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

（Ⅱ）由题意知，$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\xi}\neq0$.

即

$k_1(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\alpha}_3)=0\quad(k_i\neq0,i=1,2,3)$

$k_1(2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_3)=0$

$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)=0$ 有非零解

所以
$$|\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3|=0$$

即 $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{vmatrix}=0$，得 $k=0$.

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_1=0$$

所以

$$k_2=0,k_1+k_3=0$$

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_1\boldsymbol{\alpha}_3,k_1\neq0$$

第 4 题（满分 6 分）

11 设四元齐次方程组（Ⅰ）为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

且已知另一四元齐次方程组（Ⅱ）的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$，

（1）求方程组（Ⅰ）的一个基础解系.

（2）当 a 为何值时，方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解.

解 （1）方程组（Ⅰ）$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$.

显然，系数矩阵的秩为 2.

对（Ⅰ）的系数阵进行初等行变换

$$\begin{pmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3&-1&0\\3&5&0&-1\end{pmatrix}$$

故方程组（Ⅰ）与 $\begin{cases}2x_1+3x_2=x_3\\3x_1+5x_2=x_4\end{cases}$ 等价

取
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

得 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 为（Ⅰ）的一个基础解系.

（2）若（Ⅰ），（Ⅱ）有非零公共解，即存在不全为 0 的数 x_1,x_2,x_3,x_4，

使

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2=x_3\boldsymbol{\alpha}_1+x_4\boldsymbol{\alpha}_2 \tag{$*$}$$

即$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\mathbf{0}$有非零解.

故

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2)<4$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&1&-2\\2&3&-a-2&-4\\3&5&-1&-a-8\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&1&-2\\0&3&-a+2&-6\\0&5&5&-a-11\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&1&-2\\0&0&a+1&0\\0&0&0&a+1\end{pmatrix}$$

所以$a=-1$时,方程组有非零解

此时
$$\begin{cases}x_1-2x_3+x_4=0\\x_2+x_3-2x_4=0\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x_1=2x_3-x_4\\x_2=-x_3+2x_4\end{cases}$$

所以$\boldsymbol{\xi}_1=(2,-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$为($*$)的基础解系.

将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$表示式代入($*$)得(Ⅰ),(Ⅱ)的全部解为$\boldsymbol{X}=k_1(2,-1,1,1)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,4,7)^{\mathrm{T}}$($k_1,k_2$为不同时为0的常数).

第 5 题（满分 6 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解　（Ⅰ）由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，故 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 由题设可得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

所以，-1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，且属于 -1 的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$，$k_1$ 为任意非零常数

1 也是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，且属于 1 的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，$k_2$ 为任意非零常数.

设 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 0 的特征向量，由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则

$$(1,0,-1)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,(1,0,1)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

即

$$\begin{cases}x_1-x_3=0\\ x_1+x_3=0\end{cases}$$

于是属于 0 的特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$k_3$ 为任意非零常数.

（Ⅱ）令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，于是

$$A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第 6 题（满分 7 分）

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 =$$

$$2(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} +$$

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}(b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$(x_1, x_2, x_3)(2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}，\text{其中 } \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$$

所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$.

（Ⅱ）由于 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，故 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为单位向量，故 $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}} = 1$，故 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 1$，同样 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 1$. 则有 $\boldsymbol{A\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}$，由于 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1 = 2$.

$\boldsymbol{A\beta} = (2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$，由于 $\boldsymbol{\beta} \neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_2 = 1$.

$r(\boldsymbol{A}) = r(2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant r(2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}) + r(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}) = r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}) + r(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}) = 1 + 1 = 2 < 3$.

所以 $|\boldsymbol{A}| = 0$，故 $\lambda_3 = 0$.

因此，f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.