

# 线性方程组

## 一些基本概念

- 系数矩阵
- 增广矩阵
- 方程组相容
- 导出组
- 齐次线性方程组 — 形式  $AX=0$
- 非齐次线性方程组 — 形式  $AX=b \neq 0$

## 齐次线性方程组

- 是否有解 — 有解 (一定是有解的)
- 有多少解
  - A列满秩 — 仅有零解
  - A列不满秩 — 有非零解 (无穷多解)
- 解的情况 — 解空间 (构成线性空间)
  - 维数:  $d=n$  (几元、列数)  $-r$  — 在  $R^n$  中, 有  $n$  个自由度, 我们通过一个含有  $r$  条信息的方程组来限制它, 那么自由度仅剩  $n-r$  个
  - 基础解系 —  $n-r$  个线性无关的解向量
  - 通解 — 基础解系张成的向量空间
- 具体解法 — 初等行变换法
  - 1 对系数矩阵初等行变换, 求出秩
  - 2 将  $n-r$  个未知数, 挪到等号左边
  - 3 表示剩下的未知数, 就是通解了!

## 另一种解法

- 对于  $A_m \times n \times n^* \neq 0, r < n$
- 初等行变换「AT, E」变为「行满秩, K」
- 则K对应左边为0的行向量, 即为基础解系

## 应用

空间中的平面的位置关系

## 非齐次线性方程组

- 是否有解 — 有解
  - b可由  $a_1 \sim a_n$  线性表示
  - $a_1 \sim a_n$  与  $a_1 \sim a_n, b$  等价
  - $R(A) = R(A, b)$  — 常通过初等行变换判断
- 有多少解
  - 唯一解 —  $R(A) = R(A, b) = n$  (列数)
  - 无穷多解 —  $R(A) = R(A, b) < n$  (列数)
- 解的结构
  - 特解+导出组的通解 — 不构成向量空间!
  - 一些定理
    - 解的差「推出」导出组的解
    - 解与导出组的解之和, 还是解
- 具体解法
  - 初等行变换
  - 把一部分未知数(非零)挪到右边(将这部分未知数视为k)
  - 表示即可

## 联系线性相关

- 秩
- 定义法
- 特性

或: 克莱默法则 (局限)

