2023级代数与几何期末考试(回忆版)参考答案

哈爾濱工業大學(深圳)
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

编写&排版:一块肥皂

答案速查:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4049 & 6070 & 2025 \end{bmatrix}$

2. 1

3. $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

4. 椭圆抛物面

5. -1

6. $(1, +\infty)$

7~12. BADBCA

13. $\begin{bmatrix} -36 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & -36 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & -36 & 0 \\ 72 & 0 & 0 & 216 \end{bmatrix}$

14. (1) $t=\dfrac{13}{18}$;

(2)略

15. $\begin{bmatrix} \dfrac{31}{6} \\ \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{7}{6} \\ 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

16. $\mu_1=9$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\eta}_1=k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}(k_1\neq 0)$;

$\mu_2=\mu_3=6$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\eta}_{23}=k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$($k_2,k_3$ 至少有一个不为零)

17. (1) $k>2$;

(2) $-y_1^2-y_2^2$;

(3)圆柱面

详解：

1. 令 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$,

则根据初等变换，右乘 $\boldsymbol{Q}$ 交换了 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 3 列，又 2024 是偶数，故相当于未交换即 $\boldsymbol{Q}^{2024}=\boldsymbol{E}$；

左乘的意义是将第 2 行的 1 倍加到第 3 行上，故 $\boldsymbol{P}^{2023}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^{2024}=\boldsymbol{P}^{2023}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}$

$$=\boldsymbol{P}^{2023}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3+2\times2023&1+3\times2023&2+1\times2023\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\4049&6070&2025\end{bmatrix}.$$

2. 根据混合积的几何意义有 $V_{O-ABC}=\left|\dfrac{[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]}{6}\right|=\left|\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&2&7\end{vmatrix}\right|=1$.

3. 设 $\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X})\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=y_1\boldsymbol{X}+y_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+y_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$,

又 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$ 线性无关，则 $\begin{cases}y_1=0\\y_2=3\\y_3=-2\end{cases}$，即 $\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}0\\3\\-2\end{bmatrix}$.

4. 由 $2x^2+4y^2-3z=0$ 得 $2x^2+4y^2=3z\geqslant0$，

取 $z=\dfrac{1}{3}$，得 $2x^2+4y^2=1$ 为一椭圆方程；

取 $x=0$ 得 $4y^2=3z$ 为一抛物线方程；

取 $y=0$ 得 $2x^2=3z$ 为一抛物线方程，

故 $2x^2+4y^2-3z=0$ 所表示的二次曲面类型为椭圆抛物面.

5. 增广矩阵 $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{array}\right]$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&1&-a&-1\\0&0&a^2-2a-3&a-3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&1&-a&-1\\0&0&(a-3)(a+1)&a-3\end{array}\right],$$

可知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\geqslant2,\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})\geqslant2$，

欲使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 无解，则需 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})>\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$，即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})=3,\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$，

就有 $\begin{cases}a-3\neq0\\(a-3)(a+1)=0\end{cases}$，解得 $a=-1$.

6. 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定，则 $\det(\boldsymbol{A})=k-1>0$，即 $k>1$，故 k 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

7. 对于 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{M}$，$n\times p$ 阶矩阵 $\boldsymbol{N}$ 有秩不等式 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{MN})+n\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{M})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{N})$，

本题令 $\boldsymbol{M}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{MN}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s)$，

则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s)+n\geqslant\operatorname{rank}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)+\operatorname{rank}(\boldsymbol{P})$，

又 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关，则 $\operatorname{rank}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=n$，即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s)\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{P})$，

又因为 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{MN})\leqslant\min\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{M}),\operatorname{rank}(\boldsymbol{N})\}\Rightarrow\operatorname{rank}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s)\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{N})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{P})$，

即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{P})\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s)\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{P})$，故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{P})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s)$，

由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 线性相关，则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s)\leqslant s$ 即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{P})\leqslant s$，故 $\boldsymbol{P}$ 不列满秩.

故选 B.

8. 对于选项 A,B，正交矩阵的列向量组是彼此正交的单位向量，故 A 错误，B 正确；

对于选项 C，设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 的一个极大无关组有 n 个向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，则 $r\geqslant n$，

且由于向量组 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 可以被向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 线性无关，

故 $s=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s)\leqslant\operatorname{rank}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=n$，即 $r\geqslant n\geqslant s$，故 C 正确；

对于选项 D，必要性：由于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，故 $\operatorname{rank}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=n$，即 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关；

充分性：由于 n 维向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关，故 $\operatorname{rank}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=n$，即 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

故选 A.

9. 对于选项 A，例如二元标准二次型 $f=2x_1^2-4x_2^2$ 的规范型既可以为 $f=y_1^2-y_2^2$ 也可以为 $f=-z_1^2+z_2^2$ 并不唯一，自然对应的变换也不唯一，故 A 错误；

对于选项 B，矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow\begin{cases}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\\ \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\text{ 具有相同的形状}\end{cases}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可能形状不同，故 B 错误；

对于选项 C，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值均对应相等是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似的必要不充分条件，故 C 错误；

（若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均有 n 个线性无关的特征向量即均可相似对角化，则它们相似于同一对角阵，而根据相似的传递性，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 就相似）

对于选项 D，假设 $\boldsymbol{A}$ 是正定的，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{EP}$，

两边同时取逆有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}^{-1}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}$，令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}$，

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{EQ}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定，故 D 正确.

故选 D.

10. 由于 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}$，两边取行列式，则有 $\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^*)=\det^4(\boldsymbol{A})$，

又 $\det(\boldsymbol{A})=2\neq 0$，故 $\det(\boldsymbol{A}^*)=\det^3(\boldsymbol{A})=2^3=8$，

则 $\det(-\boldsymbol{A}^*)=(-1)^4\det(\boldsymbol{A}^*)=8$.

故选 B.

11. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件：n（$\boldsymbol{A}$ 的列数）$-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})>0$ 即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<n$.

对于选项 A，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可能不是方阵，故 A 错误；

（若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，由 $\det(\boldsymbol{A})=0$ 得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<n$，此时 A 就正确了）

对于选项 B，无论 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有无非零解，其所有解都能构成线性空间，故 B 错误；

对于选项 C，$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关可知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)<n$ 即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<n$，故 C 正确；

对于选项 D，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷解是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分不必要条件，理由如下：

充分性：假设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 均在 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解空间中，则 $\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_1$ 满足 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_1)=\boldsymbol{AX}_2-\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，

即 $\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_1$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 一非零解，具有充分性；

但必要性上，即使 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，$\boldsymbol{b}$ 可能也无法被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 可能无解，

故不具有必要性，故 D 错误.

故选 C.

12. 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow\begin{cases}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\\ A,B\text{ 具有相同的形状}\end{cases}$

对于选项 A，取 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ 满足 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价，但 $\det(\boldsymbol{A})=1\neq\det(\boldsymbol{B})=-1$，

即矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价并不能保证 $\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{B})$，故 A 错误；

对于选项 B，假设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 形矩阵，并令 $r=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$，

则它们一定都可以化成同一标准型 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}_{r\times(n-r)}\\\boldsymbol{O}_{(m-r)\times r}&\boldsymbol{O}_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}$，故 B 正确；

对于选项 C，设可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{Q}_2$ 满足标准化过程 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{BQ}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}_{r\times(n-r)}\\\boldsymbol{O}_{(m-r)\times r}&\boldsymbol{O}_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}$，

则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}$，只要取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}$ 即可，故 C 正确；

对于选项 D，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 具有相同的形状是矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价的必要不充分条件，故 D 正确.

故选 A.

13. 将 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$ 移项有：$\boldsymbol{ABA}^{-1}-\boldsymbol{BA}^{-1}=3\boldsymbol{E}$，

左边右提 $\boldsymbol{BA}^{-1}$：$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}^{-1}=3\boldsymbol{E}$，

左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$、右乘 $\boldsymbol{A}$：$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{E}$，

右乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$：$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}=3\boldsymbol{B}^{-1}$.

由题意知：$\det(\boldsymbol{A}^*)=\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\-1&0&1&0\\2&0&0&8\end{bmatrix}\right)=8$，

又由 $\boldsymbol{AA}^*=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}$ 得 $\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^*)=\det^4(\boldsymbol{A})$，即 $\det(\boldsymbol{A})=\sqrt[3]{\det(\boldsymbol{A}^*)}=2$，

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{\det(\boldsymbol{A})}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\-1&0&1&0\\2&0&0&8\end{bmatrix}$，

进而 $3\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\-1&0&1&0\\2&0&0&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\-1&0&0&-3\end{bmatrix}$，

取行列式有：$\det(3\boldsymbol{B}^{-1})=\dfrac{3^4}{\det(\boldsymbol{B})}=\det(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1})=\dfrac{-3}{2^3}$，则 $\det(\boldsymbol{B})=-216$，

则 $\boldsymbol{B}^*=\det(\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}=-216\times\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\-1&0&0&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-36&0&0&0\\36&-36&0&0\\-36&0&-36&0\\72&0&0&216\end{bmatrix}$.

14. (1)由于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2<3$，故 $\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{vmatrix}5&2&0\\1&3&t\\1&4&1\end{vmatrix}=13-18t=0$

即 $t=\dfrac{13}{18}$；

(2)本题答案不唯一，只需取 $\boldsymbol{\xi}$ 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\xi})=3$ 即可，略；

15. 取 $\boldsymbol{A}$ 左上 3×3 作行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&2\\0&5&2\end{vmatrix}=-6\neq0$，即 $\boldsymbol{A}$ 有不为 0 的 3 阶子式，

则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\geqslant3$，即 $4-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\leqslant1$，

又 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有不同的两解 ξ_1,ξ_2，故 $4-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\geqslant1$ 即 $4-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=1$，

则基础解系只有一维，不妨取 $\boldsymbol{\eta}=6(\xi_1-\xi_2)=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix}$,

显然 $\boldsymbol{A\eta}=6\boldsymbol{A}(\xi_1-\xi_2)=6(\boldsymbol{A}\xi_1-\boldsymbol{A}\xi_2)=6(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{\eta}$ 就是基础解系，

故原方程组的所有解(通解) $\boldsymbol{X}=\xi_1+k\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\frac{31}{6}\\\frac{2}{3}\\-\frac{7}{6}\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix}$.

16. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素和均为 -2，故 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-2\\-2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，

故 $\lambda_1=-2$，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $(k_1\neq 0)$；

又 $\operatorname{rank}(3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=1$ 即 $\det(3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=0$，

且 $3-\operatorname{rank}(3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=2$，故 -3 是几何重数为 2 的特征值，

又由于 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，故所有特征值的代数重数和为 3，且 -3 的代数重数大于等于其几何重数，

综合以上考虑，$\lambda_2=\lambda_3=-3$，设其特征空间由 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}x_{21}\\x_{22}\\x_{23}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}x_{31}\\x_{32}\\x_{33}\end{bmatrix}$ 张成，

不妨先令 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交，则有 $x_{21}+x_{22}+x_{23}=0$，令 $x_{21}=1,x_{22}=0$，则有 $x_{23}=-1$，即 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，

再令 $\boldsymbol{\xi}_3$ 分别与 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交，则有 $\begin{cases}x_{31}+x_{32}+x_{33}=0\\x_{31}-x_{33}=0\end{cases}$，令 $x_{31}=1$，则有 $x_{32}=-2,x_{33}=1$，即 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$，

故 $\lambda_2=\lambda_3=-3$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_{23}=k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3=k_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ $(k_2,k_3$ 至少有一个不为零$)$.

$\det(\boldsymbol{A})=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-18\neq 0$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}$ 可知 $\boldsymbol{A}^*=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}$，

设 μ_i 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值，$\boldsymbol{\eta}_i$ 为 μ_i 对应的特征向量 $(i=1,2,3)$，

则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\eta}_i=\mu_i\boldsymbol{\eta}_i$，即 $\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\eta}_i=\mu_i\boldsymbol{\eta}_i$，

两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$：$\dfrac{\det(\boldsymbol{A})}{\mu_i}\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i$ 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i=\dfrac{\det(\boldsymbol{A})}{\mu_i}\boldsymbol{\eta}_i$，

易知 $\dfrac{\det(\boldsymbol{A})}{\mu_i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 即 $\mu_i=\dfrac{\det(\boldsymbol{A})}{\lambda_i}$，进而 $\boldsymbol{\eta}_i$ 也是 λ_i 对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_i$，

故 $\mu_1=9$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\eta}_1=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $(k_1\neq 0)$；

$\mu_2=\mu_3=6$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\eta}_{23}=k_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ $(k_2,k_3$ 至少有一个不为零$)$.

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，特征向量为 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$，

又 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 两边右乘 ξ 有：$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{A}\lambda\boldsymbol{\xi}+2\lambda\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$ 即 $\lambda^2\boldsymbol{\xi}+2\lambda\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$ 即 $(\lambda^2+2\lambda)\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$，

由于 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda^2+2\lambda=0$ 即 $\lambda(\lambda+2)=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能从 $0,-2$ 中取，故正惯性指数 $p=0$，

又正惯性指数 p 与负惯性指数 q 之和 $p+q=2$，则 $q=2$，

即 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，其余特征值 $\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$.

(1)由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称方阵，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\lambda_3&\\&&&\lambda_4\end{bmatrix}$ 合同，

即存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-2&&&\\&-2&&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix}$，

则 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+k\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+k\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}k-2&&&\\&k-2&&\\&&k&\\&&&k\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 合同，

由合同的传递性，只需 $\begin{cases}k-2>0\\k>0\end{cases}$ 即 $k>2$.

故 $k>2$ 时，$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 与单位阵合同；

(2)由(1)知正惯性指数 $p=0$，负惯性指数 $q=2$，故 f 的规范型为 $f=-y_1^2-y_2^2$；

(3)通过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z}$ 将 f 化为标准型：$f=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-2&&\\&-2&\\&&0\end{bmatrix}\boldsymbol{Z}$

$=-2z_1^2-2z_2^2$，

则 $f=-2$ 即 $z_1^2+z_2^2=1$ 表示的二次曲面是圆柱面.