目录

哈尔滨工业大学（深圳）2022 / 2023 学年秋季学期

代数与几何期中试题

A4 标准打印版 (试题完全来源于群友 @MOV AX,‘HIT’)

注意事项：

1. 本次考试为闭卷考试，考试时间为 90 分钟，总分 30 分。

注意行为规范　遵守考场纪律

得分	
阅卷人	

一、填空题：本题共 5 小题，每小题 1 分，满分 5 分。

1. 已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 表示行列式 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $2A_{11}+A_{21}+A_{31}+2A_{41}=$ ________ 。

2. 设 A 为 4 阶可逆方阵,将 A 的第 2 列和第 3 列对换而得到矩阵 B,则 $B^{-1}A=$____________________ 。

3. 已知 A 为 3 阶方阵，且 $A\neq 0$，$a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$，则 $|A|=$ ________ 。

4. 设 A、B 为 4 阶方阵，且 $|A|=7,|B|=-5$，则 $\begin{vmatrix} A & BA \\ -A & 0 \end{vmatrix}$ ________ 。

5. 已知 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{d}$，$\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{d}$，则 $\mathbf{a}-\mathbf{d}$ 与 $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ 的位置关系是 ____________ 。

得分	
阅卷人	

二、选择题：本题共 5 小题，每小题 1 分，满分 5 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设有行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & a_1 \\ 0 & b_2 & 0 & a_2 \\ b_3 & 0 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & a_4 & 0 \end{vmatrix}$，则 D 的值为　　（　　　）

   A. $(a_2b_1-a_1b_2)(a_4b_3-a_3b_4)$　　B. $(a_1b_2-a_2b_1)(a_3b_4-a_4b_3)$

   C. 0　　D. $(a_2b_1-a_1b_2)(a_3b_4-a_4b_3)$

2. 设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 1 & 0 & -1 & c \end{pmatrix}$，若矩阵 A 的秩为 2，则以下正确的是　　（　　　）

   A. $a=b$　　B. $b=c$　　C. $c=a$　　D. $b=a+c$

3. 对 n 阶方阵 A，其伴随矩阵为 A^*，若矩阵 A 的秩 $\mathrm{R}(A)=n-1$，则 (　　)

A. A 可逆；　　B. $A^*=0$；

C. $\mathrm{R}(A)+\mathrm{R}(A^*)=n$；　　D. $A+A^*$ 可逆。

4. 设矩阵 A 为 n 阶可逆矩阵，矩阵 B 为 $n\times 1$ 矩阵，b 是常数，再设 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ B' & b \end{pmatrix}$，则下列正确的答案是 (　　)

A. 若 $b\neq 0$，则矩阵 M 可逆；　　B. 若矩阵 M 可逆，则 $b\neq 0$；

C. $b\neq 0$ 当且仅当矩阵 M 可逆；　　D. 以上说法都不对。

5. 设有两条直线 $\begin{cases} l_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3} \\ l_2: x-2=y=z-3 \end{cases}$，则它们的位置关系是 (　　)

A. 平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 共面

得分	
阅卷人	

三、（**5 分**）

求过点 $M_0(2,1,3)$，且与直线 $L:\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$ 垂直相交的直线 L' 的方程。

得分	
阅卷人	

四、（5 分）

已知 n 维列矩阵 α 满足 $\alpha^T\alpha=1$，E_n 为 n 阶单位阵，$n>1, s\in R$，对于矩阵 $M=\begin{pmatrix}1 & -\alpha^T\\ \alpha & sE_n\end{pmatrix}$：

（1） 讨论不同 s 下矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的奇异性；

（2） 在 $\boldsymbol{M}$ 可逆时，求出 $\boldsymbol{M}$ 的由 α 表示的逆矩阵。

得分	
阅卷人	

五、（5 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

（1）　证明 $\mathrm{R}(A) = 4$；

（2）　计算乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$。

得分	
阅卷人	

六、（5 分）

设 A 是 n 阶方阵。

（1） 若 $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$，求 A^*；

（2） 若 $A^*=0$，判断 A 是否为零矩阵，并说明理由；

（3） 记 B' 是 B 的转置，若存在 $n\times m$ 非零矩阵 B，使得 $B'A=0$，求 $\mathrm{R}(A)$ 的范围。

哈尔滨工业大学（深圳）2022 / 2023 学年秋季学期

代数与几何期中试题参考答案

Oliver 撰写，感谢群友 @ 最幸福的珂朵莉提供思路和解法。

一、填空题

1. **解答** 法一：直接计算。$A_{11}=-7$，$A_{21}=-5$，$A_{31}=8$，$A_{41}=3$（注意代数余子式的正负号），可得结果为 -5.

   法二：由于更改行列式某位置的值不影响其代数余子式的值，因此我们构造行列式 $\begin{vmatrix}2&0&-1&2\\1&1&2&1\\1&1&0&2\\2&-1&1&1\end{vmatrix}$，

   此时 A_{11}，A_{21}，A_{31}，A_{41} 都不变，我们发现这个行列式的值刚好就是题中要求的 $2A_{11}+A_{21}+A_{31}+2A_{41}$，所以计算该行列式的值也可得答案为 -5。 □

2. **解答** 考查初等矩阵。要将 A 的第二列和第三列对换，只需在其**右边**乘上 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，所以

$$B=A\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad B^{-1}A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}A^{-1}A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad □$$

3. **解答** 考查伴随矩阵的概念。$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$，考虑到 $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$，所以

   $A^*=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}=A^T$，所以 $AA^T=AA^*=|A|E_3$，两边取行列式得 $|A|^2=|A|^3$。所以

   $|A|=0$ 或 1。将 $|A|$ 按第一行展开，发现 $|A|=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}A_{1j}=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}^2$，由于按照每行展开都有这样的形式，所以可得 $3|A|=\sum_{i,j=1,2,3}a_{ij}^2$，又由于 A 非零，所以 a_{ij} 中一定有非零的数，所以一定有 $|A|\neq 0$，所以 $|A|=1$。 □

4. **解答** 目标：化到上三角阵的形式便于计算。先将行列式右半部分通过初等列变换与左半部分互换，一共要互换 4 次（一列一列地换），所以行列式的值不变（相当于乘 $(-1)^4$），得到 $\begin{vmatrix}BA&A\\0&-A\end{vmatrix}$；接着，再把行列式的下半部分（即第二“大行”）加到上半部分（即第一“大行”），得 $\begin{vmatrix}BA&0\\0&-A\end{vmatrix}$，化成了上三角阵形式。此式等于 $|BA|\times|-A|=|B||A|(-1)^4|A|=(-5)*7*7=-245$.（亦可对后四行做 Laplace 展开，很快能获得结果） □

5. **解答** $(\mathbf{a}-\mathbf{d})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}-\mathbf{d}\times\mathbf{b}+\mathbf{d}\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{d}-\mathbf{c}\times\mathbf{d}$，由题设 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{d}$，$\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{d}$，所以 $(\mathbf{a}-\mathbf{d})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$，所以两个向量是平行/共线的。（亦可用原始式相减再移项得到目标式） □

二、选择题

1. **解答** 按照行列式展开定理计算即可。答案是 D。 □

2. **解答** 将第三行加上第一行再减去第二行得到 $\begin{pmatrix}-1&1&0&a\\0&1&-1&b\\0&0&0&c+a-b\end{pmatrix}$，此时已经是行阶梯形矩阵，秩等于其非零行数，所以若 A 的秩为 2，只要 $b=a+c$ 即可。选 D。 □

3. **解答** 重要结论：若 A 为 n 阶方阵，则 $R(A^*)=\begin{cases}n & R(A)=n,\\1 & R(A)=n-1,\\0 & R(A)<n-1.\end{cases}$。$A$ 显然不可逆；A^* 不是零矩阵；C 正确；D 项可举反例：$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$（反例构造思路：将 $A+A^*$ 左乘 A，得 $A^2+|A|E$，由于 $|A|=0$，所以 $A(A+A^*)=A^2$。如果 $A+A^*$ 可逆，则 $R(A)=R(A^2)$，因此如果 $R(A)\neq R(A^2)$，一定有 $A+A^*$ 不可逆。而 $R(A)\neq R(A^2)$ 可能发生，因为 $R(A)\geqslant R(A^2)$，又因为 $R(A)+R(A)-n\leqslant R(A^2)$，结合 $R(A)=n-1$ 知 $n-2\leqslant R(A^2)\leqslant n-1$，所以只要让 $R(A^2)=n-2$ 即可。）
(附结论证明：当 $R(A)=n$ 时，A 可逆，A^* 也可逆，则 $R(A^*)=n$; 当 $R(A)=n-1$ 时，$|A|=0$, 故 $AA^*=|A|E=0$, $R(A)+R(A^*)\leqslant n$, 则 $R(A^*)\leqslant n-R(A)=1$; 又 $R(A)=n-1$, 故 A 存在 $n-1$ 阶非零子式，即 A^* 有非零元，$R(A^*)\geqslant 1$. 综上，$R(A^*)=1$. 当 $R(A)<n-1$ 时，A 的所有 $n-1$ 阶子式都等于 0, 则 $A^*=0$, $R(A^*)=0$.) □

4. **解答** $|M|\xlongequal{r_2-B^TA^{-1}\times r_1}\begin{vmatrix}A & B\\0 & b-B^TA^{-1}B\end{vmatrix}=|A|(b-B^TA^{-1}B)$，$M$ 可逆 $\iff b\neq B^TA^{-1}B$，ABC 都错误，选 D。 □

5. **解答** l_1 的方向向量 $\mathbf{s}_{l_1}=(1,2,3)$，l_2 的方向向量 $\mathbf{s}_{l_2}=(1,1,1)$，取 l_1、l_2 上的特殊点：$M_{l_1}=(0,0,0)$，$M_{l_2}=(2,0,3)$，$\mathbf{M_{l_1}M_{l_2}}=(2,0,3)$，取混合积 $[\mathbf{s}_{l_1}\quad \mathbf{s}_{l_2}\quad \mathbf{M_{l_1}M_{l_2}}]\neq 0$，所以选 C。 □

三、（**5 分**）

解答 l 的方向向量 $\mathbf{s}=(2,-1,1)\times(1,1,-1)=(0,3,3)$，$L$ 上一点 $M(0,0,1)$，则 $\mathbf{MM_0}=(2,1,2)$，则 $\mathbf{MM_0}$ 在 L 上的投影向量为 $\vec{\alpha}=\dfrac{(\mathbf{MM_0},\mathbf{s})}{(\mathbf{s},\mathbf{s})}\mathbf{s}=(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$，则 L' 的方向向量 $\mathbf{s}'=\mathbf{MM_0}-\vec{\alpha}=(2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，则 L' : $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-\frac{1}{2}}=\dfrac{z-3}{\frac{1}{2}}$。 □

四、（**5 分**）

解答 （1）$|M|=\begin{vmatrix}1 & -\alpha^T\\\alpha & sE_n\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-\alpha r_1}\begin{vmatrix}1 & -\alpha^T\\0 & sE_n+\alpha\alpha^T\end{vmatrix}=|sE_n+\alpha\alpha^T|\xlongequal{\text{降阶公式}}s^{n-1}(s+1)$，可知当 $s=0$ 或 $s=-1$ 时，$|M|=0$，M 为奇异矩阵；其他情况下 M 为非奇异矩阵。

（2）M 可逆故 $s \neq 0$ 且 $s \neq -1$。$M = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^T \\ \alpha & sE_n \end{pmatrix} \xlongequal{c_1 - \frac{1}{s}\alpha c_2} \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{s} & -\alpha^T \\ 0 & sE_n \end{pmatrix} \xlongequal{r_1 + \frac{1}{s}\alpha r_2} \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{s} & 0 \\ 0 & sE_n \end{pmatrix} \xlongequal[r_2 \times \frac{1}{s}]{r_1 \times \frac{1}{1+\frac{1}{s}}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = E$，即有 $\begin{pmatrix} \frac{s}{s+1} & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s}E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{s}\alpha^T \\ 0 & E_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{s}\alpha & E_n \end{pmatrix} = E$，记为 $P_1P_2P_3MQ = E$，两边右乘 Q^{-1}，再右乘 M^{-1}，再左乘 Q，即得 $M^{-1} = QP_1P_2P_3 = \begin{pmatrix} \frac{s}{s+1} & \frac{\alpha^T}{s+1} \\ -\frac{\alpha}{s+1} & \frac{1}{s}E_n - \frac{\alpha\alpha^T}{s(s+1)} \end{pmatrix}$。 □

五、（5 分）

解答 （1）思路：证明 A^* 可逆，进而证明 A 可逆。

$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+r_4]{r_1+r_2, r_1+r_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，按第一行展开得 $|A^*| = (-1)^{1+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) \times (-2) = 8$，所以 A^* 可逆。下面证明 A 可逆：由 $AA^* = |A|E$，得 $R(A) + R(A^*) - 4 \leqslant R(|A|E)$，又 $R(A^*) = 4$，所以 $R(A) \leqslant R(|A|E)$。若 A 不可逆，则有 $R(|A|E) = 0$，$R(A) \leqslant 0$，即 A 只能为零矩阵。又 A^* 非零，所以 A 非零【因为一个零矩阵的伴随矩阵必是零矩阵，所以其逆否命题：伴随矩阵不是零矩阵推出原矩阵一定不是零矩阵，就是正确的】，所以 A 可逆。验证得 A 可逆时的确有 A 与 A^* 同时可逆，因此 A 可逆，$R(A) = 4$。

（2）$AA^* = |A|E$，A 可逆，所以 $A = |A|(A^*)^{-1}$，而对式 $AA^* = |A|E$ 两边取行列式又有 $|A||A^*| = |A|^n(|A| \neq 0)$，因此 $|A^*| = |A|^{n-1}$。所以 $|A| = 2$，所以有 $AB = |A|(A^*)^{-1}B = 2(A^*)^{-1}B \xlongequal{\text{暴算}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xlongequal{\text{暴算}} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$。 □

六、（5 分）

解答 （**1**）由 $AA^* = |A|E$，此时 A 可逆，得 $A^* = |A|A^{-1}$，而 $|A| = \frac{1}{|A^{-1}|} = -\frac{1}{21}$，所以 $A^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{1}{21} \\ 0 & -\frac{2}{21} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}$。

（**2**）A 不一定是零矩阵。例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A^* = 0$，但 A 明显不是零矩阵。（事实上，若 A 为 n 阶方阵，则当 $R(A) < n-1$ 时 $R(A^*) = 0$ 即 $A^* = 0$）

（**3**）若存在非零的 B，则 $R(B') + R(A) - n \leqslant R(B'A) = 0$，结合 $R(B') = R(B)$，也即 $R(A) \leqslant n - R(B)$，又 B 非零，所以 $0 \leqslant R(A) \leqslant n-1$。下面证明对于 $0 \leqslant R(A) \leqslant n-1$ 一定存在非零的 B：

由 $R(A)=r<n$ 可知存在有限个初等矩阵 $P_1,...,P_n,Q_1,...,Q_m$ 使得 $P_1...P_nAQ_1...Q_m=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0_{n-r}\end{pmatrix}$，由 $P_1,...,P_n,Q_1,...,Q_m$ 都是可逆矩阵，所以令 $P=P_1...P_n,Q=Q_1...Q_m$，知 P,Q 也是可逆阵，即存在可逆阵 P,Q 使 $PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0_{n-r}\end{pmatrix}$，两边右乘 Q^{-1} 得 $PA=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0_{n-r}\end{pmatrix}Q^{-1}$。构造 $m\times n$ 矩阵 $M=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1_{n-r}\end{pmatrix}$，在上式两边左乘 M，由于 $M\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0_{n-r}\end{pmatrix}=0$，可得 $MPA=0$。下面证明 MP 非零：$R(MP)\geqslant R(M)+R(P)-n$，因为 P 可逆，故 $R(MP)\geqslant R(M)>0$，所以 MP 非零，所以 MP 即为我们所求的 B'。因此对于 $0\leqslant R(A)\leqslant n-1$ 一定存在非零的 B，也即 $R(A)$ 的范围是 $0\leqslant R(A)\leqslant n-1$。 $\square$