哈工大网盘计划简介

1.项目初衷

鉴于（1）哈工大各类 QQ 群内学习资料多且繁杂，而文件文字太多会导致文件被 tx 屏蔽或者降低 QQ 群信用星级；（2）校内诚信复印和纸张记忆垄断；（3）很多营销号在卖资料且售价很高；（4）学长学姐的自编材料很好，还想分享给下一届；等问题，网盘计划应运而生！哈尔滨工业大学网盘计划**旨在将窝工的各类学习资料进行归类整理，并且以网盘的形式发出来**，历时一年，现已小成，扫描了上百份校内复印店试题文档，归类整理了近 40 个 G 的学习资料给大家，已经花费上千元，现入不敷出，如果您希望网盘计划继续运营下去的话，可通过以下方式进行捐赠。

QQ支付

推荐使用微信支付

2.网盘计划成就（密码 1920）

哈工大网盘计划

密码1920

微信公众号二维码

群名称:哈工大网盘计划（预）

群　号:953062322

腾讯自动屏蔽以上链接，请用浏览器扫一扫

第一章. n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$ 二阶行列式.

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

三阶行列式.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \neq 0$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

n阶行列式.

n元线性方程组的解为 $x_1 = \frac{D_1}{D}$ $x_2 = \frac{D_2}{D}$ …… $x_n = \frac{D_n}{D}$

全排列. 把n个不同的元素排成一列，叫做这个n个元素的全排列.
既不遗漏也不重复

逆序数. 排在p_t前面比p_t大的个数.

$$t(21543) = 0+1+0+1+2 = 4$$

$t(p_1p_2\cdots p_n)$ 为偶数 则为偶排列　奇数. 奇排列

某两个数位置对调 → 对换.　相邻的数 → 相邻对换.

对换改变全排列的奇偶性.

证明: $a_1a_2\cdots a_s\,ab\,b_1b_2\cdots b_t$ (I)

$a_1a_2\cdots a_s\,ba\,b_1b_2\cdots b_t$ (II)

(1) 若 $a>b$，a在(I)(II)中的逆序数相等　b在(I)(II)…… 差1

例1. 计算n阶行列式　　　　每一行(列)和相等　加到第一行(列)

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & x_4 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-m & x_4 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_n]{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3 \\ c_1+c_4 \\ \cdots}} (x_1+x_2+\cdots+x_n-m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_n+(-x_n)c_1]{\substack{c_2+(-x_2)c_1 \\ c_3+(-x_3)c_1 \\ \cdots}} (x_1+x_2+\cdots+x_n-m)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix} = (x_1+x_2+\cdots+x_n-m)\cdot(-m)^{n-1}$$

例2. 计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+(-\frac{1}{a_n})r_{n+1}]{\substack{r_1+(-\frac{1}{a_1})r_2 \\ r_1+(-\frac{1}{a_2})r_3 \\ \cdots}} \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & & & & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

爪形行列式

$$=\left(1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)a_1\cdot a_2\cdots a_n$$

例3. 计算 D_n

加编法

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & a_2 & \cdots & & a_n \\ 1 & a_1 & x_2 & \cdots & & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & & \cancel{x_n} \end{vmatrix}_{n+1}$$

(2) 若 $a<b$ ……

$a_1 a_2 \cdots a_s\ a\ b_1 b_2 \cdots b_t\ b\ c_1 c_2 \cdots a_m$ (Ⅲ)

$a_1 a_2 \cdots a_s\ b\ b_1 b_2 \cdots b_t\ a\ c_1 c_2 \cdots a_m$ (Ⅳ)

经过 $2t+1$ 次相邻对换.

n阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots \cancel{a_{2p_n}}\ a_{np_n}$$

$$= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

$n \quad n-1 \quad \cdots \quad 3 \quad 2 \quad 1$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n-1$

简记为 $\det(a_{ij})$

· 为 $n!$ 项代数和

下三角行列式. 上三角行列式 $D = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \cancel{\pm \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n}\ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n$$

行列式的性质.

1. 转置行列式.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质1. $D = D'$

证明: 记 $D = |a_{ij}|$ 令 $b_{ij} = a_{ji}$ $\quad i=1,2,\cdots n$, $j=1,2,\cdots n$

$$\bar{D} = |b_{ij}| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n}$$

No.

Date

例 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&1&2&\cdots&n-1\\1&x&1&\cdots&n-2\\1&x&x&\cdots&n-3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x&x&\cdots&1\end{vmatrix}\xrightarrow[\substack{\cdots\\ r_{n-1}+(-r_n)}]{\substack{r_1+(-r_2)\\ r_2+(-r_3)}}\begin{vmatrix}0&1&1&1&\cdots&1\\0&1-x&1&1&\cdots&1\\0&0&1-x&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x&x&x&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1-x&1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}_{n-1}\xrightarrow[r_2+(-r_3)]{r_1+(-r_2)}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}x&0&0&\cdots&0\\1-x&x&0&\cdots&0\\0&1-x&x&\cdots&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}x^{n-2}$$

No.

Date.

$$= \sum_{p_1\cdots p_n} (-1)^{t(p_1\cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = D.$$

性质2. 互换行列式两行(列)行列式变号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: $b_{pq} = \begin{cases} a_{pq} & 当 p \neq i, q \neq j \\ a_{jq} & 当 p = i \\ a_{iq} & 当 p = j \end{cases}$ $\begin{vmatrix} b_{1} & \cdots & b_{n} \\ \vdots & & \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \\ b_{j1} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_n} (-1)^{t(p_1\cdots p_n)} b_{1p_1}\cdots b_{np_n}$

$$= \sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n} (-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}$$

$$= -\sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n} (-1)^{t(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}$$

$$= -D.$$

推论1. 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式为零.

性质3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

例 $\begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & 20 & 30 \\ 5 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 5^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

性质4. $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

No.

Date.

例. 计算

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\2&3&-4&7\\-1&-2&5&-8\\1&3&-5&10\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+(-1)r_1]{r_3+r_1,\ r_2+(-2)r_1}\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&2&-1\\0&0&2&-4\\0&1&-2&6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_2}\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&2&-1\\0&0&2&-4\\0&0&0&5\end{vmatrix}=1\times(-1)\times2\times5=-10$$

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&&\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}\xlongequal[c_1+c_n]{c_1+c_2,\ c_1+c_3,\ \cdots}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&a&a&\cdots&a\\x+(n-1)a&x&a&\cdots&a\\x+(n-1)a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&&\\x+(n-1)a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\1&x&a&\cdots&a\\1&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\\1&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}\xlongequal[c_n+(-a)c_1]{c_2+(-a)c_1,\ c_3+(-a)c_1,\ \cdots}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&x-a&0&\cdots&0\\1&0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

性质5. 把行列式的某一行的倍数加到另一行，行列式不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论2 若行列式中有两行(列)元素成比例，则行列式等于0.

行 r_i 列 c_j

行列式展开定理.

一、余子式. 代数余子式

1. 余子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 元素2的余子式

2. 代数余子式 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

二、展开定理

引理：若n阶行列式D的第i行元素除了 a_{ij} 外都为0. 则 $D = a_{ij}A_{ij}$

定理，n阶行列式 $D = |a_{ij}|$ $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad i \neq j$$

Vandermonde. (范德蒙德)行列式

$$D(x_1, x_2, \cdots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 计算 $A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$M_{31} + M_{32} + M_{33} + M_{34} = A_{31} - A_{32} + A_{33} - A_{34}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ \cdots \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

按首行展开 $D_5 = 4D_4 - 3D_3 = \cdots$

$$\begin{vmatrix} a+1 & & & & a+2 \\ & a+5 & & a+6 & \\ & & a+9 & & \\ & a+7 & & a+8 & \\ a+3 & & & & a+4 \end{vmatrix} = (a+9)\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & & \\ a+3 & a+4 & & \\ & & a+8 & a+7 \\ & & a+6 & a+5 \end{vmatrix}$$

$$= (a+9)\begin{vmatrix} a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a+8 & a+7 \\ a+6 & a+5 \end{vmatrix}$$

$$= 4(a+9)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-r_2 \\ r_4-r_2 \\ r_n-r_2}]{r_1-r_2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

$a_{ij} + A_{ij} = 0 \quad A^* = -A^T \quad |A| = |A^T| = |-A^*| = (-1)^n |A|^{n-1}$

设 A, B 为三阶矩阵，且 $|A|=3$, $|B|=2$, $|A^{-1}+B|=2$, 则 $|A+B^{-1}| =$ (3)

$A(A^{-1}+B)B^{-1} = B^{-1} + A \qquad |A+B^{-1}| = |A|\,|A^{-1}+B|\,|B^{-1}|$

$= 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$

A 和 B 为 n 阶矩阵 $A^2 = A \quad B^2 = B \quad r(A+B-E) = n \quad r(B) = k$, 则

$r(AB) + r(A) =$ $2k$

$A(A+B-E) = AB$

$r(A) + n - n \le r(AB) \le r(A) \quad \therefore r(AB) = r(A)$

$(A+B-E)B = AB$ $\qquad = r(B) = k$

$k + n - n \le r(AB) \le r(B)$

No.

Date.

Cramer 法则

$x_1=\frac{D_1}{D}$ $x_2=\frac{D_2}{D}$ $\cdots$ $x_n=\frac{D_n}{D}$ $(D\neq 0)$

推论1. 无解或有无穷多解 则 $D=0$.

推论2. 齐次线性方程组. $\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$

若 $D\neq 0$. 则 (2)只有零解

推论3. 若(2)有非零解. 则 $D=0$

第二章 矩阵

矩阵的概念

一、数域 ①数集F中包括0和1, ②F中任意两数的和差.积.商仍在F中.

Q. R. C. 最小的. Q 有理数域.

二.矩阵的定义. 由数域 F上 $m\times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m行, n列的数表称为F上的 $m\times n$ 阶矩阵. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

实矩阵. 复矩阵.

三, 特殊矩阵

1.零矩阵. 2.行矩阵. 3.列矩阵.

4.方阵 $m=n$ 5. 三角矩阵 (上三角/下三角)

6.对角矩阵 → 7.标量矩阵 $\begin{pmatrix} k & & \\ & k & \\ & & k \end{pmatrix}$ → 8 单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ E_n/I_n

四. 同行矩阵 . 矩阵相等

1.同行矩阵. 行数列数 对应相同

2. 矩阵相等

$\begin{cases} \text{同行矩阵} \quad A=(a_{ij}) \quad B=(b_{ij}) \\ a_{ij}=b_{ij} \end{cases} \Rightarrow A=B$

No.

Date.

一、求 A^n

1. 数学归纳法

2、二项式公式　　$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=E+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=E+B$

3. $(UV^T)^n=\cdots$　　$R(A)\le 1 \iff$ 存在列矩阵 $U.V$ · $A=UV^T$

4. $(P\Lambda P^{-1})^n=$　　$A\to\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&&&\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}(1\ 0\cdots 0)$

$\Lambda=$ 对角矩阵

二、求 A^*　　$A=\underline{P\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}\underline{(1\ 0\cdots 0)\ Q}$

① 定义.　② $AA^*=A^*A=|A|E_n$

$$R(A^*)=\begin{cases}n & R(A)=n\\1 & R(A)=n-1\\0 & R(A)<n-1\end{cases}$$

矩阵的运算

1. $A, B \in M_{m\times n}(F)$ $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{m\times n}$ $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$
2. 减法 → 行数、列数相同
3. 数域矩阵相乘 $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$
4. 矩阵与矩阵相乘 $AB=C$ $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$

A的~~行数~~列数与B的行数相同 $A=(a_{ij})_{m\times p}$ $B=(b_{ij})_{p\times n}$ $(C_{ij})_{m\times n}$

① 一般来说 $AB\neq BA$ · AB、BA 不一定都有意义。
不满足交换律

② $AB=AC \not\Rightarrow B=C$

③ 存在矩阵 $A\neq 0$, $B\neq 0$, 使得 $AB=0$ $AB=0 \not\Rightarrow A=0$ 或 $B=0$

$(AB)C=A(BC)$. $A(B+C)=AB+AC$

$E_mA=AE_n=A$ $O_{p\times m}A=O_{p\times n}$ $AO_{n\times q}=O_{m\times q}$ $A=(a_{ij})_{m\times n}$

5. 方阵的乘幂 A是n阶方阵

$A^0=E_n$. $A^1=A$ $A^2=AA$.

$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E_n$

6. 方阵的行列式与行列式的乘法公式.

$\det A$ 或 $|A|$.

定理：A、B 是两个n阶方阵

① $|kA|=k^n|A|$ ② $|AB|=|A||B|$

7. 矩阵的转置 转置矩阵记为 A', A^T

① $(A')'=A$ ② $(A+B)'=A'+B'$

③ $(kA)'=kA'$ ④ $(AB)'=B'A'$ ⑤ $|A'|=|A|$.

8. 对称矩阵. $A'=A$. 称 ⇒ 对称矩阵 $(AB)'=B'A'=BA$

性质. 若A、B为n阶对称矩阵 则 (1) $A+B$ 对称. (2) AB 未必对称.

$A'=-A \Rightarrow$ 反对称矩阵. (主对角线上都为0)

性质 n为奇数时 $|A|=0$ $|A'|=|-A|$ $|A|=(-1)^n|A|=-|A|$.

9. 共轭矩阵.(复矩阵) $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})_{m\times n}$ $\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B}$

$\overline{kA}=\bar{k}\bar{A}$

共轭转置矩阵 $(\bar{A})' \Rightarrow A^H$ $\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$ $|\bar{A}|=\overline{|A|}$

No.

Date.

~~例~~. 有关伴随的证明:

(1) $A\cdot A^*=A^*\cdot A=|A|E_n$

$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}\Rightarrow A^*=\cancel{|A|\cdot|A^{-1}|}\ |A|A^{-1}$

(2) $A^{-1}\cdot(A^{-1})^*=(A^{-1})^*\cdot A^{-1}=|A^{-1}|E_n$ (同乘 A)

$(A^{-1})^*=A\cdot|A^{-1}|\Leftarrow|A\cdot A^{-1}|=|A|\cdot|A^{-1}|=1$

$=A\cdot\frac{1}{|A|}$

(3) $(-A)^*=|-A|(-A)^{-1}=(-1)^{n+1}|A|\cdot(A^{-1})=(-1)^{n+1}A^*$

(4) $|AA^*|=||A|E_n|$

$\Downarrow$

$|A||A^*|=|A|^n\quad|A^*|=|A|^{n-1}$

例 Crammor 法则 $AX=b$.

$|A|\neq0$. $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=X=A^{-1}b=\frac{1}{|A|}A^*b$

$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_n\end{pmatrix}$

$=$

证明: $A\cdot A^*=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A|&0&\cdots&0\\0&|A|&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&|A|\end{pmatrix}$

$a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{12}+\cdots+a_{n1}\cdot A_{1n}=|A|.$ $\quad=|A|\cdot E_n$

$[(A^{-1})^T]^{-1}=A^T\quad(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

可逆矩阵

一、定义与性质

1. 定义. 设A为n阶方阵，若存在n阶方阵B，使 $AB=BA=E_n$

则称A为可逆矩阵，B为A的逆矩阵

2. 性质.

(1) 若A可逆，则A的逆矩阵唯一. 记为 A^{-1}

(2) ——— 则 A^{-1} 也是可逆矩阵 $(A^{-1})^{-1}=A$

(3) ——— $k\neq0$ 则 kA 可逆 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

(4) 若A.B为n阶可逆矩阵 则AB可逆 $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

(5) 若A为可逆矩阵 m为非负整数 A^m 可逆 $(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$

定义. 设A为n阶可逆矩阵 规定 $A^{-m}=(A^{-1})^m$ m为非负整数.

(6) 若A可逆 $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

(7) ---- 则 $AB=AC\Rightarrow B=C$ $BA=CA\Rightarrow B=C$

(8) --- $AB=0\Rightarrow B=0$.

二、可逆矩阵的判定及逆矩阵的求法

A可逆 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq0$.

必要性 若A可逆 $|A||A^{-1}|=|AA^{-1}|=|E_n|=1\Rightarrow|A|\neq0$

1.定义 (伴随矩阵). 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式

称 $A^*=(A_{ji})_{n\times n}$

引理. 设A为n阶方阵 $A\cdot A^*=A^*\cdot A=|A|E_n=\begin{pmatrix}|A|&&&\\&|A|&&\\&&\ddots&\\&&&|A|\end{pmatrix}$

定理. 设A为n阶方阵，则 (1) A可逆 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq0$

~~必要~~充分性. 若 $|A|\neq0$ $\frac{A\cdot A^*}{|A|}=E_n$

(2) 若 ~~|A|~~ A可逆 则 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*$ (伴随)

推论. 若A为n阶可逆矩阵

$A^{-1}(A^{-1})^*=|A^{-1}|$

(1) $A^*=|A|A^{-1}$ (2) $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=(A^{-1})^*$ $(A^{-1})^*=A\cdot|A^{-1}|$

(3) $(-A)^*=(-1)^{n+1}A^*$ (4) $|A^*|=|A|^{n-1}$ $=\frac{A}{|A|}$

推论：设 A, B 为 n 阶方阵，若 $AB=E_n$，则 (1) A 可逆 (2) $B=A^{-1}$ (3) $BA=E_n$

矩阵的初等变换

一、概念

1. 初等行变换

(1) 换法变换：对调某两行所有元素 $r_i \leftrightarrow r_j$

(2) 倍法变换：以 $k \neq 0$ 乘以矩阵某一行的所有元素.

(3) 消法变换 以数 k 乘以某一行所有元素 加到另一行

2. 初等列变换.

(1) 换法变换 (2) 倍法变换. (3) 消法变换.

3. 初等变换. 初等行变换与初等列变换.

4. 性质

(1) 自反性： $A \xrightarrow{r_i + kr_j} B$ $B \xrightarrow{r_i - kr_j} A$ (不具备)

(2) 独立性：?

一次行换法变换 可由若干次消法变换 与倍法变换实现.

二、等价

1. 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与 B 等价

2. 性质. (1) 自反性 (2) 对称性 (3) 传递性

三、化简

1. 行阶梯形矩阵.

结论① 任一 $m \times n$ 矩阵 都可经过初等变换化成行阶梯形矩阵

2. 行最简形矩阵

(1) A 是行阶梯形矩阵. (2) A 的非零行的左起第一个非零元都是 1. 并且这些 1 分别是它们所在列的唯一非零元素

3. 标准形矩阵. 形如 $\begin{vmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

结论③ 任一矩阵 都可经过初等变换化成标准形矩阵

4. 唯一性.

(1) $A \xrightarrow{\text{初行}}$ 行阶梯形矩阵 不唯一

No.

Date.

例. $A=\begin{pmatrix}4&1&7&1\\4&5&6&1\\0&2&1&1\end{pmatrix}$ 求 $R(A)$

解: $A=\begin{pmatrix}4&1&7&1\\4&5&6&1\\0&2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-r_1)}\begin{pmatrix}4&1&7&1\\0&4&-1&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+(-\frac{1}{2}r_2)}\begin{pmatrix}4&1&7&1\\0&4&-1&0\\0&0&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$

$\therefore R(A)=3$

证: $A_{m\times n}\xrightarrow{\text{初等}}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}_{m\times n}$ 称 $\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}_{m\times n}$ 为A的等价标准形矩阵.

(1) $A_{m\times n}$ 行满秩 $\Leftrightarrow A\xrightarrow{\text{初等}}(E_m,0)$

(2) $A_{m\times n}$ 列满秩 $\Leftrightarrow A\xrightarrow{\text{初等}}\begin{pmatrix}E_n\\0\end{pmatrix}$

(3) $A_{n\times n}$ 满秩 $\Leftrightarrow A\xrightarrow{\text{初等}}E_n \Leftrightarrow R(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆

$r(AB)\le r(A)$ $r(AB)\le r(B)$

当 $r(A)=n$ 时 $r(AA^*)=r(|A|E)=n$ $r(A^*)=n$

当 $r(A)=n-1$ 时 $r(AA^*)=|A|=0$ $r(A)+r(B)\le n-r(AB)$

当 $r(A)<n-1$ 时 $r(A^*)=0$ $r(A^*)=1$

Date.

(2) $A \xrightarrow{初行}$ 行最简形 唯一的

(3) $A \xrightarrow{初等}$ 标准形 唯一的

矩阵的秩

一、定义

1. 子矩阵 划某些行或/和某些列.

2. 子方阵的行列式为 A为子式.

3. 零子式. 非零子式.

设A为一个 $m \times n$ 阶矩阵，称A的非零子式的最高阶数为A的~~阶~~秩.

补充：规定零矩阵的秩为0　　$R(A)$　秩(A)

说明：(1) 若A的所有 r 阶子式都为0. 则A的所有 k $(k \geq r)$ 阶子式都为0.

(2) $R(A) = r \iff$ A所有 $r+1$ 阶子式都为0.

A至少有一个 r 阶非零子式.

性质：设A为 $m \times n$ 阶矩阵. 则

(1) $0 \leq R(A) \leq \min\{m, n\}$.

(2) $R(A) = R(A^T)$

(3) 设 $k \neq 0$ 则 $R(kA) = R(A)$.

(4) 若 A_1 为A的子阵. 则 $R(A_1) \leq R(A)$.

定理：初等变换不改变矩阵的秩.

$A \xrightarrow{初等} B$　　$R(A) = R(B)$

求法　$A \xrightarrow{初行}$ 行阶梯形矩阵B

则 $R(A) = B$ 非零行的个数

特殊矩阵.

设A为 $m \times n$ 阶矩阵. (1) 若 $R(A) = m \rightarrow$ 行满秩矩阵

(2) $R(A) = n \rightarrow$ 列满秩矩阵　　(3) $R(A) = m = n \rightarrow$ 满秩矩阵.

初等矩阵

一、概念

1. 定义：由E_n经一次变换得到的矩阵，称为初等矩阵。

2. $E_n \xrightarrow{一次初行}$

(1) $E_n = \begin{array}{c} i\leftarrow \\ j\leftarrow \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots 1 & & \\ & & 1 \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \begin{pmatrix} 1 \ddots & & & \\ & 0 & \cdots 1 & \\ & \vdots 1 & \cdots 0 & \\ & & & \ddots 1 \end{pmatrix} = E(i,j)$

(2) $E_n = \begin{array}{c} i\leftarrow \\ j\leftarrow \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots 1 & & \\ & & 1 \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(k\neq 0)]{k\times r_i} \begin{pmatrix} 1 \ddots & & & \\ & k & & \\ & & 1 \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = E(i(k))$

(3) $E_n = \begin{array}{c} i\leftarrow \\ j\leftarrow \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots 1 & & \\ & & 1 \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i + k r_j} \begin{pmatrix} 1 \cdots & & & \\ & 1 & \cdots k & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots 1 \end{pmatrix} = E(i,j(k))$

3. $E_n \xrightarrow{一次初列}$

(1) $E_n = \begin{array}{c} i\leftarrow \\ j\leftarrow \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots 1 & & \\ & & 1 \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} \begin{pmatrix} 1 \ddots & & & \\ & 0 & \cdots 1 & \\ & \vdots 1 & \cdots 0 & \\ & & & \ddots 1 \end{pmatrix} = E(i,j)$

(2) $E_n = \begin{array}{c} i\leftarrow \\ j\leftarrow \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots 1 & & \\ & & 1 \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{k\times c_i} \begin{pmatrix} 1 \ddots & & & \\ & k & & \\ & & 1 \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = E(i(k))$

(3) $E_n = \begin{array}{c} i\leftarrow \\ j\leftarrow \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots 1 & & \\ & & 1 \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_i + k c_j} \begin{pmatrix} 1 \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & \vdots k & 1 \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = E(j,i(k))$

初等矩阵 $E(i,j)$　$E(i(k))$　$E(i,j(k))$

二、性质

1. 可逆性：初等矩阵都是可逆矩阵　$E(i,j)^{-1} = E(i,j)$

$E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$　$E(i,j(k))^{-1} = E(i,j(-k))$

2. 转置　$E(i,j)' = E(i,j)$　$E(i(k)) = E(i(k))$

$E(i,j(k))' = E(j,i(k))$

3. 初等矩阵与一次初等变换的关系

① $A \xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j} B \Leftrightarrow E(i,j)A = B$　　$E_n \xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j} E(i,j)$

② $A \xrightarrow[(k\neq 0)]{k\times r_i} B \Leftrightarrow E(i(k))A = B$　　$E_n \xrightarrow{k\cdot r_i} E(i(k))$

③ $A \xrightarrow{r_i+kr_j} B \Leftrightarrow E(r_i+kr_j)A = B$　　$E_n \xrightarrow{r_i+kr_j} E(i,j(k))$

No.

Data.

证：$\Leftarrow$ $|A| \neq 0$.

$\Rightarrow$ 若 A 可逆 $A \xrightarrow{\text{初等}} E_n$ $E_n \xrightarrow{\text{初等}} A$

$T_s \cdots T_1 E_n Q_1 \cdots Q_t = A \Rightarrow = T_s \cdots T_1 Q \cdots Q_t$.

总论

三、

定

推

推

推

四

例

No.
Date.

总论：对于A做一次初等行变换，其结果等于A左边乘以一个相应的初等矩阵

初等列变换 . . . . . 右边 . . . . . .

三、矩阵等价的充要条件

$A \xrightarrow{\text{初等}} B$ $\quad P_s \cdots P_2 P_1 A Q \cdots Q_t = B$

定理：A可逆 $\Leftrightarrow$ 存在初等矩阵 $P_1 \cdots P_m$ 使得 $A = P_1 P_2 \cdots P_m$

推论1：$A_{m\times n}$ 与 $B_{m\times n}$ 等价 $\Leftrightarrow$ 存在 m阶可逆矩阵 P 与 n阶可逆矩阵 Q

使得 $PAQ = B$

推论 (1) $A_{m\times n} \xrightarrow{\text{初行}} B_{m\times n} \Leftrightarrow$ 存在 m阶可逆矩阵 P 使 $PA = B$

(2) $A_{m\times n} \xrightarrow{\text{初列}} B_{m\times n} \Leftrightarrow$ . . . n . . . . . . Q . . $AQ = B$

(3) 对任意一 m×n 阶矩阵 A，存在可逆矩阵 P 与 Q 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

推论. 设A为 m×n 阶矩阵，P为m阶可逆矩阵， | 其中 $r = R(A)$.

Q为n阶可逆矩阵. $R(A) = R(PA) = R(AQ) = R(PAQ)$

四、利用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

推论. A_n 可逆 $\Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{初行}} E_n \Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{初列}} E_n$

$P_s \cdots P_1 A = E_n \Rightarrow P_s \cdots P_1 E_n = A^{-1}$

$(A \cdot E_n) \xrightarrow{\text{初行}} (E_n \cdot A^{-1})$ $\quad \begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初列}} \begin{pmatrix} E_n \\ A^{-1} \end{pmatrix}$

例 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad (A \cdot E_2) = \left(\begin{array}{cc:cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdots \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$

$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$(A \vdots B) \xrightarrow{\text{初行}} (E_n \cdot A^{-1}B)$ $\quad$ 有 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初列}} \begin{pmatrix} E_n \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$.

No.
Date. . .

分块矩阵

一、概念 子块、分块矩阵.

二、常用的分块矩阵.

1. 分块上三角矩阵　　2. 分块下三角矩阵

3. 分块对角矩阵 → 4 准对角矩阵.

三 分块矩阵的运算.

1. 加法. $A=(a_{ij})_{m\times n}$　$B=(b_{ij})_{m\times n}$　$A=(A_{ij})_{s\times t}$　$B=(B_{ij})_{s\times t}$

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(A_{ij}+B_{ij})_{s\times t}$　A,B 行与列分法完全相同.

2、数乘 $kA=(kA_{ij})_{s\times t}$.　$k\in F$

3. 乘法 $A=(a_{ij})_{m\times n}$　$B=(b_{ij})_{n\times p}$　$AB=(c_{ij})_{m\times p}$

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}_{s\times t} \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}_{t\times r}$$

$AB=(C_{ij})$　$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{it}B_{tj}$

$\begin{cases} A_{i1}\text{列}=B_{1j}\text{行} \\ A_{i2}\text{列}=B_{2j}\text{行} \\ \vdots \\ A_{it}\text{列}=B_{tj}\text{行} \end{cases}$ ⟹ A列的分法与B行的分法完全相同.

4. 幂运算.

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$ $A_1A_2\cdots A_s$ 都为方阵 $$A^m=\begin{pmatrix} A_1^m & & & \\ & A_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^m \end{pmatrix}$$

5、转置

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \quad A'=\begin{pmatrix} A_{11}' & A_{21}' & \cdots & A_{s1}' \\ A_{12}' & A_{22}' & \cdots & A_{s2}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1t}' & A_{2t}' & \cdots & A_{st}' \end{pmatrix}$$

四. 分块矩阵形式下的行列式与逆

1. 行列式

$$A=\left(\begin{array}{c|cccc} & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \\ \hline a_1 & & & & \end{array}\right) \qquad A^{-1}=\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & a_1^{-1} \\ \hline a_2^{-1} & & & & \\ & a_3^{-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_n^{-1} & \end{array}\right)$$

No.

Date.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}||A_{33}|\cdots|A_{ss}|$$

2、逆 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & A_3^{-1} \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} & & A_1 \\ & A_2 & \\ A_s & & \end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} & & A_s^{-1} \\ & A_2^{-1} & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}$

分块矩阵的初等变换

一、初等变换

1.初等行变换

(1) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{P(r_1)} \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}$ 可逆矩阵P.

(3) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+K(r_1)} \begin{pmatrix} A & B \\ C+KA & D+KB \end{pmatrix}$ 矩阵K.

2.初等列变换

Q是可逆矩阵

(1) (2) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{(c_2)Q} \begin{pmatrix} A & BQ \\ C & DQ \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+(c_2)K} \begin{pmatrix} A+BK & B \\ C+DK & D \end{pmatrix}$

二、分块初等矩阵. $E_{m+n}=\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$

1.定义：对分块单位矩阵做一次分块初等变换，得到的矩阵称为分块初等矩阵

2. $\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & E_m \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ k & E_n \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} E_m & k \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$

三、利用分块初等矩阵建立一次分块初等变换前后矩阵的等式关系

$$\begin{pmatrix} 0 & E_t \\ E_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{m\times n} & B \\ C & D_{t\times s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$$

No.

Date

设A、B为n阶方阵，则 $|AB|=|A||B|$

证明 $|AB|=\begin{vmatrix} AB & 0 \\ B & E_n \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1+(-A)r_2} \begin{vmatrix} 0 & -A \\ B & E_n \end{vmatrix} = (-1)^{n^2}\begin{vmatrix} B & E_n \\ 0 & -A \end{vmatrix}$

$=(-1)^{n^2}\cdot|B||-A| = (-1)^{n^2+n}|B||A| = |B||A|$

设 A是m×n矩阵 B是n×m矩阵 则 $|E_m-AB|=|E_n-BA|$

证明：$|E_m-AB| = \begin{vmatrix} E_m-AB & 0 \\ B & E_n \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1+Ar_2} \begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2-Br_1} \begin{vmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n-BA \end{vmatrix}$

$=|E_n-BA|$

例3. 设A是m阶可逆矩阵，B是n阶可逆矩阵 C是m×n矩阵

求 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}$ 解. $\left(\begin{array}{cc:cc} A & C & E_m & 0 \\ 0 & B & 0 & E_n \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+(-CB^{-1})r_2} \left(\begin{array}{cc:cc} A & 0 & E_m & -CB^{-1} \\ 0 & B & 0 & E_n \end{array}\right)$

$\xrightarrow{A^{-1}r_1} \left(\begin{array}{cc:cc} E_m & 0 & A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B & 0 & E_n \end{array}\right) \xrightarrow{B^{-1}r_2} \left(\begin{array}{cc:cc} E_m & 0 & A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & E_n & 0 & B^{-1} \end{array}\right)$

$\therefore \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

(1) 试证明: (2) 类似.

证明 设 $R(A)=r_1$ $R(B)=r_2$ 存在可逆矩阵 $P_1\ Q_1$, $P_2\ Q_2$ 使得

$P_1AQ_1=\begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P_2BQ_2=\begin{pmatrix} E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1AQ_1 & 0 \\ 0 & P_2BQ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) 证明 $R(A)+R(B)=R\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq R(A+B)$

(3) $R(A)=R(A\ 0)=R(A\ AB)$ $R(B)=R\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} B \\ AB \end{pmatrix}$

$R(A)+R(B) \leq R(AB)+n = R\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} AB & A \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & E_n \end{pmatrix}$

$=R\begin{pmatrix} -B & E_n \\ 0 & A \end{pmatrix} \geq R(-B)+R(A) = R(B)+R(A)$.

No.

Date.

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ K_{t\times m} & E_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C+KA & D+KB \end{pmatrix}$$

一次分块倍法变换=若干次 ~~初通常意义下初等行变换~~ 通常意义下初等行变换　一次分块消 = 若干次通常消

四.分块阵初等变换的应用.

1.行列式.

设 A 是 $m\times n$ 矩阵　B 是 $t\times n$ 矩阵　且 $m+t=n$

$$\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} = (-1)^{mt}\begin{vmatrix} B \\ A \end{vmatrix}$$

分块阵行、列的消法变换 不改变行列式值

设 ~~$|AB|$~~

2、逆.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A_{m\times m} & B & E_m & 0 \\ C & D_{n\times n} & 0 & E_n \end{array}\right) \xrightarrow{\text{分块初行}} \left(\begin{array}{cc|cc} E_m & 0 & A_1 & B_1 \\ 0 & E_n & C_1 & D_1 \end{array}\right)$$

3、秩

设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵

(1) $0\le R(A)\le \min\{m,n\}$　(2) $R(A)=R(A')$

(3) $R(kA)=\begin{cases} R(A) & k\ne 0 \\ 0 & k=0 \end{cases}$　(4) 若 A_1 是 A 的子阵, 则 $R(A_1)\le R(A)$

(5) 初等变换不改变矩阵的秩

(6) 设 P 是 m 阶可逆矩阵　Q 是 n 阶可逆矩阵. 则 $R(A)=R(PA)=R(AQ)=R(PAQ)$

(7) 若 $R(A)=r$　则存在 m 阶可逆矩阵 P. n 阶可逆矩阵 Q. 使得 $PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(8) 分块阵初等变换不改变矩阵秩　(9) $R\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = R(A)+R(B)$

(10) $R\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \ge R(A)+R(B)$　(11) $R(A+B)\le R(A)+R(B)$

(12) $R(A\,|\,B)\le R(A)+R(B)$

(13) 设 B 是 $n\times p$ 阶矩阵　$R(A)+R(B)-n \le R(AB) \le \min\{R(A)\ R(B)\}$

设 $m>n$. A 是 $m\times n$ 矩阵 B 是 $n\times m$ 矩阵　则 $|\lambda E_m-AB| = \lambda^{m-n}|\lambda E_n-BA|$

证明: 若 $\lambda=0$　$|-AB|=(-1)^m|AB|$　$R(AB)\le R(A)\le n<m$　$\therefore |AB|=0$.

若 $\lambda\ne 0$　$|\lambda E_m-AB| = \lambda^m|E_m-\frac{AB}{\lambda}| = \lambda^m|E_n-B\cdot\frac{A}{\lambda}| = \lambda^{m-n}|\lambda E_n-BA|$

No.

Date.

已知 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$ 求 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

解: $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})](\vec{c}+\vec{a})$

$=(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}+\vec{a})$

$=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]+\cancel{\vec{a}+\vec{b}}\cdot[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{a}]+[\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{c}]+[\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{a}]+[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{c}]+[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}]$

$=2+2=4$

Date.

几何向量

数量积： $\vec a\cdot\vec b = |\vec a|\cdot|\vec b|\cos<\vec a,\vec b>$.

几何应用 ① $|\vec a| = \sqrt{\vec a\cdot\vec a}$. ② $\cos<a,b> = \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}$

③ 判定垂直 $\vec a\cdot\vec b=0 \Leftrightarrow \vec a\perp\vec b$

④ 求投影. $Prj_{\vec b}\vec a = \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec b|}$ $Prj_{\vec a}\vec b = \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|}$

向量积.

[右手系]. $\vec a,\vec b,\vec c$ 构成右手系 $\vec a\to\vec b$ $\vec c\uparrow$

定义: $\vec a$与$\vec b$的向量积$\vec a\times\vec b$满足下列条件:

① $|\vec a\times\vec b| = |\vec a|\times|\vec b|\sin\theta$, $\theta=<\vec a,\vec b>$.

② $\vec a\times\vec b\perp\vec a$. $\vec a\times\vec b\perp\vec b$

③ $\vec a,\vec b,\vec a\times\vec b$ 构成右手系

性质 ① $\vec a\times\vec b = -\vec b\times\vec a$

② $(\lambda\vec a)\times\vec b = \lambda(\vec a\times\vec b) = \cancel{\lambda}\ \vec a\times(\lambda\vec b)$

③ $\vec a\times(\vec b+\vec c) = \vec a\times\vec b+\vec a\times\vec c$

$\vec a\times\vec b = \vec a\times\vec c$, $\vec a\neq\vec 0$ $\nRightarrow$ $\vec b=\vec c$

④ $\vec a\times\vec a=\vec 0$

⑤ $\vec a\parallel\vec b \Leftrightarrow \vec a\times\vec b=\vec 0$

几何应用 ① $|\vec a\times\vec b|$ = 以$\vec a,\vec b$为邻边的▱的面积.

② 以$\vec a,\vec b$为邻边的▱的高 $h=|\vec b|\sin<\vec a,\vec b> = \frac{|\vec a\times\vec b|}{|\vec a|}$

③ 判断平行. $\vec a\times\vec b=\vec 0$.

混合积. ~~$[a,b$~~ $[\vec a\vec b\vec c] = (\vec a\times\vec b)\cdot\vec c = |\vec a\times\vec b||\vec c|\cos<\vec a\times\vec b,\vec c>$.

几何意义. $|[\vec a\vec b\vec c]|$ 等于以$\vec a,\vec b,\vec c$为棱的平行六面体的体积

符合右手系 $[\vec a\vec b\vec c]=V$.

性质. ① $[\vec a\vec b\vec c]=[\vec b\vec c\vec a]=[\vec c\vec a\vec b]$. (右手系)

② $[\vec a\vec b\vec c]=(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)$

~~③ $[\vec a\vec b\vec c]=\vec 0\Rightarrow\vec a,\vec b,\vec c$ 共面~~

③ $[\vec a\vec b\vec c]=-[\vec b\vec a\vec c]=-[\vec c\vec b\vec a]=-[\vec a\vec c\vec b]$

④ $[\vec a\vec a\vec b]=[\vec a\vec b\vec a]=0$

Date.

几何应用 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}.\vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{c}$

$\Leftrightarrow$ 存在不全为0的 k,l,m 使 $k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}=\vec{0}$

几何向量的的坐标运算 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$ $\vec{c}=(c_x, c_y, c_z)$

$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$ $k\vec{a}=(ka_x, ka_y, ka_z)$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_cb_c$.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ a_x & b_y\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}.$$

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

方向角. $\langle\vec{a},\vec{i}\rangle=\alpha$ $\langle\vec{a},\vec{j}\rangle=\beta$ $\langle\vec{a},\vec{k}\rangle=\gamma$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

单位向量 $a^\circ=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

位置关系 $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ $\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$

$\vec{a}.\vec{b}.\vec{c}$ 共面. $\Leftrightarrow [\vec{a}.\vec{b}.\vec{c}]=0$

平面的点法式方程 法向量 $\vec{n}=(A, B, C)$ $M_0(x_0, y_0, z_0)\in\pi$.

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow M(x,y,z)\in\pi$

一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$.

三点式方程
$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

截距式方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

直线的点向式方程 (标准方程). $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$

参数方程. $x=x_0+lt$ $y=y_0+mt$ $z=z_0+nt$

两点式方程 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

一般式方程 (交面式)

No.

Date.

设直线 L_1: $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$，$L_2$: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}$，求 L_1 与 L_2 公垂线的方程

解. 设平面 π_1，L，L_1 在 π_1 上　平面 π_2，L，L_2 在 π_2 上

$L_1 \begin{cases} x-2y-3=0 \\ z=1 \end{cases}$　设 π_1 的方程为 $x-2y-3+\lambda_1(z-1)=0$

$\vec{n}_1=(1,-2,\lambda_1)$　$\vec{s}_1=(2,1,0)$　$\vec{s}_2=(1,0,1)$

$\vec{n}_1\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)=0$　$\lambda_1 =$ ~~$x+1-z+\lambda_2(y-2)$~~.

设 π_2 方程　$x+1-z+\lambda_2(y-2)=0$

$\begin{cases} x+1-z=0 \\ y-2=0 \end{cases}$　$\vec{n}_2=(1,\lambda_2,-1)$　$\vec{n}_2\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)=0$

$\lambda_2 =$.

两平面位置关系 (1) 重合 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$

(2) 平行不重合 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$

(3) 交于一条直线. 夹角: $\theta=\arccos\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$.

两直线位置关系 (1) 垂直 $L_1\perp L_2$ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$

(2) 平行 $\vec{n}_1 /\!/ \vec{n}_2$. $M_1\notin L_2$.

(3) 共面 $[\vec{n}_1\ \vec{n}_2\ \overrightarrow{M_1M_2}]=0$

(4) 异面 $[\vec{n}_1\ \vec{n}_2\ \overrightarrow{M_1M_2}]\neq 0$.

两直线夹角 $\theta=\arccos\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}$

直线与平面的位置关系 (1) 平行 $\vec{s}_1\perp\vec{n}$ $M_0\notin\pi$

(3) 相交 $\vec{s}\cdot\vec{n}\neq 0$ (2) 在平面上 $\vec{s}\perp\vec{n}$ $M_0\in\pi$. ~~(3) ⊥ $\vec{s} /\!/ \vec{n}$~~

夹角 $\varphi=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}$

距离 $h=\frac{|\vec{s}\times\overrightarrow{MM_0}|}{|\vec{s}|}$ (点到线).

$d=\frac{|\overrightarrow{PP_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{|\vec{n}|}$ (点到面).

$d=|(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)^\circ\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|$ (异面直线).

平面束 $\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

λ_1, λ_2 不全为0. 表示过直线 $L\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

的所有平面

No.

Date

若$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，$\beta_1=\alpha_1$ $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$ $\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

判定$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的线性相关/无关性

解：设$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0$

$(k_1+k_2)\alpha_1+\cancel{k_1}(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3$

$\because \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关 $\therefore k_1+k_2=0$ $k_2+k_3=0$ $k_3=0$

$k_1+k_2+k_3=0$ $\therefore \beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关

No.

Date.

n维向量

一、概念 1、由数域F上的n个数 $a_1, a_2 \cdots a_n$ 排成的有序数组 α，叫做数域F上的n维向量。a_i 为 α 的第i维分量

2、若 $\alpha=(a_1, a_2 \cdots a_n)\in F^n$ $\beta=(b_1, b_2 \cdots b_n)\in F^n$

$\alpha=\beta$ 指 $a_i=b_i$

3. 零向量 所有分量都为0

二、线性运算

1. 加法/减 $\alpha\pm\beta=(a_1\pm b_1, a_2\pm b_2 \cdots a_n\pm b_n)$

2、数乘运算. $k\in F$. $k\alpha=(ka_1, ka_2 \cdots ka_n)$

3. 性质 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ $k(l\alpha)=(kl)\alpha$. $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

向量组的线性相关与线性无关

一、预备 1. 向量组 $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 为一个向量组

2、称 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m$ 为 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 的线性组合

$k_1, k_2 \cdots k_m$ 为线性组合系数

3. 线性表示 存在 $k_1, k_2 \cdots k_m$ 使 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m$.

称 α 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性表示 线性表示系数.

二、存在一组不全为0的数 $k_1, k_2 \cdots k_m$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 线性相关. 反之,则称线性无关

三、若设. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m \in F^n$.

1. $m=1$. α_1 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha_1=0$ α_1 线性无关 $\Leftrightarrow \alpha_1\neq 0$

2. $m\geq 2$ $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

3. $m=2$. $\alpha_1\ \alpha_2$ 线性相关 $\alpha_1=\lambda\alpha_2$ 或 $\alpha_2=\lambda\alpha_1$

4. $n=3$ $F=R$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R^3$

α_1, α_2 线性相关 $\Leftrightarrow$ 共线

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共~~线~~面.

⇐ 设 $R(A) = r < m$

1° 若 $m=1$. $A=0$, α_1线性相关

2° 若 $m \geq 2$. ∃可逆矩阵 $P;Q$, 使得. $P_n A Q_m = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times m}$

$PAQ\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{m\times1} = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{n\times1}$ 相乘 $\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}_{n\times1}$.

设 $Q\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q_{1m}\\q_{2m}\\\vdots\\q_{nm}\end{pmatrix}$

$(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_m)\, Q\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = 0$

$\alpha_1 q_{1m} + \alpha_2 q_{2m} + \cdots + \alpha_m q_{nm} = 0$

∵ $q_{1m}\ q_{2m} \cdots q_{nm}$ 不全为0

∴ $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性相关

No.

Date.

四、矩阵判定法

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m \in F^n$ 列向量组 称 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots \alpha_m)$ 为 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 对应的矩阵

若 $A=(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ 称 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 为A的列向量组

2. 若 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m \in F^n$ 行向量 $B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots \\ \beta_m\end{pmatrix}$.

定理：设 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m \in F^n$ 列向量

记 $A=(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m)$. $R(A)<m \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 线性相关.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow R(A)=m$.

推论. 设A为 $n\times m$ 矩阵. A列满秩 $\Leftrightarrow$ A的列向量组线性无关

A行满秩 $\Leftrightarrow$ A 行— — — — —

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots \\ a_{r1}\end{pmatrix}\ \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots \\ a_{r2}\end{pmatrix} \cdots\ \alpha_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\ a_{2m}\\ \vdots \\ a_{rm}\end{pmatrix}$$

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots \\ a_{r1}\\ a_{r+1\,1}\\ a_{r+2\,1}\end{pmatrix}\ \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\ \vdots \\ a_{r2}\\ a_{r+1\,2}\\ a_{r+2\,2}\end{pmatrix} \cdots\ \alpha_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\ \vdots \\ a_{rm}\\ a_{r+1\,m}\\ a_{r+2\,m}\end{pmatrix}$$

(1) $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性无关 $\Rightarrow \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$ 线性无关

(2) $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m$ 线性相关 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性相关

$n+1$ 个 n 维向量 必线性相关

$m>n$ 个 n 维向量必线性相关.

向量组的秩.

线性相关,

一. ~~线k~~ 向量组间的线性表示与等价

设向量组 (I) $\alpha_1\ \ \alpha_2\ \cdots \alpha_s \in F^n$

(II) $\beta_1\ \ \beta_2 \cdots \beta_t \in F^n$

1. 若向量组(I)任何向量都可由向量组(II)线性表示 则称向量组(I)可由向量组(II)线性表示

$\alpha_1 = k_{11}\beta_1 + k_{21}\beta_2 + \cdots + k_{t1}\beta_t$

$\cdots$

$\alpha_s = k_{1s}\beta_1 + k_{2s}\beta_2 + \cdots + k_{ts}\beta_t$

$A=(\alpha_1\ \ \alpha_2 \cdots \alpha_s)$

$B=(\beta_1\ \ \beta_2 \cdots \beta_t)$

$K=\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{t1} & k_{t2} & \cdots & k_{ts}\end{pmatrix}$

$A=BK$.

定理2. 证

证明: (列向量组) 记 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ $B=(\beta_1, \cdots \beta_t)$

存在矩阵 k, 使得 $A=Bk$.

$$s = R(A) = R(Bk) \le R(k) \le t$$

No.
Date

行向量组　　$A=kB$

2. 若向量组(I)与(II)可以互相线性表示，则称向量组(I)与(II)等价.
　　自反性，对称性，传递性

二、极大无关组.

1. 定义：　设S是一个向量组，$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$ 是S中的向量
　若(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$ 线性无关　(2) 任意 $\alpha \in S$，$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$ α 线性相关
　则称 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$ 为向量组S的一个极大无关组

2. ~~性质~~ 结论　若 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性无关，则 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 为其自身的极大无关组
~~则 $\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_m$ 为其自身的极大无关组~~

2. ~~定理~~ 性质
　定理1. 设 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 为一个n维向量组，α 也为一个n维向量
　若(1) $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 线性无关.　(2) $\alpha_1, \alpha_2 \cdot \alpha_s$ α 线性相关
　则 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 线性表示，且表法唯一.

性质1：向量组与其极大无关组等价.
性质2：向量组任两个极大无关组等价.
定理2. 设向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 与 $\beta_1 \cdots \beta_t$
　　若(1) $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 可由 $\beta_1 \cdots \beta_t$ 线性~~相关~~表示
　　　(2) $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s$ 线性无关.
　　则 $s \le t$

性质3. 向量组所有极大无关组包含向量个数相同.

三、向量组的秩.

1. 定义. 称向量组极大无关组中包含向量个数向量组的秩.
　　规定只含零向量的向量组的秩为0.　$R(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s)$　$R(\mathrm{I})$

2. 性质.
　(1) 设向量组 $\alpha_1, \cdots \alpha_s$ 与 $\beta_1, \cdots \beta_t$　若 $\alpha_1, \cdots \alpha_s$ 可由 $\beta_1 \cdots \beta_t$ 线性表示
则秩$(\alpha_1 \cdots \alpha_s) \le$ 秩$(\beta_1 \cdots \beta_t)$
　(2) 等价向量组的秩相等

定理.

证明：设 $R(A)=r$

(1) 若 $r=0$

(2) 若 $r>0$ 由 $R(A)=r$ 知 A 中有一个 r 阶非零子式，记为 D_r，记 D_r 取自 A 的第 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 列，$A_r=(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_r})$

要证明 $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_r}$ 是 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 的一个极大无关组。

(1) $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_r}$ 线性无关

(2) 任取 $\alpha_i \in \alpha_1, \dots, \alpha_m$

(2.1) 若 i 为 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 中的某一个则。 ✓

(2.2)

推论 (2) 证

证明：设 $k_{i1}\beta_{i1}+k_{i2}\beta_{i2}+\dots+k_{ir}\beta_{ir}=0$

$PA=B$ $\qquad \beta_i=P\alpha_i$

$k_{i1}P\alpha_{i1}+k_{i2}P\alpha_{i2}+\dots+k_{ir}P\alpha_{ir}=0$

$k_{i1}\alpha_{i1}+k_{i2}\alpha_{i2}+\dots+k_{ir}\alpha_{ir}=0$

No

Date

四、向量组极大无关组与秩的求法.

1、定理. 设 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 为 n 维列向量 记 $A=(\alpha_1 ,\alpha_2 \cdots \alpha_m)$ 则

秩 $(\alpha_1 \cdots \alpha_m)$ = 秩 (A)

结论: 若 $R(A)=r$. 则 A 的 r 阶非零子式所在的列(行)构成的向量组为 A 的列(行)向量组的一个极大无关组

推论: 设列向量 $\alpha_1 \cdots \alpha_s \in F^n$ 与 $\beta_1 \cdots \beta_s \in F^n$

记 $A=(\alpha_1 \cdots \alpha_s)$ $B(\beta_1 \cdots \beta_s)$ 若 $A \xrightarrow{\text{初行}} B$

则 (1) ~~秩~~ $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 与 $\beta_1 \cdots \beta_s$ 秩相同

(2) 极大无关组位置相同

(3) 若 $\beta_j = \sum_{i\neq j} k_i \beta_i$ 则 $\alpha_j = \sum_{i\neq j} k_i \alpha_i$.

(对应线性表示关系相同)

向量空间

一、F. F^n

1. 定义. 设 V 是 F^n 中一个非空子集. 若 V 中元素满足

(1) 任意 $\alpha, \beta \in V$, 有 $\alpha+\beta \in V$.

(2) 任意 $\alpha \in V$, $k \in F$, $k\alpha \in V$.

则称 V 是一个向量空间

设 α, β 数域 F 上两个已知的 n 维向量 集合 $V=\{\gamma \mid \gamma = k\alpha + l\beta.\ k, l \in F\}$ 是一个向量空间. 称为向量 α, β 张成的向量空间

2、子空间. 设 V_1 与 V_2 都是同一数域 F 上的向量空间. 若 $V_1 \subseteq V_2$, 则称 V_1 是 V_2 的子空间。

二、基 维数. 坐标

1. 设 V 是一个向量空间, (1) $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$ 是 V 中一个有序向量组

若 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$ 线性无关 (2) 任意 $\alpha \in V$, 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线性表示.

则称 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 是 V 的一组基. 称 r 为 V 的维数. 记为 $r=\dim(V)$

向量组 S	向量空间
极大无关组 $(\alpha_1 \cdots \alpha_r)$	基
秩	维数

No.

Date.

例1 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$

(1)验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一组基

(2) 求 β 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标

解:(1) ~~R(A)~~ $|A|\neq 0$ $\therefore R(A)=3$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

$\because R^3$ 的维数为3. $\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R_3 的一组基

(2) 设 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ $\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X$ $X=A^{-1}\beta$

例2 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量空间V的一组基. $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$ $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$

(1)试证 β_1,β_2,β_3 是V的一组基

(2) 试求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵

(3) 求 $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标

证明:(1) ① $\beta_1,\beta_2,\beta_3\in V$

② 设有一组数 k_1,k_2,k_3 使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0\Rightarrow\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\end{cases}$

β_1,β_2,β_3 线性无关

③ 只需说明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 $\beta_1\beta_2\beta_3$ 线性表示

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)K$

由已知得 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{P}$

$|P|\neq 0\Rightarrow P$ 可逆 $K=P^{-1}$

(2) $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

(3) $X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $Y=P^{-1}X$

No.

Date

2. 坐标. 设. V是一个向量空间, $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 是 V 的一组基, $\alpha \in V$, 若

$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r$ 则称 $X = (x_1, x_2, \cdots x_r)$ 为 α 在基底 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 下的坐标.

3. $L(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m) = \{r = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m \quad k_i \in F\}$

$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 的极大无关组可为 $L(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ 的一组基

$\dim(L(\alpha_1 \cdots \alpha_m)) =$ 秩 $(\alpha_1 \cdots \alpha_m)$.

4. R^n. 称 $e_1 = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $\cdots e_n = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ 为 R^n 的自然基

三 坐标变换公式.

$$V \begin{cases} \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m \to X \\ \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m \to Y \end{cases}$$

$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m$. $\qquad \alpha = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_m\beta_m$.

$X = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$ $\qquad Y = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{m1}\alpha_m \\ \beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{m2}\alpha_m \\ \cdots \\ \beta_m = p_{1m}\alpha_1 + p_{2m}\alpha_2 + \cdots + p_{mm}\alpha_m. \end{cases} \qquad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

$A = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m)$ $\qquad B = (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m)$.

$B = AP$

定义. 若 $(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m) = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m)P$. 则称 P 是由基 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 到基 $\beta_1 \cdots \beta_m$ 的过渡矩阵 ← 可逆矩阵.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m)X$ $\qquad = (\beta_1 \cdots \beta_m)Y = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m)PY$.

$X = PY$. $\qquad Y = P^{-1}X$.

定理: 设 V是一个向量空间, $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 与 $\beta_1 \cdots \beta_m$ 是 V 的两组基. $\alpha \in V$,

若 (1) α 在基 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 下的坐标为 X. (2) $\beta_1 \cdots \beta_m$ Y.

(3) 基 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 到基 $\beta_1 \cdots \beta_m$ 的过渡矩阵为P.

则 $X = PY$. $\qquad Y = P^{-1}X$

No.

Date.

正交向量组性质

证明：若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

$(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m, \alpha_1)=(0,\alpha_1)=0$

$k_1|\alpha_1|^2=0$ 由 $\alpha_1\neq 0$ $k_1=0$

同理 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$

[illegible]

[illegible]

1. [illegible]

[illegible]

2. [illegible]

[illegible]

3. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

4. [illegible]

[illegible]

5. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]
$a_1, a_2, \ldots, a_n$ [illegible]
[illegible]
$b_1, b_2, \ldots, b_n$ [illegible]
[illegible]
$r_1, r_2, \ldots, r_n$ [illegible]
[illegible]
$b_1 = a_1$
$b_2 = a_2 - \frac{[illegible]}{[illegible]} b_1$
$b_3 = a_3 - \frac{[illegible]}{[illegible]} b_1 - \frac{[illegible]}{[illegible]} b_2$

$b_n = a_n - \frac{[illegible]}{[illegible]} b_1 - \cdots - \frac{[illegible]}{[illegible]} b_{n-1}$
[illegible]
$r_1 = \frac{b_1}{|b_1|}$ $r_2 = \frac{b_2}{|b_2|}$ $\cdots$ $r_n = \frac{b_n}{|b_n|}$
[illegible] $a_1, a_2, \ldots, a_n$ [illegible] $r_1, r_2, \ldots, r_n$ [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] i) $|A| = \pm 1$
ii) [illegible] $A^T = A^{-1}$
iii) A [illegible] A^T [illegible]
iv) [illegible]
v) [illegible] $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$
$\|Ax\| = \|x\|$ [illegible]
[illegible] $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ [illegible]
[illegible] $a_1, a_2, \ldots, a_n$ [illegible]
[illegible]
[illegible]

二、定理的证明.

证明: 1° $N(A)$ 是一个向量空间

设 $x_1, x_2 \in N(A)$　$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=0$

$\therefore x_1+x_2 \in N(A)$

$Akx_1 = kAx_1 = 0$　$\therefore kx_1 \in N(A)$.

$\therefore N(A)$ 是一个向量空间

2° 证 $\dim N(A) = n - R(A)$.

① 在 $N(A)$ 中存在 $n-R(A)$ 个线性无关的解向量.

记 $R(A)=r$. 则A中存在一个 r 阶非零子式. 不妨设

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -(a_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n) \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -(a_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n) \end{cases}$$

与原方程组同解.

取 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$　$\xi_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .. 取 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$　$\xi_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \vdots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \xi_1 \cdots \xi_{n-r}$ 是方程组 $n-r$ 个线性无关的解向量

② 设 ξ 是方程组的一个解向量. $\xi_1, \cdots \xi_{n-r}, \xi$ 线性相关

$B=(\xi_1, \cdots \xi_{n-r}, \xi)$　$AB = A(\xi_1, \cdots \xi_{n-r}, \xi) = 0$

$R(A)+R(B)-n \le R(AB)$　$R(B) \le n-r$　$\therefore R(B) < n-r+1$

B中的列向量线性相关.

线性方程组

一、线性方程组有解的充要条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \text{ 解向量}$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix} \text{ 系数矩阵} \qquad \beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix} \text{ 常数向量} \qquad B=(A\vdots\beta) \text{ 增广矩阵}$$

$Ax=\beta$ ⇒ 以矩阵形式

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix} \quad \alpha_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix} \cdots \alpha_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix} \qquad x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta \text{ 向量形式}$$

方程组有解 ⇔ β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 线性表示 ⇔ $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 与 α_1,α_2,β 等价

⇔ 两个向量组的秩相等 ⇔ $R(A)=R(B)$

定理 线性方程组有解 ⇔ $R(A)=R(A\vdots\beta)$

定义 $\beta=0$ 齐次线性方程组 $\beta\neq0$ 非齐次线性方程组

二、线性方程组解的结构

1. 齐次线性方程组

$Ax=0$

定理：记 $N(A)$ 为方程组所有解向量构成的集合 则 $N(A)$ 是一个 $n-R(A)$ 维的向量空间

推论 $A_{m\times n}X=0$

(1) 只有零解 ⇔ $R(A)=n$ A为列满秩矩阵

(2) 有非零解(无穷) ⇔ $R(A)<n$

(3) 若 $R(A)=r<n$ 记 $\xi_1,\cdots\xi_{n-r}$ 为 $N(A)$ 的一组基，其 $k_1,k_2\cdots k_{n-r}$ 为任意常数

称 $X=k_1\xi_1+k_2\xi_2\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的通解

称 $\xi_1,\cdots\xi_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的基础解系

性质 $\xi_1,\cdots\xi_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的基础解系 ⇔

① $s=n-R(A)$ ② $\xi_1\cdots\xi_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的解向量

③ $\xi_1\cdots\xi_{n-r}$ 线性无关

No.

Date

例1. 求齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=0 \\ x_1+3x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$ 的基础解系和通解

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{初行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \cancel{-2}\,1 & 0 & \cancel{-2}\,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ x_2+x_4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2=-x_3+x_4 \\ x_2=-x_4 \end{cases}$ 取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

得 $\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 则 ξ_1, ξ_2 为齐次线性方程组的一个基础解系

通解为 $X=k_1\xi_1+k_2\xi_2$, k_1, k_2 为任意常数

推论(1) 证明：⇒ 若 $R(A)<n$ 则(2)有无穷多解. 则(1)有无穷解

⇐ 若 η_1, η_2 $(\eta_1\neq\eta_2)$ 为 $Ax=\beta$ 的解. 则 $\eta_1-\eta_2$ 为 $Ax=0$ 的解

$\eta_1-\eta_2\neq0$ ~~$Ax\neq0$ $Ax=$~~ $\Rightarrow R(A)<n$ 矛盾.

例1. 讨论方程组

$$\begin{cases} ax_1+(a-1)x_2+x_3=1 \\ ax_1+ax_2+x_3=2 \\ 2ax_1+2(a-1)x_2+ax_3=2 \end{cases}$$ 何时有解. 何时有唯一解 何时有无穷多解.

$(A\vdots\beta)=\begin{pmatrix} a & a-1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 & 2 \\ 2a & 2(a-1) & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{初行} \begin{pmatrix} a & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}$

1° $a=0$ 时 $R(A)=2$. $R(A\vdots\beta)=3$ 无解

2° $a-2=0$ 时 $R(A)=2$ $R(A\vdots\beta)=2$ 有无穷解.

3° $a\neq0$ 且 $a\neq2$ 时 $R(A)=3$ $R(A\vdots\beta)=3$. 有唯一解.

No.

Date.

推论：$A_{n\times n}X=0$. ① 只有零解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$. ② 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$

2、非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

(2) 为 (1) 的导出组.

定理：(1) 若 η_1, η_2 为 (1) 的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是 (2) 的解

(2) 若 η 是 (1) 的解 ξ 是 (2) 的解，则 $\eta+\xi$ 是 (1) 的解.

推论 (1) $AX=\beta$ 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A\vdots\beta)=n$.

(2) $AX=\beta$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A\vdots\beta)<n$.

若 $R(A)=R(A\vdots\beta)=r<n$ 记 η^* 为 (1) 的一个特解.

设 $\xi_1, \cdots \xi_{n-r}$ 为 (2) 的基础解系 $x=\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ $k_1, k_2, \cdots k_{n-r}$ 为任意常数

为 (1) 的通解.

例2. 设 A 是四阶方阵. $\beta(\neq 0)$ 为 4×1 矩阵 $R(A)=2$. $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 是 $AX=\beta$ 的解. 且 $\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}2\\4\\0\\8\end{pmatrix}$ $2\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}3\\0\\3\\3\end{pmatrix}$ $3\eta_3+\eta_4=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

试求方程组 $AX=\beta$ 的通解

$\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\4\end{pmatrix}$ $\frac{1}{3}(2\eta_2+\eta_3)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\frac{1}{4}(3\eta_3+\eta_4)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\\0\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ 是 $AX=\beta$ 的解.

$\xi_1=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)-\frac{1}{3}(2\eta_2+\eta_3)=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\3\end{pmatrix}$ $\xi_2=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)-\frac{1}{4}(3\eta_3+\eta_4)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{7}{4}\\0\\\frac{15}{4}\end{pmatrix}$

$x=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\4\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{7}{4}\\0\\\frac{15}{4}\end{pmatrix}$ k_1, k_2 为任意常数 是 $AX=\beta$ 的通解

No.

Date.

A为 $m\times n$ 矩阵. 试证: $R(A^TA)=R(AA^T)=R(A)$

证明: 需证 $A^TAx=0$ 与 $Ax=0$ 同解.

若 $A\alpha=0$ 则 $A^TA\alpha=0$

若 $A^TA\alpha=0$ $\alpha^TA^TA\alpha=0=(A\alpha)^TA\alpha=(A\alpha,A\alpha)=0$ $\therefore A\alpha=0$

A: $m\times n$. B. $s\times n$. 试证 $Ax=0$ ~~与 $Bx=0$~~ 的解是 $Bx=0$ 的解 $\Leftrightarrow R(A)=R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

证: $Ax=0$ 的解是 $Bx=0$ 的解.

$\Leftrightarrow Ax=0$ 与 $\begin{cases}Ax=0\\Bx=0\end{cases}$ 同解. $\Leftrightarrow R(A)=R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$.

三. 利用矩阵的初等行变换 求线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-x_4=4 \\ 3x_1-2x_2-x_3+2x_4=2 \\ 5x_2+7x_3+3x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2-5x_3-x_4=4 \end{cases}$$

解: $(A\vdots\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$R(A)=R(A\vdots\beta)=3$ $\quad 4-3=1$

$$\begin{cases} x_1-x_3=2 \\ -x_2+x_3+x_4=-2 \\ 3x_3+2x_4=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1-x_3=2 \\ -x_2+x_3=-2-x_4 \\ 3x_3=-3-2x_4 \end{cases}$$

令 $x_4=0$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=y^*$

$$\begin{cases} x_1-x_3=0 \\ -x_2+x_3=-x_4 \\ 3x_3=-2x_4 \end{cases}$$

令 $x_4=1$ 得 $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}=\xi$

$X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ k 为任意常数 为通解

四. 几何应用

1. 两个平面位置关系的判定

π_1: $a_{11}x+a_{12}y+\cdots+a_{13}z=b_1$

π_2: $a_{21}x+a_{22}y+\cdots+a_{23}z=b_2$

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$AX=\beta$

(1) $R(A)\neq R(A\vdots\beta) \Leftrightarrow \pi_1 /\!/ \pi_2$

(2) $R(A)=R(A\vdots\beta)=2 \Leftrightarrow$ π_1 与 π_2 相交于一条直线

(3) $R(A)=R(A\vdots\beta)=1 \Leftrightarrow$ π_1 与 π_2 重合

2. 三个平面的位置关系.

π_1: $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1$

π_2: $a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2$

π_3: $a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3$

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ $AX=\beta$

(1) $R(A)\neq R(A\vdots\beta) \Leftrightarrow$ π_1, π_2, π_3 没有公共交点

(2) $R(A)=R(A\vdots\beta)=1 \Leftrightarrow$ 重合

(3) $R(A)=R(A\vdots\beta)=2 \Leftrightarrow$ 相交于一条直线

(4) $=3 \Leftrightarrow$ 交于一点

No.

Date.

例 $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&-1\\-1&\lambda+1&-1\\-1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&\lambda+1&-1\\1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&\lambda+2&0\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}$

$\lambda=1$ 或 $\cancel{-2}$. -2. -2 (代数重数)

$(E-A)=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{初行}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

∴属于特征值1的特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. k为不为0的任意常数

$(-2E-A)=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{初行}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

∴属于特征值 -2 的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. k_1, k_2为不同时为0的任意常数

(几何重数).

例: 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\x&1&y\\1&0&2\end{pmatrix}$ 可以相似对角化. 求x, y.

解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$

$\lambda_1=1$ (2重) $\lambda_2=3$ $R(E-A)=1$

$E-A=$

No.

Date.

特征值、特征向量及相似矩阵.

特征值与特征向量.

一、概念　设 $A\in F^{n\times n}$，$X\neq 0$，$X\in F^n$，$\lambda\in F$.　若 $AX=\lambda X$

则称 λ 为 A 的特征值，称 $X(\neq 0)$ 为 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量

注：成对，特征值对应的特征向量不唯一.

二、求法.　$A: n\times n$.　λ 是 A 的特征值.

存在 $X\neq 0$ 使 $AX=\lambda X$. $\Leftrightarrow$ $(\lambda E_n - A)X=0$ 有非零解. $\Leftrightarrow |\lambda E_n - A|=0$

$$|\lambda E_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

是关于 λ 的多项式.

称为 A 的特征多项式.

X 是 $(\lambda E_n - A)X^{(*)}=0$ 的非零解

设 $A_{3\times3}$ 的特征值为 0，1，−1，对应的特征向量依次为 $P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $P_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $P_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

求 A 及 A^{2n}

$A=T\Lambda T^{-1}$　　$\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$　$T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

$A^{2n}=T\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}T^{-1}$

三、性质

取F=复数域（复数域上n次多项式有n个根）.

① $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} = tr(A)$. 迹.

② $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$.

③ $A_{n\times n}$可逆 ⇔ 0不是A的特征值

④ 设λ是可逆矩阵A的特征值 则λ^{-1}是A^{-1}的特征值 $N(\lambda E-A)=N(\lambda^{-1}E-A^{-1})$

⑤ 设λ是A的特征值，f(x)是多项式，f(λ)是f(A)的特征值

$N(\lambda E-A)\subset N[f(\lambda)E-f(A)]$

⑥ 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_s$是A的互异特征值 $x_1,x_2,\cdots x_s$分别对应的特征向量，则 $x_1,x_2,\cdots x_s$线性无关

$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\ \lambda_s$ 互异

$x_{11}\ x_{12}\cdots x_{1r}$ ... $x_{s1}\cdots x_{sr}$ 线性无关

四、实对称矩阵的性质

性质 1. n阶实对称阵的特征值都是实数.

2. 实对称阵属于不同特征值的实特征向量必正交.

3. 实对称阵任一特征值的几何重数=其代数重数

相似矩阵

一、概念 A.B n×n 若存在n阶可逆阵T，使 $B=T^{-1}AT$ 则称T为A和B的相似变换矩阵. 自反性，对称性，传递性 相似⇒等价

二、性质

定理：相似矩阵有相同的特征多项式.

推论：相似矩阵有相同的特征值（迹）.

三、相似对角化

设A n×n 若∃可逆阵T 使 $T^{-1}AT=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

则称A可相似对角化.

定理：$A_{n\times n}$可相似对角化 ⇔ A有n个线性无关的特征向量

No.

Date

特征值的代数重数与几何重数.

1. 定义：设λ_0是n阶方阵A的一个特征值. 若λ_0是A的特征方程的m重根，则称λ_0的代数重数为m. 称$N(\lambda E-A)$的维数为λ_0的几何重数.

2. 定理：任意特征值的几何重数 ≤ 代数重数.

3. n阶复矩阵可相似对角化 ⟺ A所有特征值的代数重数 = 几何重数.

实对称矩阵的正交相似对角化（实数域）

1. 定义：存在一个正交矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角矩阵，则称A可正交相似对角化.

若A可正交相似对角化，则A为实对称矩阵.

定理：设A为n阶实对称矩阵，则存在正交矩阵P与对角矩阵Λ使$P^{-1}AP=\Lambda$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

实二次型.

一、概念：1. 定义：设F是一个数域，称F上的n元二次齐次多项式为F上的n元二次型.

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}\quad a_{ij}=a_{ji}\ \ i\neq j时$$

$f(x)=X'AX.$

二次型f与实对称矩阵A一一对应.

称二次型f的矩阵A的秩为f的秩，记为秩(f).

二、标准二次型、规范二次型

1. 称只含平方项的二次型为标准二次型，即

$$f(x_1,x_2\cdots x_n)=k_1x_1^2+k_2x_2^2+\cdots k_nx_n^2.$$

2. 称形如$f(x_1,x_2\cdots x_n)=x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-x_{p+2}^2-\cdots x_{p+q}^2$的二次型为规范二次型

用正交线性变换化 $f=-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3-2x_2x_4-2x_3x_4$

为标准形.

第一步 写出 f 的矩阵 A

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&-1&1\\-1&0&1&-1\\-1&1&0&-1\\1&-1&-1&0\end{pmatrix}$$

第二步 求 A 的特征值

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1&-1\\1&\lambda&-1&1\\1&-1&\lambda&1\\-1&1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&\lambda-1&-2&0\\0&-2&\lambda-1&0\\0&2&2&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3(\lambda-3)$$

$\lambda_1=-1$ (3重根) $\lambda_2=3$

第三步 对不同特征值求线性无关的特征向量

对 $\lambda=-1$ $(-E-A)X=0$

$$-E-A=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等}}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$x_1=x_2+x_3-x_4$

$$\xi_{11}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad \xi_{12}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad \xi_{13}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

第四步 施密特正交化

对 $\lambda=-1$ $\eta_{11}=\xi_{11}$ $\eta_{12}=\xi_{12}-\frac{(\xi_{12},\eta_{11})}{(\eta_{11},\eta_{11})}\eta_{11}$

$\eta_{13}=\xi_{13}-\frac{(\xi_{13},\eta_{11})}{(\eta_{11},\eta_{11})}\eta_{11}-\frac{(\xi_{13},\eta_{12})}{(\eta_{12},\eta_{12})}\eta_{12}$

$P_{11}=\frac{1}{|\eta_{11}|}\eta_{11}=(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0,0)$ $P_{12}=\frac{1}{|\eta_{12}|}\eta_{12}=(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},0)$

$P_{13}=\frac{1}{|\eta_{13}|}\eta_{13}=(-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}})$

对 $\lambda_2=3$ $P_{14}=(\frac12,-\frac12,-\frac12,\frac12)$

第五步 写出正交矩阵 $P=(P_{11}\ P_{12}\ P_{13}\ P_{14})$

f 经正交线性变换 $X=PY$ 化成标准形

$f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$

$f=-y_1^2-y_2^2-y_3^2+3y_4^2$

$\lambda_1\quad\lambda_1\quad\lambda_1\quad\lambda_2$

三. 合同矩阵

1.定义: 设 A B

则称 A

2.性质 (1)自反(2)

(4) 对称

(5) 正

A.B 为实对称

$\alpha\in R^n$. α

$f(\alpha)=X$

设 $(\beta_1,\beta_2\ldots$

$Y=$

$f(\alpha)=Y'$

C 可逆矩阵

C 正交矩阵

一 正交线性变换

定理: 任意 n 元

化为标准

特征值

二、拉格朗日

三、初等变换法

$\begin{pmatrix}A\\E_n\end{pmatrix}$

三、合同矩阵

1. 定义：设 A B 为 n 阶方阵，若存在可逆矩阵 C 使得 $C'AC=B$
则称 A 与 B 合同　　　　正负惯性指数个数 相同

2. 性质 (1) 自反 (2) 对称、(3) 传递

(4) 对称矩阵只能和对称矩阵合同

(5) 正交相似 ⟹ 合同

$A \cdot B$ 为实对称且特征值相同，则 A 与 B 合同 相似 合同

化实二次型为标准形

$\alpha \in R^n$. $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 为基　$\alpha=(\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n)X$

$f(\alpha)=X'AX$　　$\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n$ 为基　$\alpha=(\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n)Y$

设 $(\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n)=(\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n)C$

$Y=C^{-1}X$　　$X=CY$.

$f(\alpha)=Y'C'ACY$.

C 可逆矩阵　$X=CY$ 为可逆线性变换.

C 正交矩阵　$X=CY$ 为正交线性变换

一、正交线性变换化实二次型为标准型.

定理：任意 n 元实二次型 $f=X'AX$ 存在一个正交线性变换 $X=PY$ 将 f 化为标准型 $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$　其中 $\lambda_1\ \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 为 A 的特征值

二、拉格朗日配方法

三、初等变换法

$$\begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} P_1'AP_1 \\ P_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} P_2'P_1'AP_1P_2 \\ P_1P_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Lambda \\ \underbrace{P_1 \cdots P_s}_{C} \end{pmatrix}$$

No.

Date.

例. $f=4x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3-4x_1x_4+4x_2x_3-4x_2x_3$
$-4x_2x_4-8x_3x_4.$

解 $f=(2x_1+x_2+x_3-x_4)^2+(x_2+x_3-x_4)^2-(x_3+2x_4)^2$

令 $\begin{cases} y_1=2x_1+x_2+x_3-x_4 \\ y_2=x_2+x_3-x_4 \\ y_3=x_3+2x_4 \\ y_4=x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2 \\ x_2=y_2-y_3+3y_4 \\ x_3=y_3-2y_4 \\ x_4=y_4 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} y_1\\y_2\\y_3\\y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2&1&1&1\\0&1&1&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} \quad x=CY.$$

令 $C=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&1&-1&3\\0&0&1&-2\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$ 则 f 经可逆线性变换 $X=CY$ 化成

标准形 $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$

例 将 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 化为标准形.

解. 令 $x_1=y_1+y_2$ $x_2=y_1-y_2$ $x_3=y_3$

C_1

$$\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\y_2\\y_3 \end{pmatrix}$$

$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$
$=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2$

$z_1=y_1-y_3$ $z_2=y_2-2y_3$ $z_3=y_3$

$C_2=\begin{pmatrix} 1&0&-1\\0&1&2\\0&0&1 \end{pmatrix}$ $X=CZ$ $C=C_1C_2$

例 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_2x_3+2x_3x_4$

$A=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} A\\ \hline 1& & & \\ &1& & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\ \hline 1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&1 \end{pmatrix}$

No.

Date

正定二次型.

一、惯性定律

$X^TAX \xrightarrow{X=CY}$ 标准形 I. $k_1y_1^2+\cdots+k_ny_n^2$

$\xrightarrow{X=C_2Z}$ 标准形II: $l_1z_1^2+\cdots+l_nz_n^2$

定理: $k_1\cdots k_n$ 中正(负)数的个数等于 $l_1\cdots l_n$ 中正(负)数的个数.

称为原二次型的正(负)惯性指数.

注: ① A的正(负)特征值的个数 = f的正(负)惯性指数

② 配方法 合同变换法

注: ①规范形的唯一性(不计变量次序). 1 -1 0

② 可逆线性替换不改变二次型的正(负)惯性指数.

$X^TAX \xrightarrow{X=C_1Y} Y^T(C^TAC)Y$

$\xrightarrow{X=C_2Z}$ 标准形

③二次型的秩 秩(f) = R(A) = f的正惯性指数与负惯性指数之和.

二、正定二次型

1.定义: 设有二次型 $f=X^TAX$, 若 $\forall X\in R^n$, $X\neq 0$ 有 $f=X^TAX>0$ 则称

f 为正定二次型. 正定二次型矩阵称为正定矩阵.

$f(x)=k_1x_1^2+k_2x_2^2+\cdots k_nx_n^2$ 正定 $\Leftrightarrow$ $k_1, k_2 \cdots k_n>0$

注: 可逆线性替换不改变二次型的正定性

证: $X^TAX \xrightarrow[\text{可逆}]{X=CY} Y^T(C^TAC)Y$

设 X^TAX 正定 则 Y^TC^TACY 正定

定理: 实二次型 X^TAX 正定 $\Leftrightarrow$ 它在可逆线性替换下正定 $\Leftrightarrow$ 它的

正惯性指数为n

推论: 实二次型 ~~矩阵~~ X^TAX 正定 $\Leftrightarrow$ 二次型矩阵A的n个特征值全为正数

设A为实对称矩阵 A正定 $\Leftrightarrow$ A的特征值全为正数.

推论: X^TAX 正定 $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵Q使 $A=Q^TQ$

矩阵A正定 $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵Q使 $A=Q^TQ$

No.
Date.

三、顺序主子式判别法

定义：$A_{n\times n}$，取A的前k行前k列作成的k阶子式称为k阶子式称为A的k阶主子式。

定理：设A $n\times n$ 对称，则A正定 $\Leftrightarrow$ A的各阶顺序主子式全大于0.

四、半正定、负定、半负定

定义：设 $f(x_1 \cdots x_n) = X^TAX$ 称f半正定 $f = X^TAX \geq 0 \ \forall X \in R^n$

负定 $f = X^TAX < 0 \ \forall X \in R^n \ X \neq 0$

负半定 $f = X^TAX \leq 0 \ \forall X \in R^n$.

曲面与曲线

一、球面：$(x+\frac{A}{2})^2 + (y+\frac{B}{2})^2 + (z+\frac{C}{2})^2 = -D + \frac{A^2+B^2+C^2}{4}$.

二、柱面：$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ $f(x,y)=0$ 表示以曲线 $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 为准线

母线平行于z轴的柱面

(1) 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

(2) 双曲柱面 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$

三、~~旋转~~旋转曲面。以一条平面曲线C绕C所在平面上的一条直线L旋转一周

旋转轴：L. 母线：曲线C

$\cancel{z=z}$，$z_1=z$ $\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$ $y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$

$(0,y_1,z_1)$ 在曲线C上。$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$

① 圆锥面 ② 旋转双叶双曲面 ③ 旋转单叶双曲面

④ 旋转椭球面 ⑤ 旋转抛物面

四、空间曲线

二次曲面

1. 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2. 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

3. 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

No.

Date

4. 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$ (p,q同号)

5. 双曲抛物面(马鞍面) $\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z$.

二次锥面

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$. $z=h$ ($h\neq0$) 截该曲面得椭圆

等价、相似、合同、判定. 秩=非0特征值的个数.

相似

① 特征值不同, 必不相似.

② 特征值相同 + 相似对角化 (代重=几重) ⇒ 相似

合同.

① 对称与非对称矩阵必不合同

② 对称矩阵 + 正、负特征值个数相同 ⇒ 合同

实对称矩阵 + 特征值相同 ⇒ ~~相似~~ 等价、相似、合同

等价.

秩相同

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}(1\ -1\ -1\ 1)$$

$$A^5=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\left[(1\ -1\ -1\ 1)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right]^6(1\ -1\ -1\ 1)=256\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$|A^n|=\left|(-4)^4\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\right|=\cancel{4^3}\,4^{36}\cdot 0=0$$

2. 解(1) $|A|=bc-\frac{1}{2}a\neq 0$ 即 $a\neq 2bc$

(2) $A'=\begin{pmatrix}0&a&b\\1&0&0\\0&c&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=A=\begin{pmatrix}0&1&0\\a&0&c\\b&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ∴ $a=1$ $b=0$ $c=0$

(3) $AA'=\begin{pmatrix}0&1&0\\a&0&c\\b&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a&b\\1&0&0\\0&c&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a^2+c^2&ab+\frac{1}{2}c\\0&ab+\frac{1}{2}c&b^2+\frac{1}{4}\end{pmatrix}=E$

$$\therefore\begin{cases}a^2+c^2=1\\ab+\frac{1}{2}c=0\\b^2+\frac{1}{4}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=\frac{\sqrt{3}}{2}\\c=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

3. $\alpha_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$

解. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ $Ax=\beta$

(1) 由题意 $Ax=\beta$ 有唯一解. $\lambda=-2$ ✓.

∴ $R(A)=R(A\vdots\beta)=3$ 当 $\lambda=0$ $R(A\vdots\beta)=R(A)=1$ $\lambda=-1$ ✓ 符合题意 $\lambda\neq-1$ 时.

$$(A\vdots\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初行}}\cancel{\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&0\\0&\frac{\lambda^2+2\lambda}{1+\lambda}&\frac{\lambda}{1+\lambda}&\lambda\\0&0&\frac{\lambda^2+\lambda}{1+\lambda}-\frac{\lambda}{(\lambda+2)(1+\lambda)}&\lambda^2-\frac{\lambda}{\lambda+2}\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda^2\\0&\lambda&-\lambda&\lambda-\lambda^2\\0&0&-3\lambda-\lambda^2&\lambda-2\lambda^2-\lambda^3\end{pmatrix}$$

$-3\lambda-\lambda^2\neq0$ $\lambda\neq0$ $\lambda\neq-3$.

(2) $Ax=\beta$ 有无穷解 $R(A)=R(A\vdots\beta)<3$ $\begin{cases}-3\lambda-\lambda^2=0\\\lambda-2\lambda^2-\lambda^3=0\end{cases}\Rightarrow\lambda=0$

(3) $Ax=\beta$ 无解. $R(A)\neq R(A\vdots\beta)$ $\lambda=-3$

4. $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$ $\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$ $\quad A=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}P^{-1}$

$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ $\quad A^n\beta=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n&&\\&2^n&\\&&3^n\end{pmatrix}\cancel{\begin{pmatrix}\frac{6}{5}&-1&\frac{1}{5}\\\frac{3}{5}&1&-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}&0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&2^n&3^n\\1&2^{n+1}&3^{n+1}\\1&2^{n+2}&3^{n+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}3&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\-3&4&-1\\1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$=\cancel{\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.$

5(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+5)$ $\quad \lambda=-5 \quad \lambda=1$ (2重)

(2) $|\lambda_0E-E-A^{-1}|=|(\lambda_0-1)E-A^{-1}|=0$

$\therefore |(\lambda_0-1)A-E|=0 \quad \therefore \left|\frac{1}{\lambda_0-1}E-A\right|=0$

$\frac{1}{\lambda_0-1}=5$ 或 $\frac{1}{\lambda_0-1}=1.$

$\lambda_0=\frac{6}{5}$ 或 $\lambda_0=2$ (2重).

6. $A^{-1}\alpha=\lambda\alpha.$ $\quad \lambda A\alpha=\alpha.$ $\quad$ 即 $\lambda\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3+k\\2+2k\\3+k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$

$\therefore (3+k)\lambda=1 \quad (2+2k)\lambda=k \quad k=1$ 或 $k=-2$

7.(1) $(A\vdots\beta)=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初行}}\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&2-a-a^2&-2-a\end{pmatrix}$

由题意 $R(A)=R(A\vdots\beta)<3$ $\quad \begin{cases}2-a-a^2=0\\-2-a=0\end{cases}$ $\quad a=-2$

(2) $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$ $\quad |\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+2&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)=0$

$\lambda=0. \quad \lambda=3 \quad \lambda=-3$

$\lambda=0.$ $\quad -A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初行}}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\0&3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases}x_1+x_2=2x_3\\3x_2=3x_3\end{cases}$ $\quad \xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}$

$\lambda=3$ $\quad 3E-A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&5&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初行}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases}x_1+x_2=-x_3\\x_2=0\end{cases}$ $\quad \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\0\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$

No. $\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt6}{6}\\-\frac{\sqrt6}{3}\\\frac{\sqrt6}{6}\end{pmatrix}$

Date.

$\lambda=-3.\quad -3E-A=\begin{pmatrix}-4&-1&2\\-1&-1&-1\\2&-1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初行}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&-6\end{pmatrix}$ $\begin{cases}x_1+x_2=-x_3\\-3x_2=+6x_3\end{cases}\Rightarrow \xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt6}{6}\\-\frac{\sqrt6}{3}\\\frac{\sqrt6}{6}\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}&-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt3}{3}&0&-\frac{\sqrt6}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt6}{6}\end{pmatrix}$

8. $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}&b_{14}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}&b_{24}\end{pmatrix}$ 由题意 ξ_1,ξ_2 线性无关

$\therefore R(B)=2.\quad 4-R(B)=2$

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\end{pmatrix}$ $\because \xi_1\ \xi_2$ 是 $AX=0$ 的基础解系

$\therefore R(A)=2.\quad \therefore \eta_1=(a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14})'$

$\eta_2=(a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24})'$ 线性无关

$\because B\eta_1=0\quad B\eta_2=0$ $\therefore$ 通解为 $k_1(a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14})'+k_2(a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24})'$

k_1, k_2 为任意常数.

9. $(A\vdots\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初行}}\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&4-2a&4a+b-5&4-2a\end{pmatrix}$

$\begin{cases}4a+b-5=0\\4-2a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$ $R(A\vdots\beta)=R(A)=2$

$\begin{cases}x_1+x_2=-x_3-x_4-1\\-x_2=-x_3+5x_4+3\end{cases}$ $\xi^*=\begin{pmatrix}4\\-7\\1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x_1+x_2=-x_3-x_4\\-x_2=-x_3+5x_4\end{cases}$ $\eta_1=\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}4\\-7\\1\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ k_1, k_2 为任意常数

10. $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\k&\lambda+1&-k\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$

$\lambda=1\quad \lambda=-1$ (2重) $\quad r(-E-A)=1$

$\begin{pmatrix}-4&-2&2\\k&0&-k\\-4&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初行}}\begin{pmatrix}-2&-1&1\\k&0&-k\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\therefore k=0$

$E-A=\begin{pmatrix}-2&-2&2\\0&2&0\\-4&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初行}}\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}-2x_1=-2x_3\\2x_2=0\end{matrix}$ $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\0\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$

$-E-A=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ -6 & -2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{初等}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $2x_1 = x_3 - x_2$ $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$

$\eta_{21}=\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\eta_{22}=\xi_2-\frac{(\xi_2,\eta_{21})}{(\eta_{21},\eta_{21})}\eta_{21}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\2\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}$

$\eta_{21}'=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5}{5}\\0\\\frac{2}{5}\sqrt5\end{pmatrix}$ $\eta_{22}'=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{30}}{15}\\\frac{\sqrt{30}}{6}\\\frac{\sqrt{30}}{30}\end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt5}{5} & -\frac{2\sqrt{30}}{15}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{30}}{6}\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{2}{5}\sqrt5 & \frac{\sqrt{30}}{30}\end{pmatrix}$ 为正交矩阵 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$

11. $A^2-E=(A-E)B$

即 $\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}-E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}B$

$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

12. 由已知 $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}A$ $B^{-1}=A^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}$

$AB^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$

13. ~~$A=\begin{pmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}\xrightarrow{初等}$~~ 解:(1) $|A|=\begin{vmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a-b & 0\\ 0 & 0 & a-b\end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2$

当有非零解时 $|A|=0$ $a=-2b\neq0$ 或 $a=b\neq0$

(2) $a=-2b$ 时

$A=\begin{pmatrix}-2b & b & b\\ b & -2b & b\\ b & b & -2b\end{pmatrix}\xrightarrow{初等}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $x_1-2x_2=-x_3$ $-3x_2=-3x_3$ $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 通解为 $k\xi_1$ k为任意常数

$a=b$ 时

$A=\begin{pmatrix}b & b & b\\ b & b & b\\ b & b & b\end{pmatrix}\xrightarrow{初等}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $x_1=-x_2-x_3$ $\xi_{21}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\xi_{22}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$k_1\xi_{21}+k_2\xi_{22}$, k_1, k_2 为任意常数

(3) 1 . 2

No.

Date.

14.(1) $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

$|\lambda E-B| = \begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ $\lambda=0,\ \lambda=1\ \lambda=2$

$\therefore \begin{cases}|-A| = -(2ab-a^2-b^2)=0\\ |E-A| = -2ab=0\\ |2E-A| = -(2ab-a^2-b^2)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}$

~~则 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{初等} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $x_1=-x_3$ $x_2=0$~~

$|\lambda E-A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-1)[(\lambda-1)^2-1] = (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda)$

$\lambda=1,\ \lambda=0,\ \lambda=2$

~~(2) $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{r_3-r_1} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_1\leftrightarrow c_3\\ \sqrt{2}r_3\\ \sqrt{2}c_3}]{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\\0&0&\sqrt{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$~~

~~$\therefore P = \begin{pmatrix}0&0&\sqrt{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$~~

$y-z-4x+4=0$

15. $\vec{s}_1=(0,-1,-1)$ 直线 L_1: $\begin{cases}x=1\\ \frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1}\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\ y=z.\end{cases}$ $x-2=-2(y+1)$ $x-2+2y+2$

$\vec{s}_2=(6,3,0)$ 直线 L_2: $\begin{cases}\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-3}\\ z=-2\end{cases}$ $\begin{cases}x+2y=0\\ z=-2\end{cases}$

$\vec{s}_1\times\vec{s}_2=(-3\ \ -6\ \ 6)$.

设直线 L_1 与公垂线所在的平面为 π_1，方程为 ~~$x+y-z-1+\lambda_1(2x+y-z-2)=0$~~

~~$(1+2\lambda_1)x+(1+\lambda_1)y-(1+\lambda_1)z-1-2\lambda_1=0$~~ $y-z+\lambda_1(x-1)=0$

~~$(1+2\lambda_1,\ 1+\lambda_1,\ -1-\lambda_1)\ \vec{n}_1=$~~ $\vec{n}_1=(\lambda_1,\ 1,\ -1)$

~~$\vec{s}_1\cdot\vec{n}_1=$~~ $\vec{n}_1\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2) = -3\lambda_1-6-6=0$ $\lambda_1=-4$.

设直线 L_2 与公垂线所在的平面为 π_2，方程为 $x+2y+\lambda_2(z+2)=0$

$\vec{n}_2=(1,2,\lambda_2)$ $\vec{n}_2\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)=-3-12+6\lambda_2=0$ $\lambda_2=\frac{5}{2}$

$\therefore$ 公垂线方程为 $\begin{cases}4x-y+z-4=0\\ 2x+4y+5z+10=0\end{cases}$ $4\ -1\ 1$ $2\ 4\ 5$

16. 解：设经过直线 L 的方程为 $2x-y+z-1+\lambda(x+y-z+1)=0$ 即 $(2+\lambda)x+(\lambda-1)y+(1-\lambda)z+\lambda-1=0$

$\vec{n}_1=(2+\lambda,\ \lambda-1,\ 1-\lambda)$. 平面 π. $\vec{n}_2=(1,2,-1)$. 设 $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=2+\lambda+2\lambda-2-1+\lambda$ $=4\lambda-1=0$ $\lambda=\frac{1}{4}$.

$\begin{cases}\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}y+\frac{3}{4}z-\frac{3}{4}=0\\ x+2y-z=0\end{cases}$ $\begin{cases}3x-y+z-1=0\\ x+2y-z=0\end{cases}$

No.

Date.

17. 解: (1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-2)[3+(\lambda-a)(3-\lambda)]$

$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-b)$ $\lambda=b$ 或 $\lambda=2$ (2重)

$\therefore \begin{cases}3+(2-a)(3-2)=0\\ 3+(b-a)(3-b)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=5\\ b=6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=6\\ b=2\end{cases}$ (舍去)

(2) ~~$|\lambda E-A|=$~~ $\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-5\end{vmatrix}$ $\lambda=2$ 时 $(2E-A)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$x_1=x_3-x_2$ $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\lambda=6$ 时 $(6E-A)=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 6 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x_1+x_2=-x_3\\ 6x_2=-2x_3\end{cases}$ $\xi=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\therefore P=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 使 $P^{-1}AP=B$

18. (1) 设 $(x_1,x_2,x_3)^T$ $\begin{cases}x_2=0\\ \sqrt{3}x_1+x_3=0\end{cases}$ $\xi=\begin{pmatrix}1\\0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

(2) $\eta=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ ~~$\beta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{pmatrix}$~~

$y_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $y_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

$\therefore P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 使 $f=-2y_1^2+3y_2^2+2y_3^2$.

19. $|A|=\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & c\end{vmatrix}=24c-72=0$ $c=3$

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 1 & -3\\ 1 & \lambda-5 & 3\\ -3 & 3 & \lambda-3\end{vmatrix}=$ ~~$(\lambda-6)\lambda(\lambda-\frac{17}{2})=0$~~ $\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$.

~~$\lambda=6$ 或 $\lambda=0$ 或 $\lambda=\frac{17}{2}$~~ $\lambda=0,4,9$.

~~$f=6y_1^2+\frac{17}{2}y_2^2=1$. 表示 椭圆柱面~~

$f=4y_2^2+9y_3^2=1$ 椭圆柱面