矩阵

概念

- 数域
- 定义2.1 矩阵
  - 相等
  - 零矩阵
  - 行矩阵（行向量） — 列矩阵（列向量）
  - 方阵
    - 标量矩阵
    - 对角矩阵
    - 单位矩阵 E / I
  - 转置矩阵 — 对称矩阵，反对称矩阵
  - 共轭转置矩阵
  - 可逆矩阵：AB=BA=E
  - 伴随矩阵 — A*/adj A（第i行第j列为Aji)
  - 奇异矩阵（|A|=0）非奇异矩阵（|A|≠0）
  - 初等矩阵（单位阵一次初等变换）
  - 分块矩阵
    - 子块
    - 分块对角矩阵 — 子块均为方阵时，为准对角矩阵
  - 分块初等矩阵
- 运算
  - 方阵的行列式（det A）
  - 线性
    - 定义2.2 矩阵加法
    - 定义2.3 矩阵数乘
  - 定义2.4 矩阵与矩阵相乘
  - 方阵的幂 — P33,例3——数学归纳法
  - 分块矩阵
    - 加法与数乘（A与B行数，列数相同，分块方法相同）
    - 乘法
      - 对A列的分法与对B行的分法一致
      - 乘积矩阵AB 第j列是A的各列的线性组合；第i行是B的各行的线性组合
      - ei'Aej=aij
    - 幂 （准对角矩阵时）
    - 转置矩阵（整体转，内部转）
    - 行列式
    - 逆矩阵（注意右上到左下的分块对角矩阵）
- 方阵的多项式
  - 若f(A)=0,则称方阵A满足多项式f(x)
  - 对任意n阶方阵A，存在次数不大于n的多项式f(x)，使f(A)=0
- 矩阵初等变换（行、列）
  - 换法、倍法、消法
  - （化简-初等行变换）行阶梯形矩阵（包括零矩阵） — 行最简形矩阵（A的非零行左起第一个非零元都是1，且这些1分别是它们所在列的唯一非零元）
  - （化简-初等行、列变换）（等价）标准形
- 分块矩阵初等变换
  - 换法变换
  - 倍法变换 — 可逆矩阵P（左行右列）
  - 消法变换 — 某一矩阵K（左，某行，加到另一行；右，某列，加到另一列）
- A与B等价：A经有限次初等变换变成矩阵B
- 矩阵的秩
  - 子矩阵、子式（子方阵）
  - 满秩阵、 列满秩阵、行满秩阵（半可逆）

定理

- 2.1 |kA|=kn|A|
- 行列式乘法公式 |AB|=|A||B| （数学归纳法）
- 引理2.1 F上n阶方阵A：A*A=AA*=|A|En
- 定理2.2 F上n阶方阵A，A可逆的充要条件——|A|≠0，此时A逆=A*/|A|
- 定理2.3 矩阵经初等变换后，其秩不变。 — A的标准形由A唯一确定
- n阶方阵A的秩R(A)=n——|A|≠0——n阶方阵A可逆
- 定理2.4 矩阵A可逆充要条件——存在有限个初等矩阵P1,P2,...,Pk，使A=P1P2...Pk
  - 推论2.1 两个m*n矩阵A，B等价的充要条件——存在m阶可逆P，n阶可逆Q，使PAQ=B
  - 推论2.2 R(PA)=R(AQ)=R(PAQ)=R(A)
  - 推论2.3 设A是可逆矩阵，则可以只经过初等行（列）变换将A化成单位矩阵E
- 降阶公式

方法

- 求逆
  - 定义法
  - 伴随矩阵
  - 初等变换法 — （A|E）—→（E|A逆）（初等行变换）
  - 分块矩阵
- 求秩
  - 定义法
  - 初等变换法 — 化为行阶梯形矩阵，非零行个数
  - 分块矩阵的初等变换 — P66
    - 0≤R(A)≤min{m,n}
    - R(A')=R(A)
    - R(kA)=0(k=0) / R(A),k≠0
    - R(A1)≤R(A),A1是A的子阵
    - A→（初）B,R(A)=R(B) /R(PA)=R(AQ)=R(PAQ)=R(A)
    - R(A 0 /0 B)=R(A)+R(B)
    - R(A 0 / C B)≥R(A)+R(B)
    - R(A|B)≤R(A)+R(B)
    - R(A+B)≤R(A)+R(B)
    - Am*n,Bn*m :R(A)+R(B)-n≤R(AB)≤min{R(A),R(B)} — 若AB=0,则R(A)+R(B)≤n
- 分块矩阵
  - 注意：分块阵只有消法一定不改变行列式的值，倍法与换法慎用
  - 二阶行列式对角线展开法则，当且仅当ABCD均为n阶方阵，A可逆，且AC=CA时满足

性质

- 加法
  - 交换
  - 结合
  - A+0=A
  - A+(-A)=0
- 数乘
  - 结合
  - 分配
  - 1A=A
- 矩阵乘法
  - （AB）C=A(BC)
  - A(B+C)=AB+AC (A+B)C=AC+BC
  - k(AB)=(kA)B=A(kB)
  - EmA=AEn=A
  - 0p*mA=0p*n,A0n*q=0m*q
  - 不满足交换律
  - 不满足消去律 — 存在A≠0，B≠0，使AB=0
- 转置
  - （A'）'=A
  - (A+B)'=A'+B'
  - (kA)'=kA'
  - (AB)'=B'A'
  - |A'|=|A|
- 共轭矩阵 — P37
- 逆矩阵
  - 唯一性
  - P39
    - A可逆，A逆可逆
    - kA可逆，逆矩阵
    - A,B同阶可逆方阵，AB可逆
    - A可逆，A'可逆
- 矩阵等价
  - 自反性
  - 对称性
  - 传递性
- 初等变换
  - 初等变换的可逆性
  - 初等变换的化简 — n*n的行阶梯形矩阵，一定是上三角形矩阵
- 矩阵的秩P48
- 初等矩阵
  - 初等矩阵都是可逆矩阵，逆矩阵仍然可逆
  - 初等矩阵的转置矩阵还是初等矩阵
- 分块矩阵 — |A|B|=(-1)mn|B|A|

半可逆

AB=AC→B=C（行满秩） BA=0→B=0(列满秩)

典型例题

- 矩阵的简单计算
- 矩阵的幂
- 求逆矩阵
- 解矩阵方程
- 求矩阵的秩
- 伴随矩阵
- 方矩阵的行列式
- 矩阵的迹
- 矩阵分解
- 其他问题