2022 ~ 2023 学年秋季学期

代数与几何期末第二次模拟考

【此卷满分 50 分，考试时间 120 分钟】

一、 填空题（每题 2 分，共 12 分）

1. 设$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\alpha_3}$，$\boldsymbol{\beta}$均为 3 维向量，$A=$（$2\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\alpha_3}$），$B=$（$\boldsymbol{\alpha_1}$，$2\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\beta}$），其中$|A|$=a，$|B|$=b，则 $|A-B|$=_________

2. 已知直线 $\ell_1: x-1=y=z+1$ ，直线 ℓ_2： $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=3+3t \end{cases}$

   则两条直线之间的距离为_________

3. 实对称矩阵 A 的所有特征值为-1，1，1，2，则$|A^*|$=_________

4. 已知 n 阶方阵 A 满足 R（A）=n-1，则对于齐次线性方程组A^*X，它的解集合 N（A^*）的维数是_________

5. 二次曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 表示的是__________

6. 向量组$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$的秩为__________

二、选择题（每题 2 分，共 12 分）

1. A 为 n 阶方阵，以下说法正确的是（　　）

   A. R(A)+R(A^*)=n

   B. B 为$n\times p$矩阵，若$AB=\mathbf{0}$，则$A=\mathbf{0}$

   C. $|-A|$=（-1）$|A|$

   D. 若有 n 阶方阵 B，满足$A^*=B^*$，则不一定有$A=B$

2. 设$A_{m\times n}=$（$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_n}$），其中$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_n}$为 A 的列向量，以下说法正确的是（　　）

   A. 当$m>n$时，$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_n}$一定线性无关

   B. 当$m<n$时，$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_n}$不一定线性相关

   C. 对 A 施加初等列变换，即用可逆矩阵 P 右乘 A，得到的$AP=B$，则 A 与 B 的列向量组等价

   D. 对 A 施加初等行变换，即用可逆矩阵 P 左乘 A，得到的$PA=B$，则 A 与 B 的列向量组等价

3. 以下说法正确的是（　　）

A. 若向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_m}$线性无关，则对于任意一组不全为 0 的数k_1，k_2，…，k_m，都有$k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha_m}\neq\mathbf{0}$

B. 若存在一组一组不全为 0 的数k_1，k_2，…，k_m，使得$k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha_m}\neq\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_m}$线性无关

C. 若向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_m}$线性相关，则其中任意一个向量都可以被其余 m-1 个向量线性表示

D. 若向量组$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，…，$\boldsymbol{\alpha_m}$能被向量组$\boldsymbol{\beta_1}$，$\boldsymbol{\beta_2}$，…，$\boldsymbol{\beta_r}$线性表示，则$r\geq m$

4. 以下说法正确的是（　　）

A. 若方程组$AX=\mathbf{0}$有非零解，则方程组$AX=\boldsymbol{\beta}$有无穷解

B. 若方程组$AX=\mathbf{0}$仅有零解，则方程组$AX=\boldsymbol{\beta}$有唯一解

C. 若 A 为$m\times n$矩阵，且$m<n$，则方程组$AX=\boldsymbol{\beta}$有无穷解

D. 若 A 为$m\times n$矩阵，且 R（A）$=n$，则方程组$AX=\boldsymbol{\beta}$可能无解

5. 以下说法正确的是（　　）

A. 若 A 可逆，且 A 的特征值为λ，则A^*的特征值为$\frac{\lambda}{|A|}$

B. 实对称正交矩阵的特征值为 1 或-1

C. 若矩阵 A，B 的特征值都相同，则 A 与 B 相似

D. $\boldsymbol{\alpha}=$（a_1，a_2，a_3），$\boldsymbol{\beta}=$（b_1，b_2，b_3），$A=\boldsymbol{\alpha\beta^T}$，若$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$均不是零向量，则 0 是 A 的 2 重特征值

6. 以下说法正确的是（　　）

A. 若 n 阶方阵 A 能被相似对角化，则 A 有 n 个互不相等的特征值

B. 若 n 阶方阵 A 能被相似对角化，则 A 属于不同特征值的特征向量必正交

C. 设 A 为正定矩阵，P 为可逆矩阵，则P^TAP为正定矩阵

D. 并非所有实对称矩阵都与对角矩阵合同

第 3 题（满分 7 分）

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

（Ⅰ）证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基；

（Ⅱ）当 k 为何值时，存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同，并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

第 4 题（满分 6 分）

11 设四元齐次方程组（Ⅰ）为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

且已知另一四元齐次方程组（Ⅱ）的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$，

(1) 求方程组（Ⅰ）的一个基础解系.

(2) 当 a 为何值时，方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解.

第 5 题（满分 6 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

第 6 题（满分 7 分）

设二次型 $f(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=2(a_1\boldsymbol{x}_1+a_2\boldsymbol{x}_2+a_3\boldsymbol{x}_3)^2+(b_1\boldsymbol{x}_1+b_2\boldsymbol{x}_2+b_3\boldsymbol{x}_3)^2$，记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

（Ⅰ）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.