2.1 矩阵的概念及特殊矩阵

1. 数域　　Q：数域的引入有何意义或用途？

2. 矩阵的概念

3. 几类特殊矩阵

①零矩阵　②行矩阵　③列矩阵　④方阵　⑤上/下三角形阵

⑥对角矩阵（只有主对角线上元素不为0）　⑦标量矩阵（数量、纯量矩阵）→主对角线元素都相等

⑧单位矩阵（恒等矩阵）→主对角线元全为1　→应用非常广泛！

⑨对称、反称矩阵 2.2 → $A^T=A$，$A^T=-A$　⑩可逆矩阵 2.3 →前提是方阵！$AA^{-1}=A^{-1}A=E$

⑪行阶梯形矩阵 2.4、行最简形矩阵、标准形

4. 相关概念：子矩阵 2.5、子方阵、子式、伴随矩阵 2.3　子块 2.7

2.2 矩阵的运算

1. 加减　　对应的元素相加(减)　　行列式的加法：只针对某一行(列)　　+负矩阵 ↑ 通过其定义矩阵减法。

条件：A、B行、列数相同。　运算律：交换律、结合律、$A+0_{m\times n}=A$，$A+(-A)=0_{m\times n}$（可写作0）

2. 数乘　　数×每个元素

满足：结合律、分配律 $\begin{cases}(k+l)A=kA+lA\\ k(A+B)=kA+kB\end{cases}$，$1A=A$.

$\boxed{\text{矩阵的加法及数乘合称为矩阵的线性运算.}}$

※ 矩阵的线性组合　$a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_nA_n$

☆ 3. 矩阵与矩阵相乘　条件：A的列数等于B的行数　结果的行数等于A的行数，列数等于B的列数.

(1) 定义　简记：前一个矩阵的对应行乘后一个矩阵的对应列

(2) 性质　①满足结合律！$ABC=A(BC)$！　②满足分配律（矩阵与数都是）

③单位阵×矩阵=原矩阵→重要性质！　④零矩阵×矩阵=零矩阵！

(3) 注意常见误区 $\begin{cases}\text{不满足交换律}\\ \text{不满足消去律}\end{cases}$　若AB=BA则称A与B乘积可换.　简例：$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

有零因子：$AB=0$ ⇏ $A=0$ 或 $B=0$.

但当A为方阵时 $AB=0 \Rightarrow |A|=0,\ |B|=0$（行列式乘法公式）

应用举例：对于线性方程组，可以写出其系数矩阵 A，右端项的矩阵 B 及未知量组成的矩阵 X，则由矩阵乘法易得：

$AX=B$。[具体例见书，下面是其升级版]

矩阵线性变换举例：给出一个线性方程组，

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

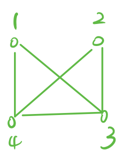
$y_1 \cdots y_n$ 也可以利用另外的线性组合来表示。

令 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$Z=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ 则：$X=AY$，$Y=BZ$，$X=AY=A(BZ)=(AB)Z$

这就是用矩阵表示线性方程组的一种"高级版本"。

实际例子：



$$A=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A\times A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \cdots$$

(中转一次)

[参考 HNOI 2002 公交车路线]
矩阵乘法与快速幂

详见2.9

4. 方阵的幂 注意：$A^0=E_n$. $A^kA^l=A^{k+l}$ $(A^k)^l=A^{kl}$.

注意：A、B 乘积可换时，

$$\begin{cases} (AB)^k = A^kB^k. \\ (A+B)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k} \end{cases}$$

特别地 $(E+A)^m = E + C_m^1A + C_m^2A^2 + \cdots + C_m^mA_m = E + \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^k$

例 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^n = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-k} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k C_n^k$

$\underline{E_2^n = E_2}$ $E_2 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k$

若AB乘积不可换，则这个证明从一开始就无法进行。

$= \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k C_n^k$

证明题例见 p33、34

可以发现，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $k \geq 2$ 时，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = 0$

故原式 $= \underset{(E)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^0} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

方阵的多项式 (书P34)

x^n 为方阵的n次方，常数k为 kE_n.

* 哈密顿-凯莱定理 → 特征多项式与特征向量

5、方阵的行列式及行列式的乘法公式。

方阵的行列式就是把方阵的括号改成竖线。只有方阵才有行列式。 [有行列式的矩阵必为方阵]

矩阵和行列式的概念不同（一个是数表，另一个是数），必须弄清楚。

定理：① $|kA| = k^n|A|$ → $|kA|$ 与 $k|A|$ 区分!!

② $|AB| = |A||B|$ → 行列式的乘法公式

证明结合性质1.3

A、B 的阶数相同且均为方阵！

也等于 $|BA|$ → 与矩阵乘法没有交换律相区分！ 原因：$|BA| = |B||A| = |A||B|$

行列式本质是数，数与数相乘满足交换律.

另有：一般地，$|A+B| \neq |A|+|B|$. → 见书P36 例5 证明.

6、矩阵的转置

就是把某矩阵的第i行第j列元作为第j行第i列的元. → A^T、A'

满足的运算律及证明： ①$(A')'=A$ 证明略

② $(A+B)'=A'+B'$ → 矩阵转置满足加法结合律！ 与上面区分！ 当然只有 A、B 行列数对应相等时才有此式.

证明：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$ $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $B^T=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

而 $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & b_{2n}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix}$ $(A+B)^T=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{m2}+b_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n}+a_{1n} & b_{2n}+a_{2n} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix}=A^T+B^T$.

③ $(kA')=kA'$，k为整数

④ $(AB)'=B'A'$ → 证明见书，就是用矩阵定义证的. 注意不是$A'B'$!!（首先得保证A的行数等于B的列数，$A'B'$这一步就不合条件了.）

⑤ $|A'|=|A|$ → 即行列式性质 1

对称矩阵与反对称矩阵： 定义见书

性质： A、B同阶时，$(A+B)'=A'+B'=A+B$ → 可知 A+B也是对称矩阵

但是，$(AB)'=B'A'=BA$ 不见得等于AB，即 AB 未必为对称矩阵. → 若$AB=BA$（乘法可换），则AB也是对称矩阵

补充：①对于一般方阵，总能有 $A=\frac{A+A'}{2}+\frac{A-A'}{2}$

而 $\frac{A+A'}{2}$ 为对称矩阵，$\frac{A-A'}{2}$ 为反对称矩阵.

简证：$\left(\frac{A+A'}{2}\right)' \underset{\text{性质③}}{=} \frac{1}{2}(A+A')' \underset{\text{性质②}}{=} \frac{1}{2}(A'+A) \underset{\text{性质①}}{=} \frac{A'+A}{2}=\frac{A+A'}{2}$. 另一个矩阵证明类似，故略去.

② 阶数为奇数的反对称矩阵，行列式必为0.

共轭矩阵与共轭转置矩阵. 定义见书

除书上性质外还有 $\overline{\overline{A}}=A$. ＊补充：厄尔米特矩阵

2.3 可逆矩阵

1. 定义 A、B为n阶方阵，$AB=BA=E$（单位阵） 对角矩阵是可逆矩阵.

2. 逆矩阵唯一性 P39 设B、C均为A的逆矩阵，则 $B=BE=B(AC)=(BA)C=EC=C$.

3. 可逆矩阵的性质 （性质内容见书，此处只写补充内容）

性质(1)(2)证明略. $(A^{-1})^{-1}=A$ $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ → 记下！

性质(3)：要证原命题，即证：$(AB)(B^{-1}A^{-1})\overset{?}{=\!=}(B^{-1}A^{-1})(AB)\overset{?}{=\!=}E$.

解释： AB作为原方阵；$B^{-1}A^{-1}$作为其可能的逆矩阵；根据定义，可知若 AB与$B^{-1}A^{-1}$以及$B^{-1}A^{-1}$与AB相乘都是E，

那么即满足定义，也即$B^{-1}A^{-1}$为AB的逆矩阵，本质上也是从定义出发.

证明法：$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\underbrace{BB^{-1}}_{E}A^{-1} = \underbrace{AE}_{A}A^{-1} = AA^{-1} = E$ → 结合律　　第二个等号证明也类似。

性质4：要证原命题，即证：$A'(A^{-1})' \overset{?}{=\!=} (A^{-1})'A' \overset{?}{=\!=} E$。　　→ 写成：$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$　-1 与 T 可换！

解释：把 A' 作为原方阵；$(A^{-1})'$ 作为其可能的逆矩阵；根据定义，可知若 A' 与 $(A^{-1})'$ 以及 $(A^{-1})'$ 与 A' 相乘都是 E，

那么即满足定义，也即 $(A^{-1})'$ 为 A' 的逆矩阵，本质上还是从定义出发，把待证的矩阵分别作为定义中的 A 和 B。

证明：$A'(A^{-1})' = (A^{-1}A)' = E$　（结合律）（第二个等号同理易证）

性质5：若 A_1、A_2、A_3 是同阶可逆矩阵，则 $A_1A_2A_3$ 可逆，且 $(A_1A_2A_3)^{-1} = A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$ ✓

$= A_1^{-1}A_2^{-1}A_3^{-1}$ ✗

性质6 见下　（与伴随矩阵有关）

一般情况下 $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$

伴随矩阵法求逆矩阵：

一、伴随矩阵　　　　P39

定义：原矩阵的代数余子式按对应关系排成的矩阵的转置。

上节性质6 即本节 定理 2.2.

① 引理 2.1　　$AA^* = A^*A = |A|E$　　注意对角线上元素的转化！

即：A 与 A 的伴随乘积可换。

联系可逆矩阵定义：①乘积可换已满足；②右端项与 E 只差一个 $|A|$。则引申得：

② 定理 2.2　　A 为数域 F 上的 n 阶方阵，则 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$。当 $|A| \neq 0$ 时，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$。

→ 可由引理 2.1 推得。

两边证法：可逆 → $|A| \neq 0$：用行列式乘法公式，发现必有 $|A| \neq 0$。$|A| \neq 0$ → 可逆：由 $AA^* = A^*A = |A|E$ 可得到。

二、奇异矩阵　→ 不可逆矩阵

　非奇异矩阵　→ 可逆矩阵。

三、P40 例6.　A、B 都是 n 阶方阵，且 AB 是可逆矩阵，则 A、B 都是可逆矩阵。特别地，若 A、B 都为 n 阶方阵且 $AB = E$，则 $A^{-1} = B$。

四、P40 例8：应用　　→ 注意！用 A^{-1} 乘方程 $Ax = B$ 两边时，必须同时左乘！

五、规定 $A^{-k} = (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$　　　（前提：A 可逆）→ A 可逆，A 乘积必可换。（由可逆矩阵定义易知）

要证 $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$，即证 $(A^k)(A^{-1})^k = (A^{-1})^k A^k = E$。

由 $A^k(A^{-1})^k = (A^{-1}A)^k = E^k = E$，且 $(A^{-1})^k A^k = (AA^{-1})^k = E^k = E$，则 A^{-k} 的两种表达法等价。

设A为n阶可逆矩阵，A^*是A的伴随矩阵，则 ① $|A^*|=|A|^{n-1}$ ② $|(-A)^*|=|A|^{n-1}$

① $AA^*=|A|E$, $|AA^*|=|A||A^*|=|A|^n$，故 $|A^*|=|A|^{n-1}$

② 由 $(-A)(-A)^*=|-A|E$ 知 $|(-A)(-A)^*|=|-A||(-A)^*|=|-A|^n$，故 $|(-A)^*|=|-A|^{n-1}=\underline{(-1)^{n(n-1)}|A|^{n-1}}=|A|^{n-1}$

把每一个|-A|(总共n-1次)都变成|A|，要把每一个的每行的负号都提出(提n次)

③ $(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$：$(-A)^*\underline{(-A)}=|-A|E=\underline{(-1)^n}|A|E$

$\Rightarrow (-A)^*=(-1)^{n-1}\boxed{|A|A^{-1}}=(-1)^{n-1}A^*$

④ $|(A^*)^{-1}|=\frac{1}{|A|^{n-1}}$：$AA^*=|A|E$ 知 $A^*=|A|A^{-1}$，则 $(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A$，故

$|(A^*)^{-1}|=\frac{1}{|A|^n}|A|=\frac{1}{|A|^{n-1}}$.

2.4、矩阵的初等变换.

引入：解线性方程组　　注意：矩阵变换过程只能用箭头不能用等号.

定义及别称见书P43.　消法、换法、倍法

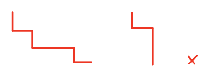
意义：见书P43（求线性方程组解时的应用！）

$A\rightleftarrows B$　　$A\rightleftarrows B\rightleftarrows C$

矩阵A与B的等价：A经过有限次初等变换可变为B.　性质：①自反性 ②对称性 ③传递性

矩阵在初等变换下的化简

1、行阶梯形矩阵　任一矩阵皆可通过行变换化成行阶梯形矩阵.



方法：逐列操作

2、行最简形矩阵　非零行左起第一个非零元都为1，且这些1分别是它们所在列中唯一非零元.

任一矩阵皆可通过行变换化成行最简形矩阵.

3、标准形 $\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$　任一矩阵皆可通过初等变换化成行最简形矩阵.

第一种初等变换可由若干次第(2)(3)种初等变换实现.　$A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}B$ 可化为：

$A\xrightarrow{r_i+r_j}A_1\xrightarrow{r_j+(-1)r_i}A_2\xrightarrow{(-1)r_j}A_3\xrightarrow{r_i+(-1)r_j}B$.

2.5 矩阵的秩

而且是子方阵的行列式

1、子矩阵与子式　子矩阵是矩阵　子式是行列式，实际上是一个数.

2、矩阵A的非零子式的最高阶数叫做矩阵A的秩，记为R(A)或rank(A).　规定 R(A)=0 若A为零矩阵.

只要有一个这样的子式即可.

3、矩阵的秩的性质（四大）
- $0\le R(A)\le\min\{m,n\}$
- $R(A')=R(A)$
- $R(kA)=\begin{cases}0, & k=0\\ R(A), & k\neq 0\end{cases}$
- 子矩阵的秩≤矩阵 →2.8多用到！

4、重要定理：初等变换不改变矩阵的秩.　[该过程要认真理解！]

证明：那只考虑初等行变换，初等列变换类似可证.

对三种初等变换考虑： 1. 换法：可转为 消法和倍法.

2. 倍法：变换前后，对应的子式的唯一差别只是相差k倍，即该为0的还为0. 故矩阵的秩不变.

3. 消法：设 $A \xrightarrow{r_i+kr_j} A_1$， $R(A)=r$ (缩小证明范围：只要证一次变换，因为只要一次变换成立，多次的就都成立.)

首先证明 $R(A) \geq R(A_1)$ (之后只要类似证明 $R(A_1) \geq R(A)$ 即可)

符号别搞混!!

为此只须证 A_1 的任一 $r+1$ 阶子式 [记为 D_{r+1}] (若存在) 都为0.

① D_{r+1} 含 A_1 的第i行元时，(i) D_{r+1} 不含 A_1 第j行元，则 D_{r+1} 可分解为 A 的一个 $r+1$ 阶子式与另一 $(r+1)$ 阶子式的k倍之和，A的 $r+1$ 阶子式为0，而另一 $r+1$ 阶子式 也为 A 的一个 $r+1$ 阶子式的k倍(或 -k倍)，还是0，故 $D_{r+1}=0$.

$$D_{r+1}=\begin{vmatrix} a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ & & & \end{vmatrix}$$

A的 $r+1$ 阶子式

也为A的另一个 $r+1$ 阶子式或其相反数. → 则亦为0 (相当于是把A含第j行元的子式的那一行经过许多次交换得到)

$$=\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jn} \end{vmatrix} = 0.$$

(ii) D_{r+1} 含 A_1 第j行元 [分解]

A的 $r+1$ 阶子式

有两行相同，故值为0.

$$D_{r+1}=\begin{vmatrix} a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{vmatrix} = 0$$

② D_{r+1} 不含 A_1 的第i行元时，[也即：这个 D_{r+1} 未受到"消法变换的影响"]，D_{r+1} 就是 A的一个 $r+1$ 阶子式，$\Rightarrow D_{r+1}=0$.

[没有包含被影响的那行]

求矩阵秩的方法.

1. 行阶梯形矩阵的秩等于其非零行的个数.

2. 列满秩阵，行满秩阵与满秩阵 P49 列满：秩等于列数 行满：秩等于行数

3. 由矩阵的初等变换不改变矩阵的秩可知：

① n阶方阵 A的秩 $R(A)=n \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{初}} E_n$；

② $m\times n$ 矩阵A是列满秩阵 $\Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{初}} \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$；

③ $m\times n$ 矩阵A是行满秩阵 $\Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{初}} (E_m\ 0)$.

n阶方阵可逆 $\Leftrightarrow R(A)=n$

设 A为n阶方阵，A^*是A的伴随矩阵，则有

$$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n \\ 1, & R(A)=n-1 \quad ① \\ 0, & R(A)<n-1 \quad ② \end{cases}$$

$\rightarrow$ A可逆，A^*也可逆 （$AA^*=|A|E_n$，$|A||A^*|=|A|^n$，$|A|\neq 0$ 则 $|A^*|\neq 0$），$\Rightarrow R(A^*)=0$.

①：$R(A)=n-1$时：$|A|=0$，故$AA^*=|A|E_n=0$，$R(A)+R(A^*)\leq n$

则有 $R(A^*)\leq n-R(A)=1$；又$R(A)=n-1$，故A存在 n-1阶非零子式，即A^*有非零元［A^*的元即为正/负号加上 A的n-1阶子式］

$R(A^*)\geq 1$，$\therefore R(A^*)=1$.

②：$R(A)<n-1$时，A的所有n-1阶子式全为0，$\therefore A^*=0$，$R(A^*)=0$.

2.6 初等矩阵

1、由单位阵经一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵　消法、换法、倍法

初等矩阵都是可逆阵，逆矩阵也是初等矩阵，转置也是初等矩阵
（形式要记住！）　　　　（形式也要记住！）

注意：$E(i,j(k))$ 以下二种叙等价：
- 把 E的第j行 k倍加到第i行　→左乘时做的也是此变化.
- 把E的第i列 k倍加到第j列.　→右乘时做的也是此变换.

2、矩阵等价的充要条件

定理2.4　设$A\in F^{m\times n}$，矩阵 A可逆$\Leftrightarrow$存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2\cdots P_n$，使得$A=P_1P_2\cdots P_n$.

证明："$\Leftarrow$"　$A=P_1\cdots P_n$，$P_1\cdots P_n$ 均为初等阵，初等阵之乘积仍为可逆阵，故A可逆.

"$\Rightarrow$" 由A可逆知 $R(A)=n$，标准形为E_n，故 $A\xrightarrow{初}E_n$，

故存在初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots P_s,Q_{s+1},\cdots Q_k$，使得 $P_s\cdots P_2P_1AQ_k\cdots Q_{s+1}=E_n$

$\therefore AQ_k\cdots Q_{s+1}=E_n(P_s\cdots P_2P_1)^{-1}$

$\therefore A=(P_s\cdots P_2P_1)^{-1}(Q_k\cdots Q_{s+1})^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_s^{-1}Q_{s+1}^{-1}\cdots Q_k^{-1}$

则由 $P_1^{-1}\cdots P_s^{-1}$、$Q_{s+1}^{-1}\cdots Q_k^{-1}$ 均为初等阵的逆阵，即也为初等阵，可知 A可以写成 若干有限个初等阵的乘积、证毕.

推论1　两个m×n矩阵A、B等价的充要条件为 存在m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩阵Q，使PAQ=B. → 2.8节中性质1的证明使用这一性质.

特别地，存在可逆矩阵 P、Q 使 $PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，其中$r=R(A)$，　证明见书，核心即为证明 $P=P_1\cdots P_s$　$Q=Q_1\cdots Q_t$ 为可逆阵 及其逆过来的说法，

$\exists P_{(可逆)}$ $PA=B\Leftrightarrow A\xrightarrow{行}B$　　$\exists Q_{(可逆)}$ $AQ=B\Leftrightarrow A\xrightarrow{列}B$.

推论2　A为m×n矩阵，P为m×n矩阵，Q为n阶可逆阵，则PA、AQ、PAQ的秩都等于A的秩，即$R(PA)=R(AQ)=R(PAQ)=R(A)$.　→作业填空！A为可逆阵，则 $R\begin{pmatrix}B\\AB\end{pmatrix}-R(BA)=?$

推论3　A为可逆矩阵，可以只通过初等行/列变换（注意是只用一种）将A化成单位阵.

3. 初等变换法求矩阵的逆矩阵. $(A\,|\,E)\xrightarrow{行}(E\,|\,A^{-1})$

A可逆 $(A\,|\,B)\xrightarrow{行}(E\,|\,C)$，则 $C=A^{-1}B$

$\left(\dfrac{A}{E}\right)\xrightarrow{列}\left(\dfrac{E}{C}\right)$，则 $C=A^{-1}$；若 $\left(\dfrac{A}{B}\right)\xrightarrow{列}\left(\dfrac{E}{C}\right)$，则 $C=BA^{-1}$.

2.7 分块矩阵的概念及其运算

分块上三角、下三角形矩阵、分块对角矩阵、准对角矩阵

运算：①加法、数乘　注意分法一致即可

② 乘法　运算律相似　特殊情况：

$$A(B_1\ B_2\ B_3\cdots B_n)=(AB_1\ \ AB_2\ \ AB_3\ \cdots AB_n)\qquad A_{m\times n}\quad B_{i\,n\times p_i}$$

$$\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}A_1B\\A_2B\\\vdots\\A_nB\end{pmatrix}\qquad A_i\ m_i\times n\quad B_{n\times p}$$

$$(\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2p}\\\vdots&\vdots&&\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mp}\end{pmatrix}=(b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{m1}\alpha_m\ \cdots\ b_{1p}\alpha_1+b_{2p}\alpha_2+\cdots+b_{mp}\alpha_m)$$

同理 $$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+\cdots+a_{1n}\beta_n\\a_{21}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{2n}\beta_n\\\vdots\\a_{m1}\beta_1+a_{m2}\beta_2+\cdots+a_{mn}\beta_n\end{pmatrix}$$

$Ae_j=\alpha_j$　(取列)　$e_i'A=\beta_i$ (取行)　$e_i'Ae_j=\underline{a_{ij}}$ 取元.

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\cdots e_n=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

③ 分块矩阵的幂　$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1s}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{s1}&A_{s2}&\cdots&A_{ss}\end{bmatrix}$　$A^2=\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^{s}A_{1k}A_{k1}&\cdots&\sum\limits_{k=1}^{s}A_{1k}A_{ks}\\\vdots&&\vdots\\\sum\limits_{k=1}^{s}A_{sk}A_{k1}&\cdots&\sum\limits_{k=1}^{s}A_{sk}A_{ks}\end{bmatrix}$　特别地 $\begin{bmatrix}A_1&&\\&A_2&\\&&\ddots\\&&&A_m\end{bmatrix}^s=\begin{bmatrix}A_1^s&&\\&A_2^s&\\&&\ddots\\&&&A_m^s\end{bmatrix}$

④ 转置　转置再转置。

⑤ 行列式　只有上三、下三角、准对角分块矩阵有对应的公式！ $|A_{11}||A_{22}|\cdots|A_{ss}|$

对于一般二阶分块矩阵 $\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}$，不适用 $|AD-CB|$，但 $AC=CA$ 且A可逆时可以。[是 $|AD-CB|$，不是 $|AD-BC|$！]

⑥ 逆矩阵 $\begin{bmatrix}A_1&&\\&A_2&\\&&\ddots\\&&&A_s\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1}&&\\&\ddots&\\&&A_s^{-1}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}&&A_s\\&\iddots&\\A_1&&\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}&&A_1^{-1}\\&\iddots&\\A_s^{-1}&&\end{bmatrix}$

2.8 分块矩阵的初等变换

就是对分块矩阵做初等变换

性质：(1) $A_{s\times n}$ $B_{s\times m}$ $n+m=s$，$|A \vdots B| = (-1)^{mn}|B \vdots A|$ → 就是不断地交换.

(2) 对分块矩阵进行分块初等变换，不改变这个分块矩阵的秩.

(3) 对分块矩阵进行第三类初等变换，不改变这个分块矩阵的行列式 → 其实就是第一章里的"消法变换不改变行列式的值".

行列式乘法公式之证明亦源于此、

(4) 若 A、B 为方阵，且 $\left(\begin{array}{cc|cc} A & C & E_m & 0 \\ D & B & 0 & E_n \end{array}\right) \xrightarrow{行} \left(\begin{array}{cc|cc} E_m & 0 & A_1 & C_1 \\ 0 & E_n & D_1 & B_1 \end{array}\right)$ 则 $\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ D_1 & B_1 \end{pmatrix}$

降阶公式：$A_{m\times n}$ $B_{n\times m}$ $m>n$，λ 为任意数，$|\lambda E_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda E_n - BA|$

特殊：
- $n=1$ 时 $|\lambda E_m - \alpha\beta'| = \lambda^{m-1}(\lambda - \beta'\alpha)$ α, β 为行向量（β' 为列向量）
- $m=n$ 时 无论 λ 为多少 $|\lambda E_m - AB| = |\lambda E_n - BA|$
- $\lambda=1$，$|E_m - AB| = |E_n - BA|$，则 $E_m - AB$ 可逆的充要条件为 $E_n - BA$ 可逆

利用分块矩阵初等变换法推出矩阵秩性质、

① $R\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = R(A) + R(B)$ → $P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{pmatrix}}_{可逆}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix}}_{可逆} = \begin{pmatrix} E_{r_1} 0 & 0\,0 \\ 0\,0 & 0\,0 \\ 0\,0 & E_{r_2}\,0 \\ 0\,0 & 0\,0 \end{pmatrix}$

由 $PAQ=B$（P、Q 可逆）则 A B 等价，知 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} E_{r_1} 0 & 0\,0 \\ 0\,0 & 0\,0 \\ 0\,0 & E_{r_2}\,0 \\ 0\,0 & 0\,0 \end{pmatrix}$ 等价.

$\therefore R\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r_1 + r_2$.

② $R\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq R(A) + R(B)$ 经初等变换将原矩阵化为 $\begin{pmatrix} E_{r_1} 0 & P_1CQ_2 \\ 0\,0 & \\ 0\,0 & E_{r_2}\,0 \\ 0\,0 & 0\,0 \end{pmatrix}$ → 知这块只可能使原矩阵之秩保持不变或增加（因为右上角矩阵通过下方部分把一部分消成0后，再把没消成0的部分移到左边，（如果有）这些过程秩都不变、现在矩阵是行阶梯形矩阵，可知其非零行数不会减少）

③ $R(A \vdots B) \leq R(A) + R(B)$ $R(A \vdots B) \leq R\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix} \leq R(A) + R(B)$

性质：子块之秩小于/等于其整块的秩.

④ $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$ 构造 0 矩阵证明

⑤ $R(A+B) \leq R(A) + R(B)$

⑥ $A_{m\times n}$ $B_{n\times p}$ $R(AB) \geq R(A) + R(B) - n$ $R(AB) = 0$ → $R(A) + R(B) \leq n$

若 $AB=0$，$A+B$ 可逆，$R(A)+R(B)=n$. 该条件下若 $R(A)$ 非零，则 $R(B) < n$，可得 B 一定不可逆.

构造 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ E_n & B \end{pmatrix}$ 证明.

重点知识归纳：

1、判断n阶方阵A可逆的方法：

(1) $|A|\neq 0$　(2) $R(A)=n$　(3) 存在有限个初等矩阵 $P_1,\cdots P_k$ 使 $A=P_1P_2\cdots P_k$.

(4) $AB=E$ ($BA=E$)　(5) $PAQ=E_n$　(6) $A\xrightarrow{行}E_n$ / $A\xrightarrow{列}E_n$ (满秩阵)　(7) A^* 可逆 (见之前笔记 $R(A)=n\Leftrightarrow R(A^*)=n$)

2、A^{-1}？

见性质！P8页首

(1) 伴随矩阵法　(2) 初等变换法　(3) $AB=E$ / $BA=E$ $\Rightarrow B=A^{-1}$　(4) 分块矩阵求逆

3、求秩？

(1) 行列式 若存在一个r阶行列式 $D\neq 0$，而所有r+1阶子式(若有)全为0，则 $R(A)=r$

(2) 化行阶梯形则看非零行行数.

4、矩阵之秩的性质

① - ④　P8下半部分　A、B等价，$R(A)=R(B)$ (初等变换不改变矩阵的秩)

⑥ - ⑪　P9下半部分

⑫ 推论3

⑬ 重要性质：若 $R(A)\leq 1$ 则 $\exists\alpha,\beta\in F^{n\times 1}$，使得 $A=\alpha\beta^T$，$A^m=(\beta^T\alpha)^{m-1}A$.

证明：$R(A)=0$，显然成立，此处不予证明；

$R(A)=1$：则 $A_{m\times n}\xrightarrow{初}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{m\times n}$ 则 $\exists P,Q$ (P,Q可逆)，使得 $A=P_{m\times m}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}Q_{n\times n}=\underbrace{P_{m\times m}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{m\times 1}}_{\alpha\ (行矩阵)}\underbrace{(1\ 0\cdots 0)_{1\times n}Q}_{\beta^T\ (列矩阵)}$

β也为行矩阵，

从而 $A=\alpha\beta^T$.

$A^m=\alpha\beta^T\alpha\beta^T\cdots\alpha\beta^T=(\beta\alpha^T)^T(\alpha^T)^T\beta^T\alpha\cdots\alpha\beta^T$

$=(\alpha^T\beta\alpha^T)^T\beta^T\alpha\cdots\alpha\beta^T\ \underline{\underline{\text{不断迭代}}}\ (\beta^T\alpha)^{m-1}\alpha\beta^T=(\beta^T\alpha)^{m-1}A$.