哈爾濱工業大學(深圳)
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

2023级代数与几何期中考试(回忆版)参考答案

编写&排版:一块肥皂

答案速查:

1. -112

2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $x-y-4=0$

4. -34560

5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. B

7. A

8. B

9. C

10. B

11. $\begin{cases} x+y+2z-6=0 \\ x+y-z+4=0 \end{cases}$

12. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

13. (1)略

(2)$\boldsymbol{M}^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{E}_n-\frac{1}{\lambda^2}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$

14. (1)$\begin{bmatrix} 2 & 0 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ & & 33 & -320 & 0 \\ & & 0 & 33 & 0 \\ & & 0 & 0 & 33 \end{bmatrix}$

(2)$\operatorname{rank}[(\boldsymbol{AB})^*]=5$

详解：

1. $\det(2\boldsymbol{E}_5-\boldsymbol{A}^2)=\det(2\boldsymbol{E}_5-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=\det[2\boldsymbol{E}_5-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}]=\det[2\boldsymbol{E}_5-(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}]=\det[2\boldsymbol{E}_5-3\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}]$，

由降阶公式，原式$=2^{5-1}\det[2\boldsymbol{E}_1-3\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}]=16\det([-7])=16\times(-7)=-112$.

2. $$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_4)=\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&0&0&1&1&&&\\0&2&2&0&&1&&\\1&0&0&0&&&1&\\0&1&0&0&&&&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\\0&2&2&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\\0&1&1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&&&&0&0&1&0\\&1&&&0&0&0&1\\&&1&&0&\frac{1}{2}&0&-1\\&&&1&1&0&0&0\end{array}\right]=(\boldsymbol{E}_4|\boldsymbol{A}^{-1}).$$

3. 沿z轴的方向向量可取$\boldsymbol{s}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AB}=(1,1,8)$.

由于平面π与z轴平行，所以平面π的法向量$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{s}$垂直；且A,B在平面π上，所以$\boldsymbol{n}$与$\overrightarrow{AB}$垂直.

则可取$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}\times\overrightarrow{AB}=(1,-1,0)$，则平面$\pi$的点法式方程为$(x-4)-y=0$.

故平面π的方程为$x-y-4=0$

4. $$\text{原式}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&2&4&8&16&32\\1&3&9&27&81&243\\1&4&16&64&256&1024\\1&5&25&125&625&3125\\1&6&36&216&1296&7776\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5&6\\1&4&9&16&25&36\\1&8&27&64&125&216\\1&16&81&256&625&1296\\1&32&243&1024&3125&7776\end{vmatrix}$$

$$=-\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 6}(j-i)=-\prod_{1\leqslant k\leqslant 5}k!=-1\times2\times6\times24\times120=-34560.$$

5. 对于第一个操作，取$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$；

对于第二个操作，取$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$.

则$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，易知$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$即为所求.

6. 由于行列式的初等变换不改变行列式结果为0或不为0这一特征，故只要初等变换后出现零行或零列，利用Laplace展开（拉普拉斯展开即利用余子式展开）就可以得到$\det(\boldsymbol{A})=0$. 故选B.

7. 对于选项A，取 $r=0$ 即有 $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵，错误，故选A；

对于选项B,C,D，考查秩的定义，设子式的阶数为 k，当 $k>r$ 时，子式均为0；

当 $0<k\leqslant r$ 时，子式不全为0.

8. 熟知结论 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n \\ 1, & \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n-1 \\ 0, & \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<n-1 \end{cases}$，则对于选项A，有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*)=n$，故 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆；

对于选项C,D，由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}_n$，两边取行列式，则有 $\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^*)=\det^n(\boldsymbol{A})$，

当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*)=n$ 时，可由上式化简得 $\det(\boldsymbol{A}^*)=\det^{n-1}(\boldsymbol{A})$，当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*)<n$ 时，$\det(\boldsymbol{A}^*)=0=\det^{n-1}(\boldsymbol{A})$ 仍成立，故C,D正确；

对于选项B，当 $n=2$ 时，取 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，有 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{O}$，故B错误.

9. 对矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 进行变换 $\rightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$，

此过程不改变 $\det(\boldsymbol{M})$ 的值，故 $\det(\boldsymbol{M})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})=\det[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})]$，故选C.

10. 对于选项A，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均不为零向量，则显然成立，若有一个或多个为零向量，由于零向量与任意向量都垂直，故正确；

对于选项B，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面，故错误；

对于选项C，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均不为零向量，则二者夹角为0或 π，是平行关系；若有一个或多个为零向量，由于零向量与任意向量都平行，故正确；

对于选项D，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均不为零向量，则二者互为相反向量，是平行关系；若有一个或多个为零向量，由于零向量与任意向量都平行，故正确；

故选B.

11. 设 L 在一平面 π_0 内，则平面 π_0 的法向量 $\boldsymbol{n}_0$ 与直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 垂直；

且平面 π_0 与平面 π 垂直，则平面 π_0 的法向量 $\boldsymbol{n}_0$ 与平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直；

由直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=(1,-1,0)$，平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$，

则可取 $\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(-1,-1,-2)$，且直线 L 上点 $M(-4,-4,5)$ 在平面 π_0 上，

则平面 π_0 的点法式方程为 $-(x+4)-(y+4)-2(z-5)=0$ 即 $x+y+2z-6=0$.

综上，直线 L 在平面 π 上的投影方程为 $\begin{cases}x+y+2z-6=0\\ x+y-z+4=0\end{cases}$.

12. 在 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}$ 两端同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}$ 即 $\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$，

又 $\det(\boldsymbol{A})=4$，故 $(4\boldsymbol{E}_3-2\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

由 $(4\boldsymbol{E}_3-2\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_3)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&-2&2&1&0&0\\2&2&-2&0&1&0\\-2&2&2&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&-2&2&1&0&0\\0&4&-4&-1&1&0\\0&0&4&1&0&1\end{array}\right]$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&-2&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&4&0&0&1&1\\0&0&4&1&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&4&0&0&1&1\\0&0&4&1&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{array}\right]=[\boldsymbol{E}_3|(4\boldsymbol{E}_3-2\boldsymbol{A})^{-1}]$$

知 $4\boldsymbol{E}_3-2\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(4\boldsymbol{E}_3-2\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$,

故 $\boldsymbol{X}=(4\boldsymbol{E}_3-2\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

13. (1)由于 $(s\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A})(s\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})$

$=s\boldsymbol{E}_n s\boldsymbol{E}_n-s\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}s\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A}^2$

$=s^2\boldsymbol{E}_n-s\boldsymbol{A}+s\boldsymbol{A}-\boldsymbol{O}$

$=s^2\boldsymbol{E}_n$，证毕；

(2)由 $\det(\boldsymbol{M})=\det(\lambda\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$，利用降阶公式，原式 $=\lambda^{n-1}\det(\lambda\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})$，

又因为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，两边取转置，便有 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0^{\mathrm{T}}=0$，则原式 $=\lambda^{n-1}\det(\lambda\boldsymbol{E}_1+0)=\lambda^n$，

则 $\det(\boldsymbol{M})=\lambda^n\neq0$，故 $\boldsymbol{M}$ 可逆；

在(1)中，式 $(s\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A})(s\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=s^2\boldsymbol{E}_n$ 中若 $s\neq0$，则可变形为 $(s\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A})\left(\frac{1}{s}\boldsymbol{E}_n-\frac{1}{s^2}\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{E}_n$，

不难看出 $s\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}$ 与 $\frac{1}{s}\boldsymbol{E}_n-\frac{1}{s^2}\boldsymbol{A}$ 互逆，即 $(s\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{s}\boldsymbol{E}_n-\frac{1}{s^2}\boldsymbol{A}$.

取 $s=\lambda$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；则 $s=\lambda\neq0$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$ 均符合要求，

故 $\boldsymbol{M}^{-1}=(\lambda\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{E}_n-\frac{1}{\lambda^2}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

14.（1）先令 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可分块为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{10}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}^{10} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}^{10}\end{bmatrix}$.

又 $\boldsymbol{P}^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{E}_2$，故 $\boldsymbol{P}^{10}=(2\boldsymbol{E}_2)^5=32\boldsymbol{E}_2$，$(\boldsymbol{P}^{10})^{-1}=\frac{1}{32}\boldsymbol{E}_2$；

$\boldsymbol{Q}^2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Q}^3=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，……，$\boldsymbol{Q}^{10}=\begin{bmatrix}1 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$(\boldsymbol{Q}^{10})^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -10 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

则 $(\boldsymbol{A}^{10})^{-1}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{P}^{10})^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & (\boldsymbol{Q}^{10})^{-1}\end{bmatrix}$.

在 $\boldsymbol{A}^{10}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{10}+32\boldsymbol{E}_5$ 两边同时左乘 $(\boldsymbol{A}^{10})^{-1}$，

有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_5+32(\boldsymbol{A}^{10})^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{bmatrix}+32\begin{bmatrix}\frac{1}{32} & 0 & & & \\ 0 & \frac{1}{32} & & & \\ & & 1 & -10 & 0\\ & & 0 & 1 & 0\\ & & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ & & 33 & -320 & 0\\ & & 0 & 33 & 0\\ & & 0 & 0 & 33\end{bmatrix}$.

（2）由于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{P})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{Q})=2+3=5$，故 $\boldsymbol{A}$ 列满秩，则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$；

同理：$\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)+\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}33 & -320 & 0\\ 0 & 33 & 0\\ 0 & 0 & 33\end{bmatrix}\right)=2+3=5$，故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=5$.

即 $\boldsymbol{AB}$ 满秩，则 $\det(\boldsymbol{AB})\neq 0$，又由于 $(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})^*=\det(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{E}_5$，

两边取行列式有：$\det(\boldsymbol{AB})\det[(\boldsymbol{AB})^*]=\det^n(\boldsymbol{AB})\neq 0$，

故 $\det[(\boldsymbol{AB})^*]\neq 0$，则 $(\boldsymbol{AB})^*$ 满秩，即 $\operatorname{rank}[(\boldsymbol{AB})^*]=5$.