第一讲 基本知识

二．矩阵和向量

1．线性运算与转置

① $A+B=B+A$

② $(A+B)+C=A+(B+C)$

③ $c(A+B)=cA+cB$ $\quad (c+d)A=cA+dA$

④ $c(dA)=(cd)A$

⑤ $cA=0 \Leftrightarrow c=0$ 或 $A=0$。

向量组的线性组合

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，

$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s$。

转置

A 的转置 A^T（或 A'）

$(A^T)^T=A$

$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$

$(cA)^T=c(A^T)$ 。

3． n 阶矩阵

n 行、n 列的矩阵。

对角线，其上元素的行标、列标相等 $a_{11},a_{22},\cdots$

对角矩阵 $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

数量矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=3E$

单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}E$ 或 I

上（下）三角矩阵 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

对称矩阵 $A^T=A$。

反对称矩阵 $A^T=-A$。

三．矩阵的初等变换，阶梯形矩阵

初等变换分 $\begin{cases} \text{初等行变换} \\ \text{初等列变换} \end{cases}$

三类初等行变换

①交换两行的上下位置

$A \to B$

②用非零常数 c 乘某一行。

③把一行的倍数加到另一行上（倍加变换）

阶梯形矩阵

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{matrix}$

①如果有零行，则都在下面。

②各非零行的第一个非 0 元素的列号自上而下严格单调上升。

或各行左边连续出现的 0 的个数自上而下严格单调上升，直到全为 0 。

台角：各非零行第一个非 0 元素所在位置。

简单阶梯形矩阵：

3．台角位置的元素都为 1

4．台角正上方的元素都为 0。

每个矩阵都可用初等行变换化为阶梯形矩阵和简单阶梯形矩阵。

如果 A 是一个 n 阶矩阵

A 是阶梯形矩阵 $\Rightarrow$ A 是上三角矩阵，反之不一定，如

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是上三角，但非阶梯形

四．线性方程组的矩阵消元法

用同解变换化简方程再求解

三种同解变换：

①交换两个方程的上下位置。

②用一个非 0 数 c 乘某一个方程。

③把某一方程的倍数加到另一个方程上去，它在反映在增广矩阵上就是三种初等行变换。

矩阵消元法：

①写出增广矩阵$\left(A|\beta\right)$，用初等行变换化$\left(A|\beta\right)$为阶梯形矩阵$\left(B|\gamma\right)$。

②用$\left(B|\gamma\right)$判别解的情况。

i）如果$\left(B|\gamma\right)$最下面的非零行为$\left(0,\cdots,0|d\right)$，则无解，否则有解。

ii）如果有解，记γ是$\left(B|\gamma\right)$的非零行数，则

$\gamma = n$时唯一解。

$\gamma < n$时无穷多解。

iii）唯一解求解的方法（初等变换法）

去掉$\left(B|\gamma\right)$的零行，得$\left(B_0|\ \gamma_0\right)$，它是$n\times\left(n+c\right)$矩阵，$B_0$是$n$阶梯形矩阵，从而是上三角矩阵。

$$B_0=\begin{pmatrix} b_{11} & * & * & * & * \\ 0 & b_{22} & * & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1n-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则$b_{nn}\neq 0 \Rightarrow b_{n-1n-1}\neq 0\Rightarrow\cdots b_{ii}$都不为$0$。

于是把$\left(B_0|\gamma_0\right)$化出的简单阶梯形矩阵应为

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_n \end{array}\right)$$

其方程为$\begin{cases} x_1=c_1, \\ x_2=c_2, \\ \quad\vdots \\ x_n=c_n, \end{cases}$ 即$\left(c_1,c_2,\cdots,c_n\right)$就是解。

第二讲 行列式

一．形式与意义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A 是n阶矩阵，$|A|$表示相应的行列式。

二．定义（完全展开式）

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

一个n阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$的值：

①是$n!$项的代数和

②每一项是n个元素的乘积，它们共有$n!$项

$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

其中$j_1j_2\cdots j_n$是$1,2,\cdots,n$的一个全排列。

③$a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$前面乘的应为

$\left(-1\right)^{\tau\left(j_1j_2\cdots j_n\right)}$

$\tau\left(j_1j_2\cdots j_n\right)$的逆序数

$1,2,\cdots,n$

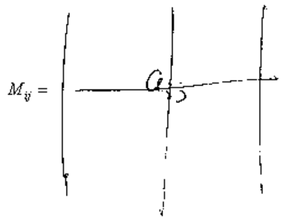
$$\left|\qquad\qquad\right| = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}\left(-1\right)^{\tau\left(j_1j_2\cdots j_n\right)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 & * \\ 0 & \mathrm{N} & * & * \\ b_n & * & * & * \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)\Lambda\ 21)} b_1 b_2 \Lambda\ b_n$$

$$\tau(n(n-1)\Lambda\ 21) = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

三．计算（化零降阶法）

余子式和代数余子式



称 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式。

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

定理：一个行列式的值 D 等于它的某一行（列），各元素与各自代数余子式乘积之和。

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \Lambda\ + a_{2n}A_{2n}$$

四．行列式的其它性质

1．转置值不变 $|A^T| = |A|$

2．用一个数 c 乘某一行（列）的各元素值乘 c

$|cA| = c^n |A|$

3．行列式和求某一行（列）分解

$|\alpha, \beta_1 + \beta_2, \gamma| = |\alpha, \beta_1, \gamma| + |\alpha, \beta_2, \gamma|$

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，3 阶矩阵

$B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

$|A + B| \neq |A| + |B|$

$A + B = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$

$|A + B| = |\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3|$

$= |\alpha_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3| + |\beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3|$

4．第一类初等变换使值变号

5．如果一个行列式某一行（列）的元素全为 0 或者有两行（列）的元素成比例关系，则行列式的值为 0 。

6．一行（列）的元素乘上另一行（列）的相应元素代数余子式之和为 0 。

7．$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|$

8．范德蒙行列

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \Lambda & 1 \\ a_1 & a_1 & \Lambda & a_n \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(a_j - a_i) \qquad C_n^2 \text{ 个}$$

五．元素有规律的行列式的计算

六．克莱姆法则

克莱姆法则：设线性方程组的系数矩阵 A 是 n 阶矩阵（即方程个数 m = 未知数个数 n），则

$|A| \neq 0$ 时，方程组唯一解，此解为

$$\left(\frac{D_1}{|A|}, \frac{D_2}{|A|}, \Lambda\ , \frac{D_n}{|A|}\right)$$

D_i 是 $|A|$ 的第 i 列用 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \mathrm{M} \\ b_n \end{pmatrix}$ 代替后所得 n 阶行列式：

$|A| = 0$ 时，解如何？

即唯一解 $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ $|A| \neq 0$ ？

改进：$|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ 唯一解

证明：$(A|\beta) \xrightarrow{\text{行}} (B|r)$

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow |B| \neq 0$

$$
(B|r)=\left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & * & * & * & \\ 0 & b_{22} & * & * & \\ 0 & 0 & \ddots & * & r \\ 0 & 0 & 0 & b_{nn} & \end{array}\right)
$$

若$|B|\neq 0$，则$b_{ii}\neq 0,\forall_i$，故唯一解。

若唯一解，则$(B\mid r)$有n个非零行，且最下面的非零行不是$(0,\cdots,0\mid d)$于是$b_{nn}\neq 0$，从而每$b_{ii}\neq 0$。

$$|B|=\prod_{i=1}^{n} b_{ii}\neq 0$$

求解方法：

$$(A|\beta)\xrightarrow{行}(B|r)\xrightarrow{行}(E|\eta)$$

η就是解。

对于齐次方程组$|A|\neq 0\Leftrightarrow$只有零解。

第三讲　矩阵

一．矩阵的乘法

1．定义与规律

定义：设A与B是两个矩阵

如果A的列数等于B的行数，则A可以乘B，乘积也是一个矩阵，记作AB。

当A是$m\times n$矩阵，B是$n\times s$矩阵时，AB是$m\times s$矩阵。

AB的(i,j)位元素是A的第i行和B的第j列对应元素乘积之和。

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

遵循的规律

①线性性质

$(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B$，

$A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$

$(cA)B=c(AB)=A(cB)$

②结合律$(AB)C=A(BC)$

③$(AB)^T=B^TA^T$

与数的乘法的不同之处

无交换律，无消去律

当$AB=0$时$\nRightarrow A=0$或$B=0$

由$A\neq 0$和$AB=0\nRightarrow B=0$

由$A\neq 0$时$AB=AC\nRightarrow B=C$（无左消去律）

2．n阶矩阵的方幂与多项式

任何两个n阶矩阵A与B可乘，并且AB仍是n阶矩阵。

行列式性质：$|AB|=|A||B|$

A是n阶矩阵

$A^k=\overbrace{AA\cdots A}^{k个}$，$A^0=E$

$A^kA^l=A^{k+l}$

$(A^k)^l=A^{kl}$

但是$(AB)^k=A^kB^k$不一定成立！

设$f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$，

A是n阶矩阵，规定

$f(A)=a_kA^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0E$

问题：数的乘法公式，因式分解等对矩阵是否仍成立？

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　　?

$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$?

$\|$

$A^2+AB+BA+B^2$

障碍是交换性

当$AB=BA$时，$(A+B)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^iA^{k-i}B^i$

一个矩阵A的每个多项式可以因式分解，例如

$A^2-2A-3E=(A-3E)(A+E)$

3．乘积矩阵的列向量与行向量

（1）设$m\times n$矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$n$维列向量$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，则

$A\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n$

$$\begin{array}{ccc}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1a_{11} & + & b_2a_{12} & + & b_3a_{13} \\ b_1a_{21} & + & b_2a_{22} & + & b_3a_{23} \\ b_1a_{31} & + & b_2a_{32} & + & b_3a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= b_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + b_3\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3$$

应用于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

记 A 是系数矩阵，$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，设 $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$，

$$\text{则 } Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

方程组的矩阵形式

$Ax = \beta$，$\left(\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T\right)$

方程组的向量形式

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$

（2）设 $AB = C$，

记 $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$，$C = (r_1, r_2, \cdots, r_s)$

则 $r_i = A\beta_i, i = 1,2,\cdots,s$

或 $AB = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_s)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{2n} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & , & \cdots \\ c_{21} & , & \cdots \\ \cdots & , & \cdots \\ c_{m1} & , & \cdots \end{pmatrix}$$

于是 $r_i = A\beta_i = b_{1i}\alpha_1 + b_{2i}\alpha_2 + \cdots + b_{ni}\alpha_n$

即 AB 的第 i 个列向量 r_i 是 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性组合，组合系数是 B 的第 i 个列向量的各分量。

类似地：AB 的第 i 个行向量是 B 的行向量组的线性组合，组合系数是 A 的第 i 个行向量的各分量。

$B^T A^T = C^T$

对角矩阵从右侧乘一矩阵 A，即用对角线上的元素依次乘 A 的各列向量。

对角矩阵从左侧乘一矩阵 A，即用对角线上的元素依次乘 A 的各行向量。

于是 $AE = A$，$EA = A$

$A(kE) = kA$，$(kE)A = kA$

两个对角矩阵相乘只须把对角线上对应元素相乘

对角矩阵的 k 次方幂只须把每个对角线上元素作 k 次方幂。

4．初等矩阵及其在乘法中的作用

对单位矩阵作一次初等变换所得到的矩阵称为初等矩阵。

共有 3 种初等矩阵

（1）$E(i,j)$：交换 E 的第 i,j 两行或交换 E 的第 i,j 两列

$$n = 5，E(2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（2）$E(i(c))$：用数 $c(\neq 0)$ 乘 E 的第 i 行或第 i 列

$$n = 5，E(2(c)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（3）$E(i,j(c))$：把 E 的第 j 行的 c 倍加到第 i 行上，或把 E 的第 i 列的 c 倍加到第 j 列上。

$$n=5,\quad E(1,4(c))=\begin{pmatrix}1&0&0&c&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

命题：初等矩阵从左（右）侧乘一个矩阵 A 等同于对 A 作一次相当的初等行（列）变换。

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)E(1,4(c))$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\begin{pmatrix}1&0&0&c&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,c\alpha_1+\alpha_4,\alpha_5)$$

5．矩阵分解

6．乘法的分块法则

一般法则：在计算两个矩阵 A 和 B 的乘积时，可以先把 A 和 B 用纵横线分割成若干小矩阵来进行，要求 A 的纵向分割与 B 的横向分割一致。

$$\begin{array}{c}\begin{matrix}n_1&n_2&n_3\end{matrix}\\ \left(\begin{array}{c|c|c}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\\hline A_{21}&A_{22}&A_{23}\\\hline A_{31}&A_{32}&A_{33}\\\hline A_{41}&A_{42}&A_{43}\end{array}\right)\end{array}\qquad \begin{array}{cc}\left(\begin{array}{c|c|c}B_{11}&B_{12}&B_{13}\\\hline B_{21}&B_{22}&B_{23}\\\hline B_{31}&B_{32}&B_{33}\end{array}\right)&\begin{matrix}n_1\\n_2\\n_3\end{matrix}\end{array}$$

两种常用的情况

（1）A,B 都分成 4 块

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$$

其中 A_{i1} 的列数和 B_{1j} 的行数相等，A_{i2} 的列数和 B_{2j} 的行数相关。

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}&A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\A_{21}A_{11}+A_{22}B_{21}&A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}$$

（2）准对角矩阵

$$\begin{pmatrix}A_{11}&0&\cdots&0\\0&A_{22}&\cdots&0\\&&\ddots&\\0&0&\cdots&A_{kk}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A_{11}&0&\cdots&0\\0&A_{22}&\cdots&0\\\vdots&\ddots&&\\0&0&\cdots&A_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&0&\cdots&0\\0&B_{22}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&B_{kk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}&0&\cdots&0\\0&A_{22}B_{22}&\cdots&0\\&&\ddots&\\0&0&&A_{kk}B_{kk}\end{pmatrix}$$

对一个 n 阶矩阵 A，规定 $tr(A)$ 为 A 的对角线上元素之和称为 A 的迹数。

于是 $(\alpha\beta^T)^k=(\beta^T\alpha)^{k-1}\alpha\beta^T$

$$=\left[tr(\alpha\beta^T)\right]^{k-1}\alpha\beta^T$$

二．矩阵方程与可逆矩阵

1．两类基本的矩阵方程

$AB=C$ 若知道 C 和 A，B 中的一个，求另一个，这是乘法的逆运算。

两类基本矩阵方程

$(I)Ax=B$　　　　$(II)xA=B$

都需求 A 是方阵，且 $|A|\neq 0$

（I）的解法：

$$(A|B)\xrightarrow{\text{行}}(E|x)$$

（II）的解法，先化为 $A^Tx^T=B^T$。

$$(A^T|B^T)\to(E|x^T)。$$

2．可逆矩阵及其逆矩阵

当 $a\neq 0$ 时，$a^{-1}=\dfrac{1}{a}$。

对 $ab=ac$ 两边乘 a^{-1}，得 $b=c$。

①定义与意义

设 A 是 n 阶矩阵，如果存在 n 阶矩阵 H，使得 $AH=E$，且 $HA=E$，则称 A 是可逆矩阵，称 H 是 A 的逆矩阵，证作 A^{-1}。

设 A 可逆，则 A 有消去律。

左消去律：$AB = AC \Rightarrow B = C$。

右消去律：$BA = CA \Rightarrow B = C$。

②可逆性的判别，逆矩阵的计算

定理：n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

证明：“$\Rightarrow$” $AA^{-1} = E$

$$|A||A^{-1}| = |E| = 1。$$

$\therefore |A|$ 不为 0，（且 $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$）。

“$\Leftarrow$”要找 H，既是 $Ax = E$ 的解，又是 $xA = E$ 的解。

$|A| \neq 0$，$Ax = E$ 有唯一解，记作 B，$xA = E$ 也有唯一解，记作 C，则 $AB = E$，$CA = E$。

$B = (CA)B = C(AB) = C$

A 可逆，A^{-1} 即 $Ax = E$ 的解。

求 A^{-1} 的方程（初等变换法）

$$(A|E) \xrightarrow{行} (E|A^{-1})$$

推论 设 A，B 是两个 n 阶矩阵，则
$AB = E \Leftrightarrow BA = E$

③可逆矩阵的性质

i）当 A 可逆时，

A^T 也可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$。

A^k 也可逆，且 $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$。

数 $c \neq 0$，cA 也可逆，$(cA)^{-1} = \dfrac{1}{c}A^{-1}$。

$|cA| = c^n|A| \neq 0$

$$(cA)\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right) = \left(c \cdot \frac{1}{c}\right)AA^{-1} = E。$$

ii）设 A，B 是两个 n 阶可逆矩阵，则 AB 也可逆，且

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$。

当 A，B 都是 n 阶矩阵时

A，B 都可逆 $\Leftrightarrow AB$ 可逆

命题：初等矩阵都可逆，且

$$(E(i,j))^{-1} = E(i,j)$$

$$(E(i(c)))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{c}\right)\right)$$

$$(E(i,j(c)))^{-1} = E(i,j(-c))$$

$|E(i,j(c))| = 1$。

命题：准对角矩阵 $A = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk} \end{vmatrix}$ 可逆

$\Leftrightarrow$

每个 A_{ii} 都可逆，记

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk}^{-1} \end{vmatrix}$$

3．伴随矩阵

每个 n 阶矩阵 A 都有伴随矩阵，证作 A^*。

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \Lambda & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \Lambda & A_{n2} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ A_{1n} & A_{2n} & \Lambda & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ij})^T$$

伴随矩阵的基本性质：

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

当 A 可逆时，

$$A\frac{A^*}{|A|} = E$$

得 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$，

求逆矩阵的伴随矩阵法

当 $n=2$ 时：$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，

则 $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad-bc}$$

要证　$A^* = |A|A^{-1}$

$$\frac{A}{|A|}A^* = E$$

得 $(A^*)^{-1} = \dfrac{A}{|A|} = (A^{-1})^*$

$$\left((A^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = \frac{A}{|A|} \right)$$

伴随矩阵的其他性质

①$|A^*| = |A|^{n-1}$，

②$(A^T)^* = (A^*)^T$，

③$(cA)^* = c^{n-1}A^*$，

④$(AB)^* = B^*A^*$，

⑤$(A^k)^* = (A^*)^k$，

⑥$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$。

$n=2$ 时，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$(A^*)^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

关于矩阵右上肩记号：T，k，-1，*

i) 任何两个的次序可交换，

如 $(A^T)^* = (A^*)^T$，

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ 等

ii) $(AB)^T = B^TA^T, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$，

$(AB)^* = B^*A^*$

（但 $(AB)^k = B^kA^k$ 不一定成立！）

小结：

1．乘法的定义，与数的乘法的区别

2．在特殊情形下怎么快捷地求乘积矩阵

3．矩阵分解的概念

4．矩阵方程的初等变换法

5．可逆矩阵

$Ax = B$，$x = A^{-1}B$

第四讲　向量组的线性关系和秩

一．线性表示

1．β 可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，即 β 可以表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合，也就是存在 $c_1, c_2, \cdots, c_s$ 使得

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_s\alpha_s = \beta$$

记号：$\beta \to \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$

例如 $0 \to \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$　　$\alpha_i \to \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$

$\beta \to \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \beta$ 有解

$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)x = \beta$ 有解

$\left(x=\left(x_1,\Lambda,x_s\right)^T\right)$

$Ax=\beta$ 有解，即 β 可用 A 的列向量组表示。

2． $\beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_t \to \alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$，即每个 $\beta_i \to \alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$

如果 $AB=C=\left(r_1,r_2,\Lambda,r_s\right)$，$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_n\right)$，

则 $r_1,r_2,\Lambda,r_s \to \alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_n$。

如果 $\beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_t \to \alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$，则存在矩阵 C，使得

$$\left(\beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_t\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s\right)C$$

例如 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=2\alpha_2+3\alpha_3$，则

$$\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

线性表示关系有传递性，即当

$\beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_t \to \alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s \to r_1,r_2,\Lambda,r_p$，

则 $\beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_t \to r_1,r_2,\Lambda,r_p$。

3．等价关系：如果 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_t$ 互相可表示

$$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s \rightleftarrows \beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_t$$

就称它们等价，记作 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s \cong \beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_t$。

二．线性相关性

1．定义与意义

考察 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$ 的内在线性表示关系

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

线性相关：存在向量 α_i 可用其它向量 $\alpha_1,\Lambda,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\Lambda,\alpha_s$ 线性表示。

线性无关：每个向量 α_i 都不能用其它向量线性表示

定义：如果存在不全为 0 的 c_1,c_2,Λ,c_s，使得

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\Lambda+c_s\alpha_s=0,$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$ 线性相关，否则称 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$ 线性无关。

例如 $c_1\neq 0$，则 $c_1\alpha_1=-c_2\alpha_2-\Lambda-c_s\alpha_s$，

$$\alpha_1=-\frac{c_2}{c_1}\alpha_2-\Lambda-\frac{c_s}{c_1}\alpha_s。$$

$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$ 线性无关，即当 $c_1\alpha_1+\Lambda+c_s\alpha_s=0$ 时必存 $c_1=\Lambda=c_s=0$。

$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$ 线性相（无）关

$\Leftrightarrow x_1\alpha_1+\Lambda+x_s\alpha_s=0$ 有（无）非零解

$\Leftrightarrow \left(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s\right)x=0$ 有（无）非零解

$s=1$，即单个向量 α，$x\alpha=0$

α 相关 $\Leftrightarrow \alpha=0$

$s=2$，α_1,α_2 相关 $\Leftrightarrow$ 对应分量成比例

$$\alpha_1=\left(a_1,a_2,\Lambda,a_n\right),\ \alpha_2=\left(b_1,b_2,\Lambda,b_n\right)$$

α_1,α_2 相关 $\Leftrightarrow a_1:b_1=a_2:b_2=\Lambda=a_n:b_n$

2．性质

①如果向量个数 s 二维数 n，则 $\alpha_1,\Lambda,\alpha_{\mathrm{n}}$ 线性相（无）关 $\Leftrightarrow \left|\alpha_1\Lambda\ \alpha_n\right|=(\neq)0$

$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$，$Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow \left|A\right|=0$

如果 $s>n$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 一定相关。

$Ax=0$ 的方程个数 $n<$ 未知数个数 s

②如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关，则它的每一个部分组都无关。

例如若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 一定无关。

③如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 相关，则

$$\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$$

设 $c_1,\cdots,c_s,c$ 不全为 0，使得 $c_1\alpha_1+\cdots+c_s\alpha_s+c\beta=0$

则其中 $c\neq0$，否则 $c_1,\cdots,c_s$ 不全为 0，$c_1\alpha_1+\cdots+c_s\alpha_s=0$，与条件 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 无关矛盾。于是 $\beta=-\dfrac{c_1}{c}\alpha_1-\cdots-\dfrac{c_s}{c}\alpha_s$。

④当 $\beta\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 时，表示方式唯一 $\Leftrightarrow \alpha_1\cdots\alpha_s$ 无关，

（表示方式不唯一 $\Leftrightarrow \alpha_1\cdots\alpha_s$ 相关）

⑤若 $\beta_1,\cdots,\beta_t\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，并且 $t>s$，则 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 一定线性相关。

记 $A=\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_s\right)$，$B=\left(\beta_1,\cdots,\beta_t\right)$，则存在 $s\times t$ 矩阵 C，使得 $B=AC$。

$Cx=0$ 有 s 个方程，t 个未知数，$s<t$，有非零解 η，$C\eta=0$。

则 $B\eta=AC\eta=0$，即 η 也是 $Bx=0$ 的非零解，从而 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性相关。

各性质的逆否形式

①如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关，则 $s\leq n$。

②如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 有相关的部分组，则它自己一定也相关。

③如果 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 无关，而 $\beta\not\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s\beta$ 无关。

⑤如果 $\beta_1\cdots\beta_t\to\alpha_1\cdots\alpha_s$，$\beta_1\cdots\beta_t$ 无关，则 $t\leq s$。

推论：若两个无关向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 与 $\beta_1\cdots\beta_t$ 等价，则 $s=t$。

三．极大无关组和秩

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以有多大的线性无关的部分组？

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\ \beta_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

1．定义

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个部分组 $\left(I\right)$ 称为它的一个极大无

关组，如果满足：

i）(I)线性无关。

ii）(I)再扩大就相关。

$$(I)\rightleftarrows\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s \quad (II)\cong\alpha_1\Lambda\ \alpha_s\cong(I)$$

规定$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$的秩$\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s)=\#(I)$。

如果$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$每个元素都是零向量，则规定其秩为$0$。

$$0\le\gamma(\alpha_1,\Lambda,\alpha_s)\le\min\{n,s\}$$

讨论： 设$\gamma(\alpha_1,\Lambda,\alpha_s)=3$

①$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_6$相关无关？

②α_1,α_2相关无关？

结论：一个线性无关部分组(I)，若$\#(I)$等于秩$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_6\to(I)$，$(I)$就一定是极大无关组。

2．性质（应用）

①$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$无关$\Leftrightarrow\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s)=s$。

②

$$\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s\Leftrightarrow\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s,\beta)=\gamma(\alpha_1,\Lambda,\alpha_s)$$

取$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$的一个极大无关组$(I)$

(I)也是$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s,\beta$的极大无关组$\Leftrightarrow(I),\beta$相关。

$\beta\to\alpha_1,\Lambda,\alpha_s\Leftrightarrow\beta\to(I)\Leftrightarrow(I),\beta$相关。

$$\gamma(\alpha_1,\Lambda,\alpha_s,\beta)=\begin{cases}\gamma(\alpha_1,\Lambda,\alpha_s),\beta\to\alpha_1\Lambda\ \alpha_s\\ \gamma(\alpha_1,\Lambda,\alpha_s)+1,\beta\not\to\ \alpha_1,\Lambda,\alpha_s\end{cases}$$

③ β 可用 $\alpha_1,\Lambda,\alpha_s$ 唯一表示 $\Leftrightarrow\gamma(\alpha_1,\Lambda,\alpha_s,\beta)=\gamma(\alpha_1,\Lambda,\alpha_s)=s$

④

$$\beta_1,\Lambda,\beta_t\to\alpha_1,\Lambda,\alpha_s\Leftrightarrow\gamma(\alpha_1,\Lambda,\alpha_s,\beta_1,\Lambda,\beta_t)=\gamma(\alpha_1,\Lambda,\alpha_s)$$

$$\Rightarrow\gamma(\beta_1,\Lambda,\beta_t)\le\gamma(\alpha_1,\Lambda,\alpha_s)$$

⑤$\alpha_1,\Lambda,\alpha_s\cong\beta_1,\Lambda,\beta_t\Leftrightarrow$

$$\gamma(\alpha_1,\Lambda,\alpha_s)=\gamma(\alpha_1\Lambda\ \alpha_s,\beta_1\Lambda\ \beta_t)=\gamma(\beta_1,\Lambda,\beta_t)$$

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$的秩的计算方法：

$(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s)\xrightarrow{\text{行}}$阶梯形矩阵$B$

$\gamma(\alpha_1,\Lambda,\alpha_s)=B$的非零行数。

3．有相同线性关系的向量组

两个向量若有相同个数的向量：$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_s$，并且向量方程

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\Lambda+x_s\alpha_s=0$ 与 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+\Lambda+x_s\beta_s=0$同解，则称它们有相同的线性关系。

①对应的部分组有一致的相关性。

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$的对应部分组$\beta_1,\beta_2,\beta_4$，

若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$相关，有不全为$0$的$c_1,c_2,c_4$使得

$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_4\alpha_4=0$，

即 $(c_1,c_2,0,c_4,0,\Lambda,0)$ 是 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\Lambda+x_s\alpha_s=0$的解，

从而也是$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\Lambda+x_s\beta_s=0$的解，则有

$c_1\beta_1+c_2\beta_2+c_4\beta_4=0$，

β_1,β_2,β_3也相关。

②极大无关组相对应，从而秩相等。

③有一致的内在线表示关系。

如$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4\Leftrightarrow\beta_3=3\beta_1+2\beta_2-\beta_4$。

设：$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s\right)$，$B=\left(\beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_s\right)$，则

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\Lambda+x_s\alpha_s=0$ 即 $Ax=0$，

$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\Lambda+x_s\beta_s=0$ 即 $Bx=0$。

$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_s$ 有相同的线性关系即 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解。

反之，当 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解时，A 和 B 的列向量组有相同的线性关系。

四．矩阵的秩

1．定义

A 是 $m\times n$ 矩阵

定理：矩阵 A 的行向量组的秩=列向量组的秩。

规定 $r(A)=$ 行（列）向量组的秩。

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=C$$

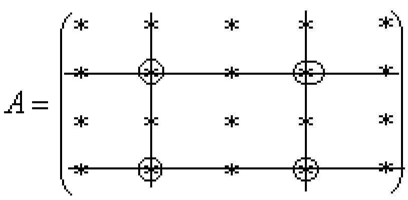
A 的行秩=C 的行秩

$\|$

A 的列秩=C 的列秩

$r(A)$ 的计算：用初等变换化 A 为阶梯形矩阵 B，则 B 的非零行数即 $r(A)$。

命题：$r(A)=A$ 的非零子式阶数的最大值。



2．矩阵的秩的简单性质

$0\le r(A)\le\min\{m,n\}$

$r(A)=0\Leftrightarrow A=0$

A 行满秩：$r(A)=m$

A 列满秩：$r(A)=n$

n 阶矩阵 A 满秩：$r(A)=n$

A 满秩 $\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量组线性无关

$\Leftrightarrow |A|\ne 0$

$\Leftrightarrow$ A 可逆

$\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 只有零解，$Ax=\beta$ 唯一解。

3．矩阵在运算中秩的变化

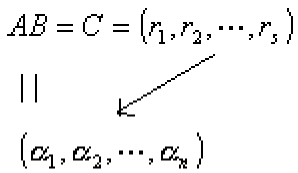
初等变换保持矩阵的秩

①$r\left(A^T\right)=r(A)$

②$c\ne 0$ 时，$r(cA)=r(A)$

③$r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$

④$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$



⑤A 可逆时，$r(AB)=r(B)$

B 可逆时，$r(AB)=r(A)$

$r(AB)\le r(B)$

$B=A^{-1}(AB)$，$r(B)\le r(AB)$

⑥若 $AB=0$，则 $r(A)+r(B)\le n$（A 的列数，B 的行数）

⑦A 列满秩时 $r(AB)=r(B)$

B 行满秩时 $r(AB)=r(A)$

⑧$r(AB)+n\ge r(A)+r(B)$

第五讲　线性方程组

一．方程组的表达形式

1．$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \Lambda + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

2．$Ax = \beta$

η 是解 $\Leftrightarrow A\eta = \beta$

3．$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \Lambda + x_n\alpha_n = \beta$

有解 $\Leftrightarrow \beta \to \alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_n$

二．解的性质

1．$Ax = 0$ 的解的性质。

如果 $\eta_1, \eta_2, \Lambda, \eta_e$ 是一组解，则它们的任意线性组合 $c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \Lambda + c_e\eta_e$ 一定也是解。

$\forall_i, A\eta_i = 0 \Rightarrow A(c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \Lambda + c_e\eta_e) = 0$

2．$Ax = \beta(\beta \neq 0)$

①如果 $\xi_1, \xi_2, \Lambda, \xi_e$ 是 $Ax = \beta$ 的一组解，则

$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \Lambda + c_e\xi_e$ 也是 $Ax = \beta$ 的解 $\Leftrightarrow c_1 + c_2 + \Lambda + c_e = 1$

$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \Lambda + c_e\xi_e$ 是 $Ax = 0$ 的解 $\Leftrightarrow c_1 + c_2 + \Lambda + c_e = 0$

$A\xi_i = \beta \cdot \forall i$

$$A(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \Lambda + c_e\xi_e) = c_1A\xi_1 + c_2A\xi_2 + \Lambda + c_eA\xi_e$$

$$= (c_1 + c_2 + \Lambda + c_e)\beta$$

当 ξ_1, ξ_2 是 $Ax = \beta$ 的两个解时，$\xi_1 - \xi_2$ 是 $Ax = 0$ 的解

②如果 ξ_0 是 $Ax = \beta$ 的解，则 n 维向量 ξ 也是 $Ax = \beta$ 的解 $\Leftrightarrow \xi - \xi_0$ 是 $Ax = 0$ 的解。

三．解的情况判别

$Ax = \beta$，即 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \Lambda + x_n\alpha_n = \beta$

有解 $\Leftrightarrow \beta \to \alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_n$

$\Leftrightarrow \gamma(\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_n, \beta) = \gamma(\alpha_1, \alpha_2, \Lambda, \alpha_n)$

$\Leftrightarrow \gamma(A \mid \beta) = \gamma(A)$

无解 $\Leftrightarrow \gamma(A \mid \beta) > \gamma(A)$

唯一解 $\Leftrightarrow \gamma(A \mid \beta) = \gamma(A) = n$

无穷多解 $\Leftrightarrow \gamma(A \mid \beta) = \gamma(A) < n$

方程个数 m：

$\gamma(A \mid \beta) \leq m, \gamma(A) \leq m$

①当 $\gamma(A) = m$ 时，$\gamma(A \mid \beta) = m$，有解

②当 $m < n$ 时，$\gamma(A) < n$，不会是唯一解

对于齐次线性方程组 $Ax = 0$，

只有零解 $\Leftrightarrow \gamma(A) = n$（即 A 列满秩）

（有非零解 $\Leftrightarrow \gamma(A) < n$）

推论 1　如果 A 列满秩，则 A 有左消去律，即

① $AB = 0 \Rightarrow B = 0$

② $AB = AC \Rightarrow B = C$

证：①记 $B = (\beta_1, \beta_2, \Lambda, \beta_s)$，则 $AB = (A\beta_1, \Lambda, A\beta_s)$，$AB = 0$ 即对每个 i，$A\beta_i = 0$，即 β_i 是 $Ax = 0$ 的解。$Ax = 0$ 只有零解，故 $\beta_i = 0$。

② $A(B - C) = 0$，$B - C = 0$。

推论 2　如果 A 列满秩，则 $\gamma(AB) = \gamma(B)$

证：下面证 $ABx=0$ 与 $Bx=0$ 同解。

η 是 $ABx=0$ 的解 $\Leftrightarrow AB\eta=0$

$\Leftrightarrow B\eta=0 \Leftrightarrow \eta$ 是 $Bx=0$ 的解

四．基础解系和通解

1． $Ax=0$ 有非零解时的基础解系

记 J 是 $Ax=0$ 的全部解的集合。
称 J 的极大无关组为 $Ax=0$ 的基础解系。

$\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_e$ 是 $Ax=0$ 的基础解系的条件：

①每个 η_i 都是 $Ax=0$ 的解

② $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_e$ 线性无关

③ $Ax=0$ 的每个解 $\eta \to \eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_e$

定理：$\gamma(J)=n-\gamma(A)$

$\gamma(J)+\gamma(A)=n$

$A \xrightarrow{\text{行}}$ 阶梯形矩阵 B

$\gamma(A)=B$ 的非零行数

$Bx=0$ 有 $\gamma(A)$ 个方程（除去 $J0=0$），因此有 $n-\gamma(A)$ 个自由未知量。

于是 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_e$ 是 $Ax=0$ 的基础解系的条件③可换为

③′ $l=n-\gamma(A)$

证明：当 $AB=0$ 时，$\gamma(A)+\gamma(B)\le n$.

证：记 $B=(\beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_s)$

$AB=0 \Leftrightarrow$ 每个 β_i 都是 $Ax=0$ 的解

$\gamma(B)=\gamma(\beta_1,\beta_2,\Lambda,\beta_s)\le\gamma(J)=n-\gamma(A)$

$\gamma(A)+\gamma(B)\le n$

2．通解

①如果 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_e$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $Ax=0$ 的通解为

$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\Lambda+c_e\eta_e$，$c_i$ 任意

②如果 ξ_0 是 $Ax=\beta(\beta\ne0)$ 的一个解，$\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_e$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，则 $Ax=\beta$ 的通解为

$\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\Lambda+c_e\eta_e$，$c_i$ 任意

第六讲　特征向量与特征值，相似与对角化

一．特征向量与特征值

设 A 是 n 阶矩阵，η 是 n 维非零列向量，$A\eta$ 与 η 是否相关？

例如：$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

1．定义：如果 $\eta\ne0$，并且 $A\eta$ 与 η 线性相关，则称 η 是 A 的一个特征向量。此时，有数 λ，使得 $A\eta=\lambda\eta$，称 λ 为 η 的特征值。

设 A 是数量矩阵 λE，则对每个 n 维列向量 η，$A\eta=\lambda\eta$，于是，任何非零列向量都是 λE 的特征向量，特征值都是 λ。

①特征值有限
特征向量无穷多

若 $A\eta=\lambda\eta$，$A(c\eta)=cA\eta=c\lambda\eta=\lambda(c\eta)$

$$\left.\begin{array}{l} A\eta_1=\lambda\eta_1 \\ A\eta_2=\lambda\eta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow A(c_1\eta_1+c_2\eta_2)=c_1A\eta_1+c_2A\eta_2=\lambda(c_1\eta_1+c_2\eta_2)$$

②每个特征向量有唯一特征值，而有许多特征向量有相同的特征值。

③计算时先求特征值，后求特征向量。

2．计算

A n 阶矩阵，求 A 的特征向量与特征值

$A\eta=\lambda\eta,\eta\neq 0$

$\Leftrightarrow (\lambda E-A)\eta=0,\eta\neq 0$

$\Leftrightarrow \eta$ 是 $(\lambda E-A)x=0$ 的非零解

命题：① λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda E-A|=0$

② η 是属于 λ 的特征向量 $\Leftrightarrow \eta$ 是 $(\lambda E-A)x=0$ 的非零解

称多项式 $|xE-A|$ 为 A 的特征多项式。

λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow \lambda$ 是 A 的特征多项式 $|xE-A|$ 的根。

λ 的重数：λ 作为 $|xE-A|$ 的根的重数。

n 阶矩阵 A 的特征值有 n 个：$\lambda_1,\lambda_2,\Lambda,\lambda_n$，可能其中有的不是实数，有的是多重的。

计算步骤：

①求出特征多项式 $|xE-A|$。

②求 $|xE-A|$ 的根，得特征值。

③对每个特征值 λ_i，求 $(\lambda_i E-A)x=0$ 的非零解，得属于 λ_i 的特征向量。

复杂，困难，不作一般的要求。

两种特殊情形：

（1）A 是上（下）三角矩阵，对角矩阵时，特征值即对角线上的元素。

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$|xE-A|=\begin{vmatrix} x-\lambda_1 & -* & -* \\ 0 & x-\lambda_2 & -* \\ 0 & 0 & x-\lambda_3 \end{vmatrix}=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$$

（2）$r(A)=1$ 时：A 的特征值为 $0,0,\Lambda,0,tr(A)$

3．特征值的性质

命题：n 阶矩阵 A 的特征值 λ 的重数 $\geq n-r(\lambda E-A)$

命题：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\Lambda,\lambda_n$，则

① $\lambda_1\lambda_2\Lambda\lambda_n=|A|$

② $\lambda_1+\lambda_2+\Lambda+\lambda_n=tr(A)$

$$\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x-a_{44} \end{vmatrix}=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4)$$

比较两边的常数项部分得①

比较两边的 x^3 的系数得②：右边为 $-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$ 左边会 x^3 的项且有 $(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})$，其系数为 $-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})=-tr(A)$

4．与 A 相关的矩阵的特征向量与特征值

命题：设 η 是 A 的特征向量，特征值为 λ，即 $A\eta=\lambda\eta$，则

①对于 A 的每个多项式 $f(A)$，$f(A)\eta=f(x)\eta$

例如：$A\eta=AAA\eta=\lambda^3\eta$

$(2A+E)\eta = 2A\eta + \eta = (2\lambda+1)\eta$

$(A^5 - 4A^3 + 2A^2 - E)\eta = (\lambda^5 - 4\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1)\eta$

②当 A 可逆时，$A^{-1}\eta = \dfrac{1}{\lambda}\eta$，$A^*\eta = \dfrac{|A|}{\lambda}\eta$

$A\eta = \lambda\eta \Rightarrow \eta = \lambda A^{-1}\eta \Rightarrow A^{-1}\eta = \dfrac{1}{\lambda}\eta$

$|A|\eta = \lambda A^*\eta \Rightarrow A^*\eta \Rightarrow \dfrac{|A|}{\lambda}\eta$。

命题：设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则

① $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$

② A 可逆时，A^{-1} 的特征值为 $\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, \cdots, \dfrac{1}{\lambda_n}$

A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda_1}, \dfrac{|A|}{\lambda_2}, \cdots, \dfrac{|A|}{\lambda_n}$

③ A^T 的特征值也是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

$|xE - A^T| = \left|(xE-A)^T\right| = |xE - A|$。

5．特征值的应用

①求行列式 $|A| = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

②判别可逆性

λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0 \Leftrightarrow A - \lambda E$ 不可逆

$A - \lambda E$ 可逆 $\Leftrightarrow \lambda$ 不是 A 的特征值。

当 $f(A) = 0$ 时，如果 $f(c) \neq 0$，则 $A - cE$ 可逆

若 λ 是 A 的特征值，则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值 $\Rightarrow f(\lambda) = 0$。

$f(c) \neq 0 \Rightarrow c$ 不是 A 的特征值 $\Leftrightarrow AcE$ 可逆。

二．n 阶矩阵的相似关系

设 A，B 是两个 n 阶矩阵。如果存在 n 阶可逆矩阵 U，使得 $U^{-1}AU = B$，则称 A 与 B 相似，记作 $A \sim B$。

当 $AU = UA$ 时，$B = A$，而 $AU \neq UA$ 时，$B \neq A$。

相似关系有 i）对称性：$A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$

$U^{-1}AU = B$，则 $A = UBU^{-1}$

ii）有传递性：$A \sim B$，$B \sim C$，则 $A \sim C$

$U^{-1}AU = B$，$V^{-1}BV = C$，则

$(UV)^{-1}A(UV) = V^{-1}U^{-1}AUV = V^{-1}BV = C$

命题　当 $A \sim B$ 时，A 和 B 有许多相同的性质

① $|A| = |B|$

$|B| = |U^{-1}AU| = |U^{-1}||A||U| = |A|$

② $\gamma(A) = \gamma(B)$

③ A，B 的特征多项式相同，从而特征值完全一致。

$|xE - B| = |xE - U^{-1}AU| = |U^{-1}(xE - A)U| = |xE - A|$

A 与 B 的特征向量的关系：η 是 A 的属于 λ 的特征向量 $\Leftrightarrow U^{-1}\eta$ 是 B 的属于 λ 的特征向量。

$A\eta = \lambda\eta \Leftrightarrow B(U^{-1}\eta) = \lambda(U^{-1}\eta)$

χ　　　　　χ

$U^{-1}A\eta = \lambda U^{-1}\eta \Leftrightarrow U^{-1}AUU^{-1}\eta = \lambda(U^{-1}\eta)$

三．n 阶矩阵的对角化

A 是否相似于一个对角矩阵？

不是每个矩阵都相似于对角矩阵的，例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。若 $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$，则 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，则 $A = E$。

基本问题

①判别 n 阶矩阵 A 是否相似于对角矩阵（可对角化）

②实现问题，构造可逆矩阵 U，使 $U^{-1}AU$ 是对角矩阵

基本定理　A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量。

设可逆矩阵 $U = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$，则

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=U\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&\lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1\eta_1,\lambda_2\eta_2,\cdots,\lambda_n\eta_n)$$

$$\Leftrightarrow A\eta_i=\lambda_i\eta_i,\ i=1,2,\cdots,n$$

判别法则

A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 对于 A 的每个特征值 λ，λ 的重数 $=n-\gamma(\lambda E-A)$。

当 λ_i 是一重特征值时，重数 $1=n-r(\lambda_i E-A)$ 一定成立。只须对重数 >1 的特征值检查。

推论：如果 A 有 n 个不同的特征值，则 A 一定可对角化。对角化的实现（可逆矩阵 U 的构造）：

对每个特征值 λ_i，求出 $(\lambda_i E-A)x=0$ 的一个基础解系，把它们合在一起，得到 n 个线性无关的特征向量，$\eta_1,\cdots,\eta_n$。令 $U=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，则

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&\lambda_n\end{pmatrix}$$，其中 λ_i 为 η_i 的特征值。

第七讲　二次型（实二次型）

一．基本概念

1．二次型及其矩阵

二次型是多个变量的二次齐次多项式函数。如

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+5x_2x_3$$

是一个三元二次型，它的每一项都是二次，或是一个变量的平方，称为平方项或是两个不同变量的乘积，称为交叉项。

一个 n 元二次型的一般形式为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j$$

只有平方项的二次型称为标准二次型。

形如：$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$ 的 n 元二次型称为规范二次型。

对每个 n 阶实矩阵 A，记 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，则 x^TAx 是一个二次型。

例如 $n=3$ 时，$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，则

$$x^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j$$

其中平方项的系数都是 A 的对角线上的元素，而交叉项 x_ix_j 的系数是 $a_{ij}+a_{ji}$。

我们可利用矩阵的形式来写出一个二次型，如把

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+5x_2x_3$$

写成 x^TAx 的形式，A 的对角线上的元素是确定的，依次为 $a_{11}=3$，$a_{22}=-2$，$a_{33}=1$，但对角线外的元素不是唯一确定的，只要满足。

$a_{12}+a_{21}=4$，$a_{13}+a_{31}=-6$，$a_{23}+a_{32}=5$，就可以。

我们要求 A 是一个对称矩阵，则它就是唯一确定的了。

称这个实对称矩阵 A 为该二次型的矩阵。

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$$

称 A 的秩 $\gamma(A)$ 为这个二次型的秩。标准二次型的矩阵是对角矩阵。

2．可逆线性变量替换

椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

设有一个 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，引进新的一组

变量 y_1, y_2, Λ, y_n，并把 x_1, x_2, Λ, x_n 用它们表示。

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \Lambda + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \Lambda + c_{2n}y_n \\ \qquad\qquad \Lambda \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \Lambda + c_{nn}y_n \end{cases}$$

（并要求矩阵 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \Lambda & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \Lambda & c_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ c_{n1} & c_{n2} & \Lambda & c_{nn} \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵）

代入 $f(x_1, x_2, \Lambda, x_n)$，得到 y_1, Λ, y_n 的一个二次型 $g(y_1, \Lambda, y_n)$ 这样的操作称为对 $f(x_1 \Lambda\ x_n)$ 作了一次可逆线性变量替换。

设 $Y = (y_1, y_2, \Lambda, y_n)^T$，则上面的变换式可写成

$x = CY$

则 $f(x_1 \Lambda\ x_n) = x^T Ax = Y^T C^T ACY = g(y_1, \Lambda, y_n)$

于是 $g(y_1, \Lambda\ y_n)$ 的矩阵为 $C^T AC$

$(C^T AC)^T = C^T A^T C^T = C^T AC$

3．实对称矩阵的合同

两个 n 阶实对称矩阵 A 和 B，如果存在 n 阶实可逆矩阵 C，值得 $C^T AC = B$。称 A 与 B 合同，记作 $A \simeq B$。

命题：二次型 $f(x_1 \Lambda\ x_n) = x^T Ax$ 可用可逆线性变换替换化为

$g(y_1 \Lambda\ y_n) = Y^T BY \Leftrightarrow A \simeq B$

二．二次型的标准化和规范化

1．每个二次型都可以用可逆线性变量替换化为标准二次型和规范二次型。

也就是每个实对称矩阵都会同于对角矩阵和规范对角矩阵。

设 A 是一个实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得 $D = Q^{-1}AQ$ 是对角矩阵。

$Q^T AQ = Q^{-1}AQ = D$

$A \sim D$，$A \simeq D$

2．标准化和规范化的方法

①正交变换法

② 配方法

3．惯性定理与惯性指数

定理　一个二次型用可逆线性变换替换化出的标准形的各个平方项的系数中，大于 0 的个数和小于 0 的个数是由原二次型所决定的，分别称为原二次型的正、负惯性指数。

一个二次型化出的规范二次型在形式上是唯一的，也即相应的规范对角矩阵是唯一的。

用矩阵的语言来说：一个实对称矩阵 A 会同于唯一规范对角矩阵。

二次型的正、负惯性指数在可逆线性变量替换下不变；两个二次型可互相转化的充要条件是它们的正、负惯性指数相等。

实对称矩阵的正（负）惯性指数就等于正（负）特征值的个数。

三．正定二次型与正定矩阵

1．定义

一个二次型 $f(x_1, x_2, \Lambda, x_n)$ 称为正定二次型，如果当 x_1, Λ, x_n 不全为 0 时，$f(x_1, x_2, \Lambda, x_n) > 0$。

例如，标准二次型 $f(x_1, x_2, \Lambda, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \Lambda + d_nx_n^2$ 正定 $\Leftrightarrow d_i > 0$，$i = 1, \Lambda, n$

（必要性“$\Rightarrow$”，取 $x_1 = 1$，$x_2 = \Lambda = x_x = 0$，此时 $f(1, 0, \Lambda, 0) = d_1 > 0$ 同样可证每个 $d_i > 0$）

实对称矩阵正定即二次型 $x^T Ax$ 正定，也就是：当 $x \neq 0$ 时，$x^T Ax > 0$。

例如实对角矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ 正定

$\Leftrightarrow \lambda_i > 0$，$i = 1, \cdots, n$

2．性质与判别

可逆线性变换替换保持正定性。

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 变为 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，则它们同时正定或同时不正定。

$A \simeq B$，则 A，B 同时正定，同时不正定。

例如 $B = C^T AC$。如果 A 正定，则对每个 $x \neq 0$

$x^T Bx = x^T C^T ACx = (Cx)^T ACx > 0$

（C 可逆，$x \neq 0$，$\therefore Cx \neq 0$!）

我们给出关于正定的以下性质。

A 正定 $\Leftrightarrow A \simeq E$

$\Leftrightarrow$ 存在实可逆矩阵 C，$A = C^T C$。

$\Leftrightarrow$ A 的正惯性指数 $= n$。

$\Leftrightarrow$ A 的特征值全大于 0。

$\Leftrightarrow$ A 的每个顺序主子式全大于 0。

设 A 是一个 n 阶矩阵，记 A_r 是 A 的西北角的 r 阶小方阵，称 $|A_r|$ 为 A 的第 r 个顺序主子式（或 r 阶顺序主子式）。

判断 A 正定的三种方法：

①顺序主子式法。

②特征值法。

③定义法。

附录一　内积，正交矩阵，实对称矩阵的对角化

以下谈到的向量，矩阵都是在实数的范围中心，而向量的分量都是实数，矩阵的元素也都是实数。

一．向量的内积

1．定义

两个 n 维实向量 α, β 的内积是一个数，记作 (α, β)，规定为它们对应分量乘积之和。

设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$= \alpha^T \beta$$

2．性质

①对称性：$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

②双线性性质：$(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$

$$(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha, \beta_1) + (\alpha, \beta_2)$$

$$(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta) = (\alpha, c\beta)$$

③正交性：$(\alpha, \alpha) \geq 0$，且 $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

3．长度与正交

向量 α 的长度 $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$

$\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

$\|c\alpha\| = |c| \|\alpha\|$

单位向量：长度为 1 的向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

若 $\alpha \neq 0$，则 $\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 是单位向量，称为 α 的单位化。

$$\left\| \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \right\| = \frac{1}{\|\alpha\|} \|\alpha\| = 1$$

两个向量 α, β 如果内积为 0：$(\alpha, \beta) = 0$，称它们是

正交的。

如果n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$两两正交，并且每个都是单位向量，则称为单位正交向量组。

二．正交矩阵

一个实n阶矩阵A如果满足$AA^T=E$，就称为正交矩阵。

$A^T=A^{-1}$

定理　A是正交矩阵$\Leftrightarrow A$的行向量组是单位正交向量组。

$\Leftrightarrow A$的列向量组是单位正交向量组。

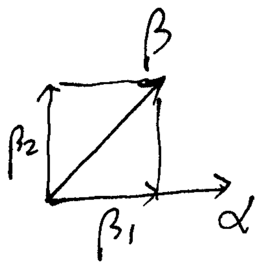
证：设$A=(\alpha_1,a_2,\Lambda\ ,\alpha_n)$，则

$$A^TA=\begin{pmatrix}\|\alpha_1\|^2 & (\alpha_1,\alpha_2) & \Lambda & (\alpha_1,\alpha_n)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & \|\alpha_2\|^2 & \Lambda & \Lambda\\ \mathrm{M} & & \mathrm{O} & \mathrm{M}\\ (\alpha_n,\alpha_1) & \Lambda & & \|\alpha_n\|^2\end{pmatrix}$$

于是$A^TA=E\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_n$是单位正交向量组。

三．施密特正交化方法

这是把一个线性无关的向量组改造为与之等价的单位正交向量组的方法。



$\beta_2=\beta-\beta_1=\beta-c\alpha$

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

①正交化：令$\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

（设$\beta_2=\alpha_2-k\beta_1$，$(\beta_2,\beta_1)=(\alpha_2,\beta_1)-k(\beta_1,\beta_1)$

当$k=\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}$时，$\beta_2,\beta_1$正交。）

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\beta_1,\alpha_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

②单位化：令$\eta_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$，$\eta_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$，$\eta_3=\dfrac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$

则η_1,η_2,η_3是与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$等价的单位正交向量组。

四．实对称矩阵的对角化

设A是一个实的对称矩阵，则

①A的每个特征值都是实数。

②对每个特征值λ，重数$=n-r(\lambda E-A)$。即A可以对角化。

③属于不同特征值的特征向量互相正交。

于是：存在正交矩阵Q，使得$Q^{-1}AQ$是对角矩阵。

对每个特征值λ，找$(\lambda E-A)x=0$的一个单位正交基础的解，合在一起构造正交矩阵。

附录二　向量空间

1．n维向量空间及其子空间

记为R^n由全部n维实向量构成的集合，这是一个规定了加法和数乘这两种线性运算的集合，我们把它称为n维向量空间。

设V是R^n的一个子集，如果它满足

（1）当α_1,α_2都属于V时，$\alpha_1+\alpha_2$也属于V。

（2)对V的每个元素α和任何实数c，$c\alpha$也在V中。

则称V为R^n的一个子空间。

例如n元齐次方程组$AX=0$的全部解构成R^n的一个子空间，称为$AX=0$的解空间。

但是非齐次方程组$AX=\beta$的全部解则不构成R^n的子空间。

对于R^n中的一组元素$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s$，记它们的全部线性组合的集合为

$L(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda\ ,\alpha_s)=\{c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\Lambda\ +c_s\alpha_s|c_i任意\}$，它

也是 R^n 的一个子空间。

2．基，维数，坐标

设 V 是 R^n 的一个非 0 子空间（即它含有非 0 元素），称 V 的秩为其维数，记作 $\dim V$ 。

称 V 的排了次序的极大无关组为 V 的基。

例如 $AX=0$ 的解空间的维数为 $n-r(A)$，它的每个有序的基础解系构成基。

又如 $\dim[L(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s)]=r(\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s)$，$\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_s$ 的每个有序的极大无关组构成基。

设 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 是 V 的一个基，则 V 的每个元素 α 都可以用 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 唯一线性表示：

$$\alpha=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\Lambda+c_k\eta_k$$

称其中的系数 (c_1,c_2,Λ,c_k) 为 α 关于基 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 的坐标，它是一个 k 维向量。

坐标有线性性质：

（1）两个向量和的坐标等于它们的坐标的和：

如果向量 α 和 β 关于基 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 的坐标分别为 (c_1,c_2,Λ,c_k) 和 (d_1,d_2,Λ,d_k)，则 $\alpha+\beta$ 关于基 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 的坐标为

$$(c_1+d_1,c_2+d_2,\Lambda,c_k+d_k)=(c_1,c_2,\Lambda,c_k)+(d_1,d_2,\Lambda,d_k)$$

（2）向量的数乘的坐标等于坐标乘数：

如果向量 α 关于基 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 的坐标为 (c_1,c_2,Λ,c_k)，则 $c\alpha$ 关于基 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 的坐标为 $(cc_1,cc_2,\Lambda,cc_k)=c(c_1,c_2,\Lambda,c_k)$。

坐标的意义：设 V 中的一个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_t$ 关于基 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 的坐标依次为 $\gamma_1,\gamma_2,\Lambda,\gamma_t$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_t$ 和 $\gamma_1,\gamma_2,\Lambda,\gamma_t$ 有相同的线性关系。

于是，我们可以用坐标来判断向量组的相关性，计算秩和极大无关组等等。

3．过渡矩阵，坐标变换公式

设 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 和 $\xi_1,\xi_2,\Lambda,\xi_k$ 都是 V 的一个基，并设 ξ_1 在 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 中的坐标为 $(c_{1i},c_{2i},\Lambda,c_{ki})$，构造矩阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \Lambda & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \Lambda & c_{2k} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ c_{k1} & c_{k2} & \Lambda & c_{kk} \end{pmatrix},$$

称 C 为 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 到 $\xi_1,\xi_2,\Lambda,\xi_k$ 的过渡矩阵。

$(\xi_1,\xi_2,\Lambda,\xi_k)=(\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k)C$。

如果 V 中向量 α 在其 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 和 $\xi_1,\xi_2,\Lambda,\xi_k$ 中的坐标分别为

$x=(x_1,x_2,\Lambda,x_k)^T$ 和 $y=(y_1,y_2,\Lambda,y_k)^T$，则

$$\alpha=(\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k)x$$

$$\alpha=(\xi_1,\xi_2,\Lambda,\xi_k)\ y=(\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k)Cy$$

于是关系式：

$$x=Cy$$

称为坐标变换公式。

4．规范正交基

如果 V 的一基 $\eta_1,\eta_2,\Lambda,\eta_k$ 是单位正交向量组，则称为规范正交基。

两个向量的内积等于在规范正交基下的它们坐标的内积。

设 α 的坐标为 (c_1,c_2,Λ,c_k)，β 的坐标为 (d_1,d_2,Λ,d_k)，

则 $(\alpha,\beta)=c_1d_1+c_2d_2+\Lambda+c_kd_k$

两个规范正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵。