

n维向量

向量

符合八大运算
数域定义

线性相关与无关

定义 线性组合表示为0, 组合系数能否为0?

其他表述

- 某向量可被其余向量线性表示 **定义式**
- 秩不等于向量数 **秩、矩阵、行列式**
- 齐次线性方程组有非零解 **方程组**
- (信息的冗余)
- 特殊情况: 单个向量相关, 即0; 两个, 成比例

推论

- 部分相关, 整体相关
- 短无关, 长无关 **常结合范德蒙德行列式**
- 新增一个, 唯一表示
- n维向量, 支撑不了n+1个无关 **用秩来说明**
- 有0, 就一定相关
- A无关, B表示A, 则B向量数大于等于A

极大无关组

定义 向量组中, s个无关向量, 且增加一个就会相关

推论

- 极大无关组不唯一, 但秩相同且等价
- S中的向量, 可由极大无关组唯一表示

秩

- 定义: 最高阶非零子式的阶数
- 行阶梯非零行
- 极大无关组向量数

重新理解秩的性质 见笔记

- 某向量组可以被另一个向量组表示, 则前者的秩不大于后者

向量组等价

- 定义: 相互线性表示
- 等价向量组秩相同
- 包含关系的向量组秩相同「推出」等价
- 关于等价的性质: 某矩阵行变换, 行向量等价 (列向量不一定)
- 向量组等价不同于矩阵等价
- 两个等价向量组, 对向量个数没有限定

欧氏空间

定义 定义了线性运算和内积的实向量空间

- 乘法分配满足
- 证明某向量为0, 可用自身内积为0来证明
- 两个不等式: $|m+n| \leq |m|+|n|$; $|m|*|n| \geq |(m, n)|$
- 内积: $(m, n) = m^T * n = \text{一个数}$
- 内积开根号 长度
- 夹角: 内积比模长

规范正交基

- 两两正交 (内积为0) (线性无关plus) 的非零向量 (正交)
- 模长为1 (规范)
- $(P_i, P_j) = 1 \text{ 或 } 0$
- 优点: 求表示系数方便; 由它表示的向量, 计算内积方便
- 正交组所有向量相加模长的平方=各个向量模长平方之和

施密特正交化

- 原向量-前面的向量的投影
- 再规范化

正交矩阵

- 方阵, $A A^T = E$
- 等价于行向量组是规范正交基
- $A^{-1} = A^T$
- 正交矩阵之积正交
- 逆矩阵正交
- 特征值为+/-1
- 规范正交基到规范正交基的过渡矩阵「相互推出」正交阵
- $(AX, AY) = (X, Y), |AX| = |X|$

注意矩阵运算

向量空间

定义 非空, 加法数乘封闭, 满足八大运算

子空间

- 一定包含0
- R2的子空间: 原点, 过原点的直线, R2
- R3的子空间: 原点, 过原点直线、平面、R3

基底

- 极大无关组
- 自然基

维

- 极大无关组的向量数 (有几个自由度)
- 不同于向量的维!

坐标

- 表示系数

过渡矩阵

- $B = AP, \text{ 则 } XB = P^{-1}XA$