高等学校教材配套教辅

线性代数与空间解析几何学习笔记

XIAN XING DAI SHU YU KONG JIAN JIE XI JI HE XUE XI BI JI

我知道几乎不会有人仔细看这份笔记，
即使这份笔记的记录者线性代数考了满分💯

——哈工大资源分享站

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

哈工大网盘计划简介

1.项目初衷

鉴于（1）哈工大各类 QQ 群内学习资料多且繁杂，而文件文字太多会导致文件被 tx 屏蔽或者降低 QQ 群信用星级；（2）校内诚信复印和纸张记忆垄断；（3）很多营销号在卖资料且售价很高；（4）学长学姐的自编材料很好，还想分享给下一届；等问题，网盘计划应运而生！哈尔滨工业大学网盘计划**旨在将窝工的各类学习资料进行归类整理，并且以网盘的形式发出来**，历时一年，现已小成，扫描了上百份校内复印店试题文档，归类整理了近 40 个 G 的学习资料给大家，已经花费上千元，现入不敷出，如果您希望网盘计划继续运营下去的话，可通过以下方式进行捐赠。

QQ支付

推荐使用微信支付

2.网盘计划成就（密码 1920）

哈工大网盘计划
密码1920

微信公众号二维码

群名称:哈工大网盘计划（预）
群　号:953062322

腾讯自动屏蔽以上链接，请用浏览器扫一扫

线性代数（一、二章）

第一章：n阶行列式

一、n阶行列式概念

1. 排列：1~n 全排列为 n! 种

设 $P_1, P_2 \cdots P_n$ 是 1~n 一个排列.

① 逆序数：P_i 前比它大的数个数之和

eg. 4 5 1 2 3 P_i逆序数

逆：0 0 2 2 2

一个排列所有逆序数之和为排列的逆序数，记为 $t(P_1 \cdots P_n)$

② 根据逆序数奇偶性将排列分为奇排列、偶排列.

特：自然排列 $(1,2\cdots n)$ 是偶排列，其 $t=0$.

③ 对换：对一个排列进行一次对换后，其奇偶性一定改变

a. 偶次对换：不变奇偶性.
奇次对换：变
⇒ 奇变偶不变

b. 奇排列经奇数次对换得自然排列
偶排列经偶数次对换得 ~.

c. 在 $n(n\geq 2)$ 个不同元素的排列中，奇偶排列各占一半.（$n!/2$）

2. 二阶行列式：2! 项

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

3. 三阶行列式：3! 项

$$值 = \sum (-1)^{t(P_1P_2P_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

~~四阶行列式：4! 项~~

4. n阶行列式，n! 项 $\Delta(a_{ij})$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(P_1\cdots P_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

取遍 $(1,2\cdots n)$ 的所有排列.

★ 从n阶行列式中取n个元素作乘积，且n元素不在同一行同一列：n! 种

★ 所有位于不同行不同列的n个元素乘积的代数和 —— n阶行列式实质

eg.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
（三角形）
$= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{np_n}$

先看第n行，$p_n = n$

其值等于对角线乘积 ⇒ 下三角形

eg
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & ⋰ & \\ \vdots & ⋰ & & 0 \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$\Rightarrow t(n, n-1 \cdots 1) = 1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$

eg 求 $t[1,3,5\cdots(2n-1)\,2\,4\,6\cdots 2n]$?

$= 0+0+0+\cdots(n-1)+(n-2)+\cdots 2+1 = \frac{n(n-1)}{2}$

5. n阶行列式的计算

$a_{i_1j_1} \cdot a_{i_2j_2} \cdot a_{i_3j_3} \cdots a_{i_nj_n}$

方法：先将 i 对换成自然排列.

如果 i_n 是奇(偶)排列，经奇(偶)次对换后得自然排列.

$(-1)^{t(i\cdots)} = (-1)^{t(1,2\cdots n)}$ 或 $(-1)^{t(1,2\cdots n)}$

$(-1)^{t(j\cdots)} = -(-1)^{t(P_1\cdots P_n)}$

相乘即得 $(-1)^{t(i_1\cdots i_n)+t(j_1\cdots j_n)}$ 为符号.

二、行列式性质

1. 转置行列式：行作为列.
记为 D^T 或 D'，a_{ij} 变为 a_{ji}

性质1：$D^T = D$.

$\Rightarrow D^T = \sum(-1)^{t(P_1\cdots P_n)} b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n} = \sum(-1)^{t(P_1\cdots P_n)} a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn} = D$.

即：行列式中行、列是等价的，对行成立的性质，对列同样成立.

2. 性质2：互换两行(列)，行列式变号.

推论：如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式为0.

3. 性质3：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论：有两行(列)元素对应成比例，则其值为0.

4. 性质4：如果行列式的某一行是两项和的形式，那么这个行列式就等于两个行列式的和，这两个行列式只拆第 i 行，其他行与原行列式完全相同.

5. 性质5：把行列式某一行的倍数加到另一行，行列式不变

[应用：化三角形法计算行列式]

三、行列式展开定理.

1. 余子式与代数余子式 (A_{ij}).

M_{ij} $\quad (-1)^{i+j}M_{ij}$.

2. 定理：行列式等于它的任一行(列)的各元素与其代数余子式乘积之和.

[eg]
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

① $aA_{31} + bA_{32} + cA_{33} + dA_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ a & b & c & d \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

② $M_{31} + M_{32} + M_{33} + M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

③ $2A_{31} + 3A_{32} + A_{34} = 0$.（二、三行相同）

[例1]. 计算
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix} \xrightarrow{r_i+(-1)r_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1-x \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n-1}(i-x).$$

[例2]. 计算
$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & & \\ & x_2 & \ddots & \\ & & \ddots & y_{n-1} \\ y_n & & & x_n \end{vmatrix} \xrightarrow{第一列展开}$$

$x_1x_2\cdots x_n + (-1)^{n+1}y_1\cdots y_n$

$= \prod_{i=1}^{n} x_i + (-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n} y_i$

[例3]. 计算
$$D_4 = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[减去第一列]{后三列均}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 4 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$消去二三列 = \begin{vmatrix} a^2 & 2a & 4a & 4 \\ b^2 & 2b & 4b & 4 \\ c^2 & 2c & 4c & 4 \\ d^2 & 2d & 4d & 4 \end{vmatrix} = 0$$（二三列对应成比例）.

[例4]. 计算
$$D_n = \begin{vmatrix} x_1-a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{化为}]{\text{行和相等}} (x_1+\cdots+x_n-a)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-a & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 & x_3-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$$

同例1化为
$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a \end{vmatrix}$$

$= (-1)^{n-1}a^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - a\right)$.

[例5] 计算：
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_n+r_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!$$

[例：加边法].

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$ 加边后为：

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1 & a & \cdots & a \\ 0 & a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix} \xrightarrow[得箭形]{r_i-r_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x_1-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x_2-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{\ } & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1-a & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & & x_n-a \end{vmatrix}$$

Page: Date:

在一个n阶行列式中,如果等于0的元素比n^2-n还多,那么这个行列式必为零(✓)

3. 行列式D的任一行(列)元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和为0.

即:$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

四. n阶行列式计算

1.点型 |\\| |/| |//| 按首行展开 第一列展开

eg. $D_n=\begin{vmatrix} x & y & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & y\\ y & & & x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} x & y & \\ & \ddots & y\\ & & x\end{vmatrix}+y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & & \\ x & \ddots & \\ & x & y\end{vmatrix}$

$=x^n+(-1)^{n+1}y^n$.

eg. $\begin{vmatrix} & & & 1\\ & & 2 & 1\\ & \iddots & & \\ n & & & 1\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n+1)(n-2)}{2}}[1+(-1)^{n+1}n!]$

2. 交叉型.

eg. $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b\\ & a & & & b & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & c & & & d & \\ c & & & & & d\end{vmatrix}$ 按第一行展开

$=a\begin{vmatrix} a & & & b & 0\\ & a & b & & \\ & c & d & & \\ c & & & d & \\ 0 & & & & d\end{vmatrix}_{2n-1}-b\begin{vmatrix} 0 & a & & b\\ & & a\ b & \\ & & c\ d & \\ c & & & d\\ & & & 0\end{vmatrix}$

$=(ad-bc)D_{2(n-1)}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}$

$=(ad-bc)^n$.

3. 范德蒙行列式(第一行是1,第二行).

$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$, $n\geq 2$

(eg). $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3\\ 1 & 4 & 1 & 9\\ 1 & 8 & -1 & 27\\ 1 & 16 & 1 & 81\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 3\\ 1 & 4 & 1 & 9\\ 1 & 8 & -1 & 27\end{vmatrix}$

$=-6(2-1)(-1-1)(3-1)(-1-2)(3-2)\cdot(3-(-1))$ 看第二行.

4. 行(列)和一样.

eg. $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a\\ a & x & & a\\ a & & \ddots & a\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ a & x & \cdots & a\\ a & a & x & a\\ a & \cdots & & x\end{vmatrix}$

$=\cdots[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & \cdots & & 1\\ 0 & x-a & & 0\\ 0 & 0 & x-a & 0\\ & & & x-a\end{vmatrix}$

5. 箭形

eg. $D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & a_1 & & \\ -1 & & \ddots & 0\\ -1 & 0 & & a_n\end{vmatrix}$

第n列 $\times\frac{1}{a_n}$ 加到第一列为:

$\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\end{vmatrix}$ = 上三角行列式

$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & & 1\\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & & & a_n\end{vmatrix}$

第一行 $\times(-1)$ 加到下一行 得箭形.

6. 三对角行列式.

例 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1\\ & & 1 & 2\end{vmatrix}=n+1$

证明: ① $n=1$ 时, $D_1=2=1+1$

② $n=2$ 时, $D_2=3=2+1$

③ 假设 $n\le k$ 时成立, $D_n=n+1$

当 $n=k+1$ 时, $D_{k+1}=2D_k-D_{k-1}$

$=2(k+1)-(k-1+1)=(k+1)+1$

7. 计算

$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & & & b_1\\ & a_2 & b_2 & \\ & b_3 & a_3 & \\ b_4 & & & a_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_4 & a_4 & & \\ & & a_3 & b_3\\ & & b_2 & a_2\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ b_4 & a_4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_3 & b_3\\ b_2 & a_2\end{vmatrix}=(a_1a_4-b_1b_4)(a_3a_2-b_2b_3)$

8. 消元三对角行列式(寻找递推公式)

① $D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & & & \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & & \\ & -1 & 1-b_2 & \ddots & \\ & & & \ddots & b_n\\ & & & -1 & 1-b_n\end{vmatrix}$ $\underline{r_1+r_2}$ $\underline{r_n+r_{n-1}}$

$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & & & \\ 0 & 1 & b_2 & & \\ & 0 & 1 & b_3 & \\ & & & \ddots & b_n\\ & & & 0 & 1\end{vmatrix}=1$.

② $n\geq 2$. $D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 1-x & x & & \\ 0 & -1 & 1-x & x & \\ & & -1 & 1-x & x\\ & & & -1 & 1-x\end{vmatrix}$ $\underline{\text{第一行展开}}$

$D_{n+1}=(1-x)D_n-x\begin{vmatrix} -1 & x & & \\ & 1-x & x & \\ & -1 & 1-x & \\ & & & \ddots\end{vmatrix}$

即: $D_{n+1}=(1-x)D_n+xD_{n-1}$

$\frac{D_{n+1}-D_n}{D_n-D_{n-1}}=-x$

$\therefore D_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^ix^i$

③ 证明 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1}\\ & & c_{n-1} & a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & & \\ 1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & & b_{n-1}c_{n-1}\\ & & 1 & a_n\end{vmatrix}$

按行展开,极其麻烦,过程略.

④ (同②) 求 $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}$ 将前4行依次加到第五行,再按第五行展开得

$=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ -a & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-a^5+\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\\ -a & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

$=-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1$

例] 求 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$ $\underline{c_1+c_n}$

$=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & & & n\\ 0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}$

例] 求 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & -1\end{vmatrix}$ $\underline{r_n-r_1}$

$=\begin{vmatrix} 1 & & \cdots & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & & -2\end{vmatrix}=(-2)^{n-1}$

例] 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a$.

① 求 $\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\\ \vdots & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\end{vmatrix}$ =?

$=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}\cdot a=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a$

② 求 $\sum\limits_{p_1\cdots p_n}\begin{vmatrix} a_{1p_1} & a_{1p_2} & \cdots & a_{1p_n}\\ a_{2p_1} & a_{2p_2} & \cdots & a_{2p_n}\\ \vdots & & & \\ a_{np_1} & a_{np_2} & \cdots & a_{np_n}\end{vmatrix}$ 经列的交换得

$\sum(-1)^{t(p_1\cdots p_n)}a=0$.

⇒ 奇偶排列各占一半.

[例] 计算行列式.

① $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1\\ 0 & a_2 & b_2 & 0\\ 0 & b_3 & a_3 & 0\\ b_4 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_4 & a_4 & & \\ & & a_3 & b_3\\ & & b_2 & a_2\end{vmatrix}$

$=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$

② $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$ 3行和相等 $=x^4(x+1)$.

③ $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ a_3 & 0 & x & \cdots & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}$ $\underline{\text{第一行展开}}$

$D_n=a_1x^{n-1}+\begin{vmatrix} a_2 & -1 & & \\ a_3 & x & -1 & \\ \vdots & & \ddots & -1\\ a_n & 0 & \cdots & x\end{vmatrix}_{n-1}$ $\underline{\text{第一行展开}}$

$=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots a_{n-1}x+a_n$

④ $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$ $\underline{\text{加边法}}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+a_1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1+a_2 & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$ $\underline{r_n-r_1}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & a_1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & a_2 & 0\\ -1 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_1 & & 0\\ 0 & & a_2 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$

$=\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\left(1+\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}\right)$, $a_i\neq 0$, $i=1,2\cdots n$

8. 计算行列式

① $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 & a_1+b_4 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 & a_2+b_4 \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 & a_3+b_4 \\ a_4+b_1 & a_4+b_2 & a_4+b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix}=0.$

② $\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & 1+a_1b_3 & 1+a_1b_4 \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & 1+a_2b_3 & 1+a_2b_4 \\ 1+a_3b_1 & 1+a_3b_2 & 1+a_3b_3 & 1+a_3b_4 \\ 1+a_4b_1 & 1+a_4b_2 & 1+a_4b_3 & 1+a_4b_4 \end{vmatrix}=0$

③ $D_n=\begin{vmatrix} x+y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & & \\ \vdots & & & \ddots & & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}$ $(x+y)$

按第一列展开得: $D_n=(x+y)D_{n-1}-xyD_{n-2}$

$\therefore D_n=\dfrac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}$

④ $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & x & \cdots & & x & 1 \end{vmatrix}$ $\underline{r_n-r_{n-1}}$

$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & x-1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & x-1 & -1 \end{vmatrix}$ 第一列展开

$\begin{vmatrix} -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ x-1 & -1 & \cdots & -1 \\ & & & \\ 0 & & x-1 & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$ $\underline{r_n-r_1}$ $\begin{vmatrix} -1 & \cdots & & -1 \\ x & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & x & 0 \end{vmatrix}$

最后一列展开 $(-1)^n x^{n-2}$. ?

9. 求 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & & \\ \vdots & & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$ $(b\neq c)$

① $D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & & & \\ c & \cdots & c & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a-c \end{vmatrix}$

$=c\begin{vmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \end{vmatrix}+(a-c)\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ & & & \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$

$=c(a-b)^{n-1}+(a-c)D_{n-1}$

② $D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \cdots & b \\ \vdots & & & \\ c & c & \cdots & b \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 \\ c & a & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ c & c & \cdots & a-b \end{vmatrix}$

$=b(a-c)^{n-1}+(a-b)D_{n-1}$

$\Rightarrow$ ①$\times(a-b)$ − ②$\times(a-c)$ 得

$D_n=\dfrac{c(a-b)^n-b(a-c)^n}{c-b}$

10 计算 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & & & \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$?

$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+x\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}$

A_{ij} 为右边第一个行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式

11. 证明 $D_n=\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ & & \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}=0$ $(n\geq3)$

$\Rightarrow$ 自一行逐渐减去上一行得:

第二行−第一行 = (方法舍弃).

所求 $=\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_n\begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cdots & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \cdots & \sin\beta_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$\therefore D_n=\begin{cases} \cos(\alpha_1-\beta_1), & n=1 \\ \sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\beta_1-\beta_2), & n=2 \\ 0, & n\geq3. \end{cases}$

12 范德蒙

① $D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & & \cdots & 3^n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & & \cdots & (n+1)^n \end{vmatrix}$

$=n!(n-1)!\cdots2!$

② $D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1}+\frac{x}{a_1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1}+\frac{x}{a_2} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}+\frac{x}{a_n} \end{vmatrix}$

最后一列拆开 $\prod\limits_{1\leq j<i\leq n}(a_i-a_j)+$ 提出 $\dfrac{x}{a_1\cdots a_n}$ $\begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & 1 \\ \vdots & & & & \\ a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & 1 \end{vmatrix}$

$=\prod+(-1)^{n-1}x\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\cdot\prod\limits_{1\leq j<i\leq n}(a_i-a_j)$

③ $D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & & & \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$ 加边法!

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+x_1 & & \cdots & 1+x_1^n \\ 0 & 1+x_2 & & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & & & & \\ 0 & 1+x_n & & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$ $\underline{r_i-r_1}$

$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ -1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & & & \\ -1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 0 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}-$

$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=2x_1\cdots x_n\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}-$

$\Rightarrow\prod=\left[2x_1\cdots x_n-\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-1)\right]\prod\limits_{n\geq i>j\geq1}(x_i-x_j).$

13 补充2: 交叉型

$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$ 先按第一行展开,再按最后一行展开,综合得:

$D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)}$

$\therefore D_{2n}=\prod\limits_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$

[例] 求 $D_4=\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}$ 类似反对称阵

$\Rightarrow D_4D_4^T=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & & & 0 \\ & a^2+b^2+c^2+d^2 & & \\ & & a^2+b^2+c^2+d^2 & \\ 0 & & & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}$

$\therefore D_4=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

[例] 设 $f(x)$ 是一个次数不大于 $n-1$ 的一元多项式,证明: 如果存在 n 个互不相同的数 $a_1,a_2\cdots a_n$ 使 $f(a_i)=0$, $i=1,2\cdots n$, 则 $f(x)=0$.

证: 设 $f(x)=k_{n-1}x^{n-1}+k_{n-2}x^{n-2}+\cdots k_0$

$\therefore\begin{cases} k_0+a_1k_1+\cdots a_1^{n-1}k_{n-1}=0 \\ \vdots \\ k_0+a_nk_1+\cdots a_n^{n-1}k_{n-1}=0 \end{cases}$

而: 系数行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}\neq0$

$\therefore k_0=k_1=\cdots=k_{n-1}=0$, $f(x)=0$.

[补充] 求 $D_n=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & & & \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$

$\Rightarrow D_n=\begin{cases} a_1-b_1, & n=1 \\ (a_1-a_2)(b_1-b_2), & n=2 \\ 0, & n\geq3. \end{cases}$

拓展: 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & & & \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

逐行相减 $\therefore D_n=\begin{cases} 1+x_1y_1, & n=1 \\ (x_1-x_2)(y_1-y_2), & n=2 \\ 0, & n\geq3 \end{cases}$

[例] 求 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$

按第一列展开得: $D_{n+1}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_{n-1}x+a_n$.

[例 行列] 求 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ a_2a_1 & 2+a_2^2 & \cdots & & a_2a_n \\ \vdots & & & & a_{n-1}a_n \\ a_na_1 & \cdots & & a_na_{n-1} & n+a_n^2 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & & & & \\ 0 & & D_n & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{vmatrix}$ 将 r_1 分别乘 $(-a_1)$, $(-a_2)$, $\cdots(-a_n)$ 加到第 $2,3\cdots(n+1)$ 行

$=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_n & & & & n \end{vmatrix}$ 简化

$=\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{i} & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{vmatrix}=n!\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{i}\right).$

[例] 计算 $D_4=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

加边得 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$ 可求得 x^2y^2

最后一行展开

[例] $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 6 & 9 & & \\ 0 & 1 & 6 & 9 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 9 \\ 0 & \cdots & & 1 & 6 \end{vmatrix}=(n+1)3^n.$

※ $\begin{cases} AB=0 \nRightarrow A=0 \text{ 或 } B=0 \\ AB=0,\ A\neq 0 \nRightarrow B=0 \end{cases}$ $\begin{cases}|A|=4 \\ A^*X=A^{-1}+2X\end{cases} \Rightarrow X=(4E_3-2A)^{-1}$ $A^2B-A-B=E \Rightarrow B=(A-E)^{-1}$ $|A^n|=|A|^n$

$(BC'-E)'(AB^{-1})'+[(BA^{-1})']^{-1}=CA'$

第二章 矩阵

一、矩阵的概念

1.数域：含有0、1

对+、−、×、÷封闭

eg.有理数域、实数域、复数域

2.特殊矩阵

$\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots)=\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&\ddots\\&&&a_n\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}k&&\\&k&\\&&k\end{bmatrix}$ 数量阵（标量阵）

$E_n=\begin{bmatrix}1&&0\\&1&\\0&&1\end{bmatrix}$ 单位阵（为方阵）

二、矩阵运算

1.加法

2.数乘：$kA=\begin{pmatrix}ka_{11}&ka_{12}&\cdots&ka_{1n}\\ka_{21}&&&\vdots\\ka_{m1}&ka_{m2}&\cdots&ka_{mn}\end{pmatrix}$

$kA=0 \Leftrightarrow k=0$ 或 $A=0$

规律：设k、l为数；A、B矩阵

$(k+l)A=kA+lA$

$k(A+B)=kA+kB$

$(kl)A=k(lA)=l(kA)$

注1：数与矩阵相乘，就是用这个数去乘矩阵的每个元

注2：矩阵的加法、数乘统称为矩阵的线性运算

3.矩阵乘法：$AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$

① C行数等于A行数；C列数=B列数

② 左列数=右行数 时才可相乘

③ 应用 $\begin{cases}x+y=1\\x-y=2\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

(eg). $\begin{pmatrix}k_1&&\\&k_2&\\&&k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1&&\\&l_2&\\&&l_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1l_1&&\\&k_2l_2&\\&&k_nl_n\end{pmatrix}$

(eg). $\begin{pmatrix}k_1&&\\&\ddots&\\&&k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&&\vdots\\a_{n1}&&a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1a_{11}&k_1a_{12}&\cdots\\k_2a_{21}&\cdots&k_2a_{2n}\\k_na_{n1}&&\end{pmatrix}$

(右乘) 反过来 $=\begin{pmatrix}k_1a_{11}&k_2a_{12}&\cdots&k_na_{1n}\\k_1a_{21}&\vdots&&\vdots\\k_1a_{n1}&k_2a_{n2}&&k_na_{nn}\end{pmatrix}$

⇒左乘行，右乘列

④ 无交换律 $A\times B$：$\begin{cases}BA\text{无意义}\\\text{都有意义,但不等}\end{cases}$（包含行方面内容）。

无消去律：$AB=AC \nRightarrow B=C$.

$BA=CA \nRightarrow B=C$

有零因子：$AB=0 \nRightarrow A=0$ 或 $B=0$.

$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\varnothing\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$AB=0 \nRightarrow BA=0$

⑤ 满足

ⓐ 结合律：$(AB)C=A(BC)$

ⓑ 分配律 $\begin{cases}A(B+C)=AB+AC\\(A+B)C=AC+BC\end{cases}$

ⓒ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

ⓓ $E_mA_{m\times n}=AE_n=A_{m\times n}$

ⓔ $O_{p\times m}A_{m\times n}=O_{p\times n}$

$A_{m\times n}O_{n\times q}=O_{m\times q}$

必须左列=右行才能相乘

4.方阵的幂：设A为n阶方阵

$A^0=E_n$（n阶单位阵）；$A^1=A$

$A^{k+1}=A^kA$（只有方阵才有幂）

eg. $\begin{pmatrix}l_1&&\\&l_2&\\&&l_n\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}l_1^k&&\\&l_2^k&\\&&l_n^k\end{pmatrix}$

eg.求 $\begin{pmatrix}k&2&0\\0&0&0\\k&2&0\end{pmatrix}^n$ 每一行对应成比例可写成该形式

所求 $=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(k,2,0)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(k,2,0)\cdots$

$=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(k^{n-1})(k,2,0)=k^{n-1}A$.

注：A、B为n阶方阵，k为正整数

① $(AB)^k\neq A^kB^k$

② $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$

③ $(A+B)^2\neq A^2+B^2+2AB$

④ $(A+B)^k\neq\sum_{m=0}^{k}C_k^mA^{k-m}B^m$

但当$AB=BA$时上述均相等.

5.方阵的幂的运算规律

$\begin{cases}A^kA^l=A^{k+l}\\(A^k)^l=A^{kl}\end{cases}$

(eg.) $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta&-\sin n\theta\\\sin n\theta&\cos n\theta\end{pmatrix}$

⇒数学归纳法.

6.矩阵的转置：A^T或A'

规律：① $(A^T)^T=A$

② $(A+B)'=A'+B'$（和的T等于T的和）

③ $(kA)'=kA'$.

④ $(AB)'=B'A'$

推广：$(ABCD\cdots)^T=\cdots D^TC^TB^TA^T$

eg. $(ABC)^T=C^TB^TA^T$

定义 $\begin{cases}A^T=A\text{：称A为对称阵}\\A^T=-A\text{：称A为反对称阵}\end{cases}$（必为方阵）

$\begin{vmatrix}a&x&0\\x&b&\\0&&\ddots&\\&&&n\end{vmatrix}$ 对称阵（对角线任意）.

$a_{ij}=a_{ji}$

$\begin{vmatrix}0&x&\checkmark\\-x&0&a\\-\checkmark&-a&\\&&&0\end{vmatrix}$ 反对称阵（对角线为0）

$a_{ij}=-a_{ji}$

☆ $A=\dfrac{A+A^T}{2}+\dfrac{A-A^T}{2}$

任何一个方阵都可以写成一个对称阵和一个反对称矩阵的和

$\Rightarrow A^3=0$

$\therefore\begin{cases}(E-A)(E+A+A^2)=E\\(E+A)(E-A+A^2)=E\end{cases}$

例1.解方程组 $A^TX=b$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&&a_n\\a_1^2&a_2^2&&a_n^2\\\vdots&&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&&a_n^{n-1}\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}2\\2\\\vdots\\2\end{pmatrix}$，且$a_1\cdots a_n$互不相同

解：$\begin{pmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&&&&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\\vdots\\2\end{pmatrix}$

$\because\begin{pmatrix}2\\2\\\vdots\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\cdots0\begin{pmatrix}a_1^{n-1}\\a_2^{n-1}\\\vdots\\a_n^{n-1}\end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

例2.计算行列式：可用于解方程

① $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ ⇒归纳法

③ $\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}^n=\begin{cases}\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}, & n=1\\\begin{pmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, & n=2\\O_{3\times3}, & n\geq3\end{cases}$

④ $\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}^n=?$

设 $A=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$

$\because AB=BA$ $\therefore$ 所求 $=(A+B)^n$

$=C_n^0A^0B^n+C_n^1A^1B^{n-1}+C_n^2A^2B^{n-2}$（其余为0）.

$=\begin{pmatrix}1&na&\frac{n(n-1)}{2}a^2\\0&1&na\\0&0&1\end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}^n=\begin{cases}5^{2(k-1)}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}, & n=2k-1\\5^{2k}E_2, & n=2k\end{cases}$

例3.已知一正整数k满足$A^k=0$，则$(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}$

证：$(E-A)(E+A+\cdots A^{k-1})$

$=E+A+\cdots A^{k-1}-(A+\cdots A^{k-1})-A^k=E$

同理：$(E+A+\cdots A^{k-1})(E-A)=E$

∴得证 $1-x^k=(1-x)(1+x+\cdots x^{k-1})$

例4.设A为n阶方阵，$f(x)=x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots a_1x+a_0$，$a_0\neq0$且$f(A)=0$，判断A可逆性？

$f(A)=0\Rightarrow A^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots a_1A+a_0E=0$

$\therefore\underbrace{-\frac{1}{a_0}(A^{m-1}+a_{m-1}A^{m-2}+\cdots a_1E)}_{A^{-1}}A=E$

例5.设A是$m\times n$阶矩阵，若对任意$n\times1$矩阵X都有$AX=O_{m\times1}$，则$A=0$

⇒反证：设$A=(a_{ij})_{m\times n}\neq0$，$X=(0\ 0\cdots1\cdots0)$

则$AX\neq0$

$|3A| = |A||3E|$
$|A^{-1}A| = 1$

$$\begin{bmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & c & \\ & & & \ddots & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & & & \\ & \frac{1}{b} & & \\ & & \frac{1}{c} & \\ & & & \ddots & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

矩阵多项式：$f(A)g(A) = g(A)f(A)$　$|AA^{-1}| = 1$

A、B中有一个不可逆，则AB不可逆。　$|(AB)^5| = |A|^5|B|^5$

三、方阵的行列式

1.定义：由方阵A的元所构成的行列式，记为 $|A| = \det A$

☆方阵才有：det、幂、转置、逆、对称、反对称的概念

2.运算规律：设A、B为n阶方阵

① $|A^T| = |A|$

② $|kA| = k^n|A|$

③ $|AB| = |A||B|$（行列式乘法公式）

eg. $|AB| = |A^TB| = |BA| = |B^TA^T|$

④ $|A^k| = |A|^k$

⑤ $|A+B| \neq |A| + |B|$

如：$A = 2E_2$　$B = 3E_2$

$|A+B| = 5^2$

$|A| + |B| = 2^2 + 3^2$

3.A为n阶反对称阵，n为奇数，则 $|A| = 0$

$\Rightarrow A^T = -A$　$\therefore |A| = |A^T| = |-A|$

$= (-1)^n|A| = -|A|$

$\therefore |A| = 0$.

(eg) A、B为n阶方阵，$A^2 = B^2 = E$，且 $|A| = -|B|$，证：$|A+B| = 0$.

$\Rightarrow |A||B| = -|B|\cdot|B| = -1$

而 $A + B = AE + EB = AB^2 + A^2B$

$= A(B+A)B$

$\therefore |A+B| = |A(B+A)B| = |A||B||B+A|$

$= -|A+B|$　$\therefore A+B = 0$.

法二：$A^2 + AB = B^2 + AB$

$\therefore |A(A+B)| = |(B+A)B|$

$= |A||A+B| = |A+B||B|$.

4.基础知识补充

① $AB \neq BA$　$AB = AC \not\Rightarrow B = C$

$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ 或 $B = 0$.

$AB = 0$，$A \neq 0 \not\Rightarrow B = 0$.

但当A为列满秩时，有：

$\begin{cases} AB = AC \Rightarrow B = C \\ AB = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$　[左乘列满秩]

②当A为方阵时，$AB = 0 \Rightarrow |A| = 0$ 或 $B = 0$

③ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

$|kA| = k^n|A|$　$(AB)^m \neq A^mB^m$

$|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$

④ $A^kA^l = A^lA^k = A^{l+k}$

⑤当 $R(A) = 1$ 时，存在 $n\times1$ 阵B及 $1\times n$ 阵C，使 $A = BC$，且 $A^m = (CB)^{m-1}A$

⑥分块 $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^m & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}^m \end{pmatrix}$

四、可逆矩阵

1.定义：设A为n阶方阵，若n阶方阵B使 $AB = BA = E$，则称A为可逆矩阵，B为A的逆矩阵，记作 $B = A^{-1}$

eg. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = E_3$.

否则称A为不可逆矩阵

eg. 对角线有0的矩阵为不可逆

注：A可逆 $\Leftrightarrow$ A^{-1}存在且 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

2.性质：

①方阵A可逆，则 A^{-1} 必唯一.

设B、C均为 A^{-1}

则 $\begin{cases} AB = BA = E \\ AC = CA = E \end{cases}$

则 $B = BE = B(AC) = EC = C$

② $AB = AC$，A可逆 $\Rightarrow B = C$

证：同时左乘 A^{-1}.

③A可逆，$k \neq 0$，则kA可逆，$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

证：$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1}) = E$.

④A可逆，则 A^T 可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

证：$(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T$

$\Rightarrow (A^{-1})^TA^T = A^T(A^{-1})^T = E$.

即逆、转置可交换次序.

⑤A、B为同阶可逆矩阵 $\Rightarrow$ AB可逆且

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.（重要）

$\Rightarrow (AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})AB = E$

推广 $(ABC\cdots)^{-1} = \cdots C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

⑥A可逆，则 A^k 可逆，且：$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

定义：$A^{-k} = (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$

只有可逆矩阵才有负整数次幂

⑦A可逆，则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

证：$|A^{-1}A| = 1$　则 $|A^{-1}||A| = 1$

(eg). $A^3 = E$，求 $(A-2E)^{-1}$

$\Rightarrow (A-2E)(A^2 + 4E^2 + 2EA) = -7E$.

(eg) $AB = E - A$，证明 $AB = BA$

$\Rightarrow A(B+E) = E$　$\therefore (B+E)A = E$

$\therefore BA = E - A$

(eg.) $AB = A + B$，证 $AB = BA$

$\Rightarrow A(B-E) - (B-E) = E$

$\therefore (A-E)(B-E) = E$

(eg). $ABC = E \Rightarrow BCA = E$.　$CAB = E$

$\Rightarrow A^{-1}C^{-1}B^{-1} = E$

6. A可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$（非奇异矩阵）.

(eg). A、B均为n阶方阵满足 $2A^{-1}B = B - 4E$，证明 $A-2E$ 可逆.

$\Rightarrow B - 2A^{-1}B = 4E$　　$B - 2A^{-1}B = 4E$

$\therefore (A-2E)\cdot\frac{1}{4}A^{-1}B = E$.

$\therefore (A-2E)^{-1} = \frac{1}{4}A^{-1}B$.

[分块矩阵求逆]

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix}$.

$= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{-1}$　把内部对角线矩阵记为[ ]

$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_n} \\ [\ ]^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & & \vdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 对角线矩阵的逆只需把其均变成倒数

[基础]：

①求 A^{-1} 的方法.

$\begin{cases} A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \\ (A \vdots E) \to (E \vdots A^{-1}) \text{ 初等行变换} \\ \text{分块阵求逆} \end{cases}$

②矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 秩的性质

$\begin{cases} 0 \le R(A) \le \min\{m, n\} \\ A = 0 \Leftrightarrow R(A) = 0 \\ R(kA) = \begin{cases} 0, & \text{当 } k = 0 \\ R(A), & \text{当 } k \neq 0 \end{cases} \\ R(A+B) \le R(A) + R(B) \\ R(A) + R(B) - n \le R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\} \end{cases}$

特：$AB = 0$ 时，$R(A) + R(B) \le n$.

③分块阵

ⓐ设A为n阶方阵，记 $A = (\alpha_1, \cdots \alpha_n)$，$|A| = a$，则：$|\alpha_n \cdots \alpha_1| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a$.

ⓑ设 $A = (\alpha_1, \cdots \alpha_m, \beta_1, \cdots \beta_n)$ 为m+n阶方阵，$|A| = b$，则：

$|\beta_1 \cdots \beta_n, \alpha_1 \cdots \alpha_m| = (-1)^{mn}b$

ⓒ设n阶方阵A可分块为：

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & * \\ & A_{22} & \\ & & \ddots & A_{ss} \end{pmatrix}$　则 $A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & & \\ & A_{22}^T & \\ *^T & & \ddots & A_{ss}^T \end{bmatrix}$

其中 A_{ii} 为方阵，$*$ 表示任意子块.

$|A| = |A^T| = |A_{11}||A_{22}|\cdots|A_{ss}|$.

ⓓ设A、B为n阶方阵，则

$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$

ⓔ设A、D为方阵（不一定同阶），若A可逆，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$

特：若A、B、C、D均为同阶方阵，A可逆且 $AC = CA$，则有 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$

A^*可逆 ⇔ A可逆

$|(-A)^*|=|A^*|$ $(n\ge2)$

$r+1$阶子式均为0 ⇔ $\ge r+1$阶子式全为0（余子式均为0）.

所有非零阵的 $R\ge1$

$|A|\ne0 \Leftrightarrow R(A)=n$（A为n阶方阵）

$|A^T\pm E|=|(A\pm E)^T|=|A\pm E|$

$a_{ij}=A_{ij} \Leftrightarrow A^T=A^*$ ⇒ $AA^T=AA^*=|A|E$ ⇒ $|A|=0$ 或 1

$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&1\\0&2^n\end{bmatrix}$

五、伴随矩阵

1.定义：$|A|$中a_{ij}的代数余子式A_{ij}所组成的n阶方阵

A第一行代余为A^*第一列

eg. $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}^*=\begin{vmatrix}d&-b\\-c&a\end{vmatrix}$ 主对换，副变号

$AA^*=A^*A=|A|E$

2.若$|A|\ne0$

$A(\frac{1}{|A|}A^*)=(\frac{1}{|A|}A^*)A=E$

⇒ A可逆 ⇔ $|A|\ne0$

$|A|\ne0$ ⇒ A可逆 且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

eg $\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}^{-1}=-\frac12\begin{vmatrix}4&-2\\-3&1\end{vmatrix}$

3.矩阵方程

(eg) 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$

$AX=B$ 求X? ⇒ $X=A^{-1}B$

（要注意将逆阵乘在一边）

(eg) $A_{3\times3}$，$|A|=\frac12$，求 $|(3A)^{-1}-2A^*|$

法一：原式 $=|\frac13A^{-1}-2\cdot\frac12A^{-1}|=|-\frac23A^{-1}|$

$=(-\frac23)^3|A^{-1}|$，再用 $|A||A^{-1}|=1$

4.关于A^*

① $A_{n\times n}$，k为数，则 $(kA)^*=k^{n-1}A^*$

② A可逆，$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$

$|A^*|=|A|^{n-1}$

$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

5 与A是否可逆无关.

$(A^T)^*=(A^*)^T$

③ A、B均为n阶方阵，$(AB)^*=B^*A^*$

(eg). $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，解X.

两边左乘A得：$|A|X=E+2AX$

∴ $(|A|E-2A)X=E$ ∵ $|A|=4$

∴ $4E-2A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$ 可逆

∴ $X=\begin{pmatrix}\frac14&\frac14&0\\0&\frac14&\frac14\\\frac14&0&\frac14\end{pmatrix}$

[例] A为$n(n\ge3)$阶非零实阵，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式，则有：

① $a_{ij}=A_{ij} \Leftrightarrow A^TA=E$ 且 $|A|=1$.

证明：当 $a_{ij}=A_{ij}$ 时，$A^T=A^*$

∴ $A^TA=A^*A=|A|E$

∴ $|A^T||A|=|A|^n$ ∴ $|A|=1$

必要：$A^*A=|A|E=E=A^TA$ ∴ $A^T=A^*$ 得证

② $a_{ij}=-A_{ij} \Leftrightarrow A^TA=E$ 且 $|A|=-1$

证明：$a_{ij}=-A_{ij} \Leftrightarrow A^T=-A^*$

∴ $A^TA=-A^*A=-|A|E$

∴ $|A|^2=-|A|$ ∴ $|A|=-1$

∴ $A^TA=E$

必要：$A^*A=|A|E=-E=-A^TA$

六、矩阵的形式

1.行阶梯形.

2.行最简（非零元为1）

3.标准形 $\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$.

七、矩阵的秩

1.子阵、子方阵：

子方阵的行列式叫子式

2.秩：矩阵A的非零子式的最高阶数. 记作 $R(A)\ge0$.

△若A是零矩阵，规定 $R(A)=0$.

注：若 $R(A)=r$，则：

① A中至少一个r阶子式不为0 $(R\ge r)$

② 所有r+1阶子式全为0. $(R\le r)$

3.秩的性质：$A_{m\times n}$

① $0\le R(A)\le\min\{m,n\}$

$R(A)=0 \Leftrightarrow A=0$

$R(A)\ge1 \Leftrightarrow A\ne0$

② 转置R不变

③ $R(kA)=\begin{cases}0, & k=0\\R(A), & k\ne0\end{cases}$

④ 子阵的秩 $\le R(A)$

⑤ 初等变换不改变秩.

4.求R＝行阶梯形非零行的个数.

即：$A\to\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$，则 $R(A)=r$.

5.满秩阵：$R(A)=n \Rightarrow |A|\ne0$（非奇异~）

⇔ A是可逆阵

即：满秩、可逆、非奇异都是一回事.

6.秩＝列数：列满秩阵；秩＝行数：行满秩阵 } 互为转置

八、初等矩阵

1.定义：单位矩阵经一次初等变换得到的矩阵叫初等阵（换、倍、消）.

① 单位阵交换i、j两行（列）. $E(i,j)$.

② 用非零常数k乘行（列） $E(i(k))$＝第i行乘k.

③ k×某一行加到另一行.

$E(i,j(k))$＝j行×k加到第i行

＝i列×k加到第j列.

2.性质

① 初等阵均可逆，并且逆阵也是初等阵

$E^{-1}(i,j)=E(i,j)$ 不变

$E^{-1}(i(k))=E(i(\frac1k))$

$E^{-1}(i,j(k))=E(i,j(-k))$

[例：初等变换求逆]

(1) $A=\begin{bmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\&1&2&3\cdots&n-2&n-1\\&&\ddots&&&\vdots\\&0&&&1&2\\&&&&&1\end{bmatrix}$

$(A\vdots E)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&\cdots&1&1&-1&&\\&\ddots&&\vdots&&\ddots&\ddots&\\&&&1&&&1&-1\\&&&&&&&1\end{array}\right)$

$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|cccccc}1&&0&1&-2&1&&&\\&\ddots&&&1&-2&1&&\\&&&&&1&-2&1&\\&&&&&&\ddots&\ddots&-2\\0&&1&&&&&&1\end{array}\right)$.

(2) $B=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&\cdots&1\\1&0&&\cdots&1\\\vdots&&0&&\vdots\\&&&\ddots&1\\1&1&\cdots&1&0\end{bmatrix}$ r_i-r_1

$(B\vdots E)\to\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&\cdots&1&1&0&\cdots&0\\&-1&&0&-1&1&&0\\&&\ddots&&\vdots&&\ddots&\\0&&&-1&-1&0&&1\end{array}\right]$ r_1+r_n

$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&\cdots&0&2-n&1&&\\&-1&&0&-1&&\ddots&0\\&&\ddots&&\vdots&&&\\0&&&-1&-1&&0&1\end{array}\right]$.

∴ $B^{-1}=\begin{pmatrix}2-n&1&\cdots&1\\1&-1&&0\\\vdots&&\ddots&\\1&0&&-1\end{pmatrix}$

(3) $C=\begin{bmatrix}0&0&0&2&-3\\0&0&0&-5&7\\2&0&0&0&0\\1&-3&5&0&0\\0&1&-2&0&0\end{bmatrix}$.

$\Rightarrow C^{-1}=\begin{bmatrix}0&\begin{bmatrix}2&0&0\\1&-3&5\\0&1&-2\end{bmatrix}^{-1}\\\begin{pmatrix}2&-3\\-5&7\end{pmatrix}^{-1}&0\end{bmatrix}$

∴ $C^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&\frac12&0&0\\0&0&1&-2&-5\\0&0&\frac12&-1&-3\\-7&-3&0&0&0\\-5&-2&0&0&0\end{bmatrix}$

[例]. $A^2=A$，$B^2=B$，$R(A+B-E)=n$，$R(B)=k$，求 $R(AB)$，$R(A)$？

⇒ $A+B-E$满秩 ∴可逆

∴ $n=R(A(A+B-E))=R(AB)=R(A)$

$n=R((A+B-E)B)=R(AB)=R(B)$

[例] $A_{n\times n}$，$A^TA=E$，n为奇，求$|E-A|$？

$|E-A|=|A^T-E||A|=|A^T-E^T|=|(A-E)^T|$

$=|A-E|=(-1)^n|E-A|=-|E-A|$

∴ $|E-A|=0$.

[例] $A_{n\times n}$ $B_{n\times n}$，$|A+B|=2$，$|A-B|=1$.

求 $\begin{vmatrix}A&B\\B&A\end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix}A&B\\B&A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A+B&A+B\\B&A\end{vmatrix}\xrightarrow{c_2-c_1}\begin{vmatrix}A+B&0\\B&A-B\end{vmatrix}$

$\Rightarrow\begin{vmatrix}A&B\\B&A\end{vmatrix}=|A+B||A-B|$

[例] $|A|=2$，$|B|=3$，$|A^{-1}+B|=2$

求 $|A+B^{-1}|=\frac43$.

[例] $A_{n\times n}$，$AX=\alpha$对任意向量α均有解，则对任意向量β，A^*X有唯一解.

由于$AX=\alpha$对任意α均有解，故 $r(A)=n$，即$|A|\ne0$，∴ $|A^*|=|A|^{n-1}\ne0$

∴由Cramer法则，$A^*X=\beta$有唯一解.

$A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}^5 \Rightarrow$ 第三列×2加到第二列 $n=3$，则 $|-A^*|=|A^*|$

可逆阵 $\xrightarrow{\text{初等变换}}$ E. ；可逆阵只经行(列)变换即可得单位阵

②转置

$$\begin{cases}E'(i,j)=E(i,j)\\ E'(j(k))=E(j(k))\\ E'(i,j(k))=E(j,i(k))\end{cases}$$

③左乘行，右乘列：

推 $E_n(i,j(k))$ 右乘A：

把A的第i列×k加到第j列

3.三种关系

①初等阵与初等变换关系

$A\xrightarrow{\text{初等变换}}B \Leftrightarrow \exists P_1\cdots P_n,Q_1\cdots Q_n$ 使 $P_1\cdots P_nAQ_1\cdots Q_n=B$.

②初等阵与可逆阵：A可逆，$A\xrightarrow{\text{初}}E$

$\exists$初等阵使 $P_1\cdots P_nAQ_1\cdots Q_n=E$

$\therefore A=P_n^{-1}\cdots P_1^{-1}Q_n^{-1}\cdots Q_1^{-1}$

$\therefore$ A可逆 $\Leftrightarrow$ $\exists$初等阵使 $A=P_1\cdots P_n$

注：因初等阵可逆，且可逆阵之积仍可逆，故A可逆

③可逆阵与初等变换

$A\xrightarrow{\text{行}}B \Leftrightarrow \exists$可逆P使 $PA=B$

$A\xrightarrow{\text{列}}B \Leftrightarrow \exists$可逆P使 $AP=B$

$A\xrightarrow{\text{初}}B \Leftrightarrow PAQ=B$

[结论]：$R(PA)=R(AQ)=R(PAQ)=R(A)$

$\Rightarrow$ A乘可逆阵则秩不变

[应用]：$A_{n\times n}$，$R(AB)<R(B)$，则有A不可逆（✓）.

[应用2]：$A\xrightarrow{\text{初}}\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}$*

$\Rightarrow PAQ=\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(1\,0\,0\,0)$

$\therefore A=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot(1\,0\,0\cdots0)Q^{-1}$

即：可表为*式的矩阵A可拆分为一个列阵与一个行阵之积 ✗

4.初等变换法求逆：$(A|E)\xrightarrow{\text{行}}(E|A^{-1})$

[思想] $PAQ=E \Rightarrow \begin{cases}AQP=E\\QPA=E\end{cases}$

P.Q为一系列初等阵

$\therefore$ A可只经行(列)变换为单位阵

(前提：A可逆)

即：$\exists$初等阵 $P_1\cdots P_n$ 使 $P_1\cdots P_nA=E$

$\therefore P_1\cdots P_nE=A^{-1}$.

① $(A|E)\xrightarrow{\text{行}}(E|A^{-1})$ ⇒可以互换某两行

② $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{pmatrix}E\\A^{-1}\end{pmatrix}$.

(eg). $A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-2&1&1\\2&-1&4\end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&0\\-2&1&1&0&1&0\\2&-1&4&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&0\\0&1&3&2&3&0\\0&0&5&0&1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(E\,\middle|\,\begin{array}{ccc}1&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\2&\frac{12}{5}&-\frac{3}{5}\\0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{array}\right)$

③ $(A|B)\xrightarrow{\text{行}}(E|A^{-1}B)$

$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{pmatrix}E\\BA^{-1}\end{pmatrix}$

(eg) $A_{n\times n}$可逆，$A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}B$，求 AB^{-1}.

$\Rightarrow E_n(i,j)A=B \quad\therefore E(i,j)AB^{-1}=E$

$\therefore AB^{-1}=E^{-1}(i,j)=E(i,j)$.

九.分块矩阵之四则运算

•设A.B行数.列数分别相同，且A.B分块方法也相同：

①加法：对应块相加

②数乘：$kA=\begin{pmatrix}kA_{11}&\cdots&kA_{1t}\\ \vdots&&\vdots\\ kA_{s1}&\cdots&kA_{st}\end{pmatrix}$.

•设 $A_{m\times n}$，$B_{n\times p}$，对A的列的分法与对B的行的分法完全一致.

①乘法：$AB=C$.（行同A，列数同B

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}$.

② eg(常见矩阵分法).

$A(B_1\cdots B_p)=(AB_1\ \ AB_2\cdots AB_p)$

$\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}A_1B\\ \vdots\\ A_mB\end{pmatrix}$

(eg). $A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)$ $B=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\ \hline 1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{array}\right)$

$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}E_2&0\\A_1&E_1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}B_{11}&E_2\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$

$\therefore AB=\begin{pmatrix}B_{11}&E_2\\A_1B_{11}+B_{21}&A_1+B_{22}\end{pmatrix}$

$\therefore AB=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\-2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{pmatrix}$

(eg2). $\left(\begin{array}{c|c|c|c}a&b&c&d\\e&f&g&h\\i&j&k&l\\m&n&o&p\end{array}\right)$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \hline 5&6&7&8\\ \hline 9&10&11&12\\ \hline 13&14&15&16\end{pmatrix}$

⇒左列分法=右行分法.

③常见分法补充

A行分.B列分：

$AB=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix}(B_1\cdots B_n)=\begin{pmatrix}A_1B_1&A_1B_2&\cdots&A_1B_n\\A_2B_1&A_2B_2&\cdots&A_2B_n\\ \vdots&&&\vdots\\A_mB_1&A_mB_2&\cdots&A_mB_n\end{pmatrix}$

A列分.B行分

$AB=(\alpha_1\cdots\alpha_m)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}=\alpha_1\beta_1+\cdots+\alpha_m\beta_m$

[例]若 $A^2=E$，则 D

A. $A+E$可逆　B. $A-E$可逆

C. $A\neq E$时，$A+E$可逆

D. $A\neq E$时，$A+E$不可逆

[例]设A.B为n阶方阵，$AB+BA=E$，①

求证 $A^3B+BA^3=A^2$

①左乘 A^2：$A^2AB+A^2BA=A^2$

①右乘 A^2：$ABA^2+BA^3=A^2$

相加：$A^3B+BA^3+A(AB+BA)A=2A^2$

$\therefore A^3B+BA^3=A^2$.

[例]设A为n阶反对称阵（$A^T=-A$）.证：

①对任意向量x，均有 $x^T(E+A)x\geq0$.

$x^T(E+A)x=[x^T(E+A)x]^T=x^T(E+A)^Tx$

$=x^T(E-A)x \quad \therefore x^TAx=0$

$\therefore$ 所求 $=x^Tx\geq0$.

② $B=(E-A)(E+A)^{-1}$为正交阵（$B^TB=E$）

[例] $A_{m\times n}$，$r(A)=r<\min(m,n)$，求证 $|AA^T|=0$.

$\Rightarrow r(AA^T)\leq r(A)=r<\min(m,n)$

$\therefore |AA^T|=0$.

[例]若A.B.$AB-E$均为可逆阵，证明：$(A-B^{-1})$和 $(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$均可逆.

① $A-B^{-1}=(AB-E)B^{-1}$

可逆×可逆⇒仍可逆

② $(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}=(A-B^{-1})^{-1}[E-(A-B^{-1})A^{-1}]$

$=(A-B^{-1})^{-1}(AB)^{-1}$.

[例]设A.B可逆，则 $A^{-1}+B^{-1}$可逆

$\Leftrightarrow$ A+B可逆

$\Rightarrow A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$

$\therefore (A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$.

即：$A^{-1}+B^{-1}$可逆 $\Leftrightarrow$ A+B可逆

[例]A.B.C均为n阶方阵，$M=\begin{pmatrix}A&0\\C-B&B\end{pmatrix}$.

证明：M可逆 $\Leftrightarrow$ A.B可逆（求|M|即可）

$|M|=\begin{vmatrix}A&0\\C-B&B\end{vmatrix}=|A||B|$

[例] $A_{m\times n}$阵，$r(A)=m$，证明：

$\exists$列满秩阵B，使 $AB=E_m$

解：因为A行满秩，所以存在列A的m阶可逆子方阵 A_1及可逆阵P 使 $AP=(A_1\ A_2)$

令 $B=P\begin{pmatrix}A_1^{-1}\\0\end{pmatrix}$，则 $AB=AP\begin{pmatrix}A_1^{-1}\\0\end{pmatrix}=E_m$.

[例]设n阶矩阵A与B等价，必有 D

A.当 $|A|=a\,(a\neq0)$时，$|B|=a$.

B.当 $|A|=a\,(a\neq0)$时，$|B|=-a$

C.当 $|A|\neq0$，$|B|=0$

D.当 $|A|=0$时，$|B|=0$. ⇒A.B秩相同

C. $a\neq b$且 $a+2b=0$　D. $a\neq b$且 $a+2b\neq0$.

⇒令 $|A|=0$即可.

☆等价矩阵秩相同

$\begin{pmatrix}O_{n\times p}\\2E_p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}O_{n\times p}\\-2E_p\end{pmatrix}=O_{(n+p)\times p}$. $(-1)^n=(-1)^{n^2}$ $E(i,j)\cdot E(i,j)=E$? $\begin{pmatrix}1&1\\0&4\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&1+4+\cdots4^{n-1}\\0&4^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac13(4^n-1)\\0&4^n\end{pmatrix}$

A与B^T均列满秩 $\begin{cases}AC=AD\Rightarrow C=D\\CB=DB\Rightarrow C=D\end{cases}$ (列满能左消去，行满能右消去)。

1.分块阵其他运算.

1.转置(关于对角线对称)

① $\begin{pmatrix}A_1\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}^T=(A_1^T\ A_2^T\cdots A_n^T)$

② $(A_1\cdots A_n)^T=\begin{pmatrix}A_1^T\\\vdots\\A_n^T\end{pmatrix}$

③ $A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1t}\\A_{21}\\\vdots\\A_{s1}&\cdots&A_{st}\end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T&A_{21}^T&A_{s1}^T\\A_{12}^T&\cdots&\vdots\\A_{1t}^T&\cdots&A_{st}^T\end{pmatrix}$

(eg).

2.分块三角阵与分块对角阵

① $\begin{bmatrix}A&O\\C&B\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}A&D\\O&B\end{bmatrix}$

当A,B为方阵时 $\det=|A||B|$

(不论上三角 or 下三角).

(eg). $A_{n\times n}$非奇异，$B_{n\times 1}$，b常数

$P=\begin{bmatrix}E_n&O\\-B^TA^*&|A|\end{bmatrix}$ $Q=\begin{bmatrix}A&B\\B^T&b\end{bmatrix}$

试证：PQ可逆 $\Leftrightarrow B^TA^{-1}B\neq b$.

$\Rightarrow PQ=\begin{bmatrix}A&B\\-|A|B^T+|A|B^T&-B^TA^*B+|A|b\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}A&B\\O&|A|(b-B^TA^{-1}B)\end{bmatrix}$

$\therefore|PQ|=|A|^2(b-B^TA^{-1}B)$

$\because A$非奇异 $\Leftrightarrow|A|\neq0$.

$\therefore|PQ|\neq0\Leftrightarrow b-B^TA^{-1}B\neq0$

法二：$\begin{cases}PQ可逆\\P可逆\end{cases}\Longleftrightarrow Q$可逆

$\therefore$ 可以只求$|Q|$，令其不为零.

② 分块对角阵

$\begin{bmatrix}A_1&&O\\&A_2\\O&&\ddots A_n\end{bmatrix}$

• 当$A_1\cdots A_n$为方阵时，

$\left|\begin{bmatrix}A_1\\&\ddots\\&&A_n\end{bmatrix}\right|=|A_1|\cdots|A_n|$

$\begin{bmatrix}A_1\\&\ddots\\&&A_n\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}A_1^k\\&\ddots\\&&A_n^k\end{bmatrix}$

• 当$A_1\cdots A_n$均可逆时，

$\begin{bmatrix}A_1\\&\ddots\\&&A_n\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1}\\&A_2^{-1}\\&&\ddots A_n^{-1}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}&&A_1\\&\iddots\\A_n\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}&&A_n^{-1}\\&\iddots\\A_1^{-1}\end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix}O&A_m\\B_n&O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}A_m\\&B_n\end{vmatrix}$

(m列移n次)

$\begin{vmatrix}A_{m\times p}\\B_{n\times p}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}B\\A\end{vmatrix}$

[例] $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, $R(A)=n$, 试证$R(AB)=R(B)$

$\Rightarrow R(AB)\leq R(B)$

$\Leftarrow R(AB)+\cancel{n}\geq R(\cancel{A})+R(B)$

$\therefore R(AB)=R(B)$

3分块阵的初等变换

①换法：交换分块阵的某两行.

②倍法：用可逆矩阵左乘分块阵的某一行.

③消法：用矩阵左乘某一行加到另一行去

用矩阵右乘某一列加到另一列去.

④分块初等阵(均可逆)

$r_i\leftrightarrow r_j$ $\begin{pmatrix}O&E_n\\E_m&O\end{pmatrix}$

$P(r_1)$ $\begin{pmatrix}P&O\\O&E_n\end{pmatrix}$ $C_2(Q)\begin{pmatrix}E_m&O\\O&Q\end{pmatrix}$

r_2+kr_1 $\begin{pmatrix}E_m&O\\K&E_n\end{pmatrix}$

(eg). $\begin{pmatrix}O&E\\E&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C&D\\A&B\end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix}P&E\\E&O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}PA&PB\\C&D\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}E&O\\K&E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C&B\\KA+C&KB+D\end{bmatrix}$

⑤用分块阵解决三类问题

分块阵初等变换R不变

分块阵消法变换不改变行列式的值

$\left[\begin{array}{cc|cc}A&B&E&O\\C&D&O&E\end{array}\right]\xrightarrow{行}\left[\begin{array}{cc|cc}E&O&A_1&B_1\\O&E&C_1&D_1\end{array}\right]$ 逆矩阵

4.秩的性质.

① $R\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=R(A)+R(B)$

② $R\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}\geq R(A)+R(B)$

③ $R(A\vdots B)\leq R(A)+R(B)$

④ $R(A\pm B)\leq R(A)+R(B)$

⑤ $R(AB)\leq\min\{R(A),R(B)\}$

⑥ $A_{m\times n}$ $B_{n\times p}$，则：$R(AB)\geq R(A)+R(B)-n$

特：$AB=O$时，$R(A)+R(B)\leq n$

$\Rightarrow$设$R(A)=r_1$ $R(B)=r_2$

$P_1AQ_1=\begin{bmatrix}E_{r_1}&O\\O&O\end{bmatrix}$ $P_2BQ_2=\begin{bmatrix}E_{r_2}&O\\O&O\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$① $R\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}P_1AQ_1\\&P_2BQ_2\end{bmatrix}=R(A)+R(B)$

② $R\begin{bmatrix}A&C\\O&B\end{bmatrix}=R\left[\begin{array}{c|c}E_{r_1}\ O&*\\O\ O\\\hline O\ O&E_{r_2}\ O\\O\ O&O\ O\end{array}\right]$

④ $\cancel{R(A)+R(B)}=R\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}A&A+B\\O&B\end{pmatrix}\geq R(A+B)$
$R(A)+R(B)=$

$R(A-B)\leq R(A)+R(-B)=R(A)+R(B)$

⑤ $(A,O)\to(A,AB)$

$\therefore R(AB)\leq R(A,AB)=R(A)$

$\begin{pmatrix}O\\B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}AB\\B\end{pmatrix}\therefore R(AB)\leq R(B)$

⑥ $\begin{bmatrix}AB&O\\O&E_n\end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}AB&A\\O&E_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}O&A\\-B&E_n\end{pmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}-B&E_n\\O&A\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}B&-E_n\\O&A\end{bmatrix}\geq R(A)+R(B)$

[例] 已知 $A=\begin{bmatrix}3&1\\&3&1\\&&3\\&&&3&-1\\&&&-9&3\end{bmatrix}$ 求A^n

设 $B=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$ 则 $B^n=\begin{pmatrix}3^n&C_n^13^{n-1}&C_n^23^{n-2}\\0&3^n&C_n^13^{n-1}\\0&0&3^n\end{pmatrix}$

设 $C=\begin{pmatrix}3&-1\\-9&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}(3\ \ -1)$

则 $C^n=6^{n-1}C$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}3^n&C_n^13^{n-1}&C_n^23^{n-2}\\0&3^n&C_n^13^{n-1}&&O\\0&0&3^n\\&&&3\cdot6^{n-1}&-6^{n-1}\\&O&&-9\cdot6^{n-1}&3\cdot6^{n-1}\end{pmatrix}$

[例] 已知A,B均为n阶矩阵，$A^2=A$, $B^2=B$, $(A+B)^2=A+B$，证明$AB=O$

$\Rightarrow AB+BA=O$，左乘A，右乘A得

$\begin{cases}A^2B+ABA=O\Rightarrow AB+ABA=O\\ABA+BA=O\end{cases}$

$\therefore AB=BA=O$.

[例] 设有2个非零矩阵：

$A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)^T$, $B=(b_1\cdots b_n)^T$

① 求$r(AB^T)$ $(a_i\neq0)(b_i\neq0)$

$\Rightarrow AB^T=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}\neq O$

各行是第一行的倍数 $\therefore r(AB^T)=1$

② 设$C=E-AB^T$，证明 $C^TC=E-BA^T-AB^T+BB^T\Leftrightarrow A^TA=1$

$\Rightarrow C^TC=(E-BA^T)(E-AB^T)$

$=E-BA^T-AB^T+BA^TAB^T$

$\therefore$只需令 $BA^TAB^T-BB^T=O$

即：$B(A^TA-1)B^T=O$

[例] $X_{n\times1}$, $Y_{n\times1}$, $X^TY=2$, $A=E_n+XY^T$，求A^{-1}.

$\Rightarrow|A|=|E+Y^TX|=3\ \therefore$可逆.

$A^2=E+X\underbrace{Y^TX}_{2}Y^T+2XY^T$

$\therefore A^2=E+4XY^T=4A-3E$

$\therefore\frac13(4E-A)A=E$.

[例] $R(A)=2$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $R(AB)=2$

AB可逆

[例] $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$，计算：

$\begin{pmatrix}A&B\\O_{p\times n}&2E_p\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}O_{m\times p}\\E_p\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}O_{n\times p}\\-E_p\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}A'O_{m\times p}+O_{n\times p}\cdot E_p\\B'O_{m\times p}+2E_pE_p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}O_{n\times p}\\-2E_p\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}O_{n\times p}\\2E_p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}O_{n\times p}\\-2E_p\end{pmatrix}$

$=O_{(n+p)\times p}$.

Date:

☆.注意2个括号间的和差、积.

$A_n^2=E_n$，则 $R(A+E)+R(A-E)=n$.

Cramer：$AX=B$ $(|A|\neq 0)\Rightarrow$ 有唯一解 X

B左乘列满秩阵秩不变，右乘行满秩阵R不变！

$R(A_{m\times n})=n, AB=0\Rightarrow B=0$

$R(D_{m\times n})=m, CD=0\Rightarrow C=0$

(eg) $A_{n\times n}$，且 $3E_n+4A=4A^2$，求证 $R(E_n+2A)+R(3E_n-2A)=n$.

∵二者积为0，知：左 $\le n$ ⑥.

左 $\ge R$(二者之和) $=R(4E_n)=n$.

∴左 $=n$.

(eg) $R(AB-E)=R(AB-B+B-E)$

$\le R(AB-B)+R(B-E)$

$\le R(A-E)+R(B-E)$.

☆ $R[B(A-E)]\le\min\{R(B), R(A-E)\}$.

☆. $R(AB-E)\le R(A-E)+R(B-E)$.

(eg). A可逆 求 $R\begin{pmatrix}A & 0\\ B & E_n\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}A & 0\\ B & E_n\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-BA^{-1}r_1)}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & E_n\end{pmatrix}$

(eg). A_n 可逆

$R\begin{pmatrix}A & 2A\\ 2A & A\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}A & 2A\\ 0 & -3A\end{pmatrix}$

$=R\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & -3A\end{pmatrix}=2R(A)=2n$.

[例] 求方阵的m次幂

① $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

⇒设 $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 则 $A=B+2E_3$

而 $B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 0\end{pmatrix}$ B^3 及之后全为0

∴ $A^m=C_m^0B^0(2E_3)^m+C_m^1B^1(2E_3)^{m-1}+C_m^2\cdot B^2\cdot(2E_3)^{m-2}$

$=2^m\cdot E_3+m\cdot 2^{m-1}\cdot B+\frac{m(m-1)}{2}\cdot 2^{m-2}\cdot B^2=$

$\begin{bmatrix}2^m & 0 & 0\\ -3m\cdot 2^{m-1} & 2^m & 0\\ m(19-3m)\cdot 2^{m-3} & m\cdot 2^{m-1} & 2^m\end{bmatrix}$

② $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -2 & 3\\ -4 & 2 & 4 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 6 & -3 & -6 & 9\end{bmatrix}$ 归纳法知：⇒ $A^m=13^{m-1}\cdot A$

③ $A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 分块对角.

$A^m=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}^m & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^m\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^m=\begin{cases}\begin{bmatrix}5^m & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5^m & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2^m\end{bmatrix} & m\text{为偶数}\\ \begin{bmatrix}3\times 5^{m-1} & 4\times 5^{m-1} & 0 & 0\\ 4\times 5^{m-1} & -3\times 5^{m-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2^m\end{bmatrix} & m\text{为奇}\end{cases}$

[例] 求矩阵的秩]：

① $A=\begin{bmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{bmatrix}$

$A\to\begin{bmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1\\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1\end{bmatrix}\to$

$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & \lambda\\ 0 & 1 & \lambda+2 & -1-2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda-3 & 9-3\lambda\end{bmatrix}$ ∴ $r(A)=\begin{cases}2 & \lambda=3\\ 3 & \lambda\neq 3\end{cases}$

② $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{bmatrix}$

$r(B)=\begin{cases}1, & a=b=c\\ 2, & a=b\neq c \text{ 或 } a=c\neq b \text{ 或 } b=c\neq a\\ 3, & a\neq b\text{且}a\neq c\text{且}b\neq c\end{cases}$

[例] 有关tr(对角线元素和)]

设A.B为n阶方阵，P为n阶可逆阵

① $tr(AB)=tr(BA)$；$tr(-A)=-tr(A)$

⇒设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $B=(b_{ij})_{n\times n}$

∴ $tr(AB)=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki})=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik})$

$=tr(BA)$.

② $tr(P^{-1}AP)=tr(A)$

$\Rightarrow tr(P^{-1}AP)=tr(PP^{-1}A)$.

☆ tr内部运算可交换顺序.

(eg.) 设A为n阶方阵，证明：不存在矩阵B，使 $AB-BA=E$.

$tr(AB-BA)=tr(AB)-tr(BA)=0$

但 $tr(E_n)=n\neq 0$ ∴得证

③ A_{ij} 为A中元素 a_{ij} 的代数余子式，且 $AB=(B-A^*)A$，证明：$|A|=0$；当 $a_{ij}=A_{ij}$ 时，如果A为实矩阵，则 $A=0$.

$\Rightarrow BA-AB=|A|E$

而 $tr(AB)\cdot tr(BA)$，即 $AB-BA$ 的主对角线元素和一定为0

∴ $tr(BA-AB)=tr(|A|E)=n|A|=0$

∴ $|A|=0$.

行列式展开：$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$

∴ $a_{ij}=0$ 即 $A=0$

5.分块阵行列式

① ：$A_{n\times n}$ 可逆 $B_{n\times m}$

则 $\begin{vmatrix}A & C\\ D & B\end{vmatrix}=|A||B-DA^{-1}C|$.

☆左乘行右乘列.

$\Rightarrow\begin{vmatrix}A & C\\ D & B\end{vmatrix}\neq|AB-CD|$ 欲使相等

则需 $\begin{cases}A.B\text{均为n阶方阵}.A\text{可逆}\\ AD=DA\end{cases}$.

② A.B均为n阶方阵，则 $|AB|=|A||B|$

$|AB|=\begin{vmatrix}AB & A\\ 0 & E_n\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{向左加}]{\text{右}\times -B}\begin{vmatrix}0 & A\\ -B & E_n\end{vmatrix}$

$=(-1)^{n^2}\begin{vmatrix}-B & E\\ 0 & A\end{vmatrix}=(-1)^{n^2}|-B||A|=|A||B|$

[例] A.B都是m×n阶矩阵，A经初等行变换可化成B，若记 $A=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ $B=(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n)$，则当 $\beta_i=\sum_{j=1,j\neq i}k_j\beta_j$ 时，

$\alpha_i=\sum_{j\neq i}k_j\alpha_j$.

⇒∃可逆阵P使：

$P(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)=(P\alpha_1, P\alpha_2\cdots P\alpha_n)=(\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_n)$

∴ $\beta_i=P\alpha_i$ 而 $\beta_i=\sum_{j=1,j\neq i}k_j\beta_j$

∴ $P\alpha_i=\sum_{j=1,j\neq i}k_jP\alpha_j$ 同时左乘 P^{-1}

∴ $\alpha_i=\sum_{j=1,j\neq i}k_j\alpha_j$

[例] 设A为n阶方阵，则 $R(A)\le 1$ 的充要条件是存在2个n×1的矩阵U.V使 $A=UV'$.

正向：

若 $R(A)=0$，取 $U=V'=(0,0\cdots 0)'$

有 $A=UV'$

若 $R(A)=1$，则A可化为 $\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$

∴∃可逆P.Q使 $A=P\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & & 0\end{bmatrix}Q$

∴ $A=P\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}(1\cdots 0)Q$

∴ $U=P\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ $V'=(1\cdots 0)Q$

反向：

$R(U\cdot V')\le R(U)\le 1$

∴ $R(A)=R(UV')\le R(U)\le 1$

[例] 设4阶方阵 $A=(\alpha\ X\ Y\ Z)$ $B=(\beta\ X\ Y\ Z)$，$|A|=4$，$|B|=1$ 求 $|A+B|$

$\Rightarrow|A+B|=|\alpha+\beta\ \ 2X\ \ 2Y\ \ 2Z|$

$=8|\alpha+\beta\ X\ Y\ Z|$

$=8(|\alpha\ X\ Y\ Z|+|\beta\ X\ Y\ Z|)=40$.

[例] A.B都是m×n矩阵，求证：A与B等价的充要条件是 $R(A)=R(B)$)

正向：因初等变换不改秩，故成立

反向：∃可逆阵使(设 $R(A)=R(B)=r$)

$P_1AQ_1=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times n}=P_2BQ_2$

∴ $P_2^{-1}P_1AQ_1Q_2^{-1}=B$

即A经初等变化可变为B ∴A.B等价.

[例] 设 $A_{n\times n}$ $R(A)=1$，$tr(A)=2$，求 $|\lambda E_n-A|$

⇒存在2个n×1矩阵使 $A=UV'$，再由 $tr(A)=2$ 知：$V'U=tr(A)=2$

∴由降阶公式知：

$|\lambda E_n-UV'|=\lambda^{n-1}|\lambda-V'U|=\lambda^{n-1}|\lambda-2|$

分块R: $\begin{pmatrix}A&B\\C&O\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E&O\\O&F\end{pmatrix}=R(E)+R(F)$.

$\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&y\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{A^2}\begin{bmatrix}0&0&xy\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{n\geq3}O_{3\times3}$

$\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}^{2n}=\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}^{2n}=\begin{bmatrix}5^{2n}&0\\0&5^{2n}\end{bmatrix}$. $R\begin{pmatrix}B\\AB\end{pmatrix}=R(B)$

※ $A_{2\times2}$, 则 $R(A)=R(A^*)$ $(A^{-1})^*=|A|A^{-1}$

③ $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, 求证: $|E_m-AB|=|E_n-BA|$

左 $=\begin{vmatrix}E_m&A\\B&E_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}E_m-AB&O\\B&E_n\end{vmatrix}$

右 $=\begin{vmatrix}E_m&A\\B&E_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}E_m&A\\O&E_n-BA\end{vmatrix}=|E_n-BA|$

推: $|E_m+kAB|=|E_n+kBA|$

应用: $A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $B=(1,0,2)$ 求 $|E_3-AB|$

$=|E_1-BA|$

$=1-3=-2$.

降阶公式.

[结论]: 对于 $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$.

$\begin{cases}|\lambda E_m-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda E_n-BA| & (m>n)\\ |\lambda E_n-AB|=|\lambda E_n-BA|. & (m=n)\end{cases}$

证: $|\lambda E_m-AB|=\lambda^m|E_m-\frac{1}{\lambda}AB|$

$=\lambda^m|E_n-\frac{1}{\lambda}BA|=\lambda^{m-n}|\lambda E_n-BA|$ $(\lambda\neq0)$

而 $\lambda=0$ 时, $|0E_m-AB|=0^{m-n}|0E_n-BA|$

即证 $|AB|=0$

$R(AB)\leq R(A)\leq\min\{m,n\}$

∴ AB 不是满秩, 则 $|AB|=0$.

法二: $|AB|=\left|(A,\ O_{m\times(m-n)})\begin{pmatrix}B\\O_{(m-n)\times n}\end{pmatrix}\right|$

$=|A\ O|\begin{vmatrix}B\\O\end{vmatrix}=0$

(例)求 $\begin{vmatrix}3+a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3&a_1b_4\\a_2b_1&3+a_2b_2&a_2b_3&a_2b_4\\a_3b_1&a_3b_2&3+a_3b_3&a_3b_4\\a_4b_1&a_4b_2&a_4b_3&3+a_4b_4\end{vmatrix}$

$=\left|3E_4+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}[b_1,b_2,b_3,b_4]\right|$

$=3^{4-1}\left|3E_1+(b_1\cdots b_4)\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_4\end{pmatrix}\right|$

$=3^3(3+\sum_{i=1}^{4}a_ib_i)$.

6. 关于求逆

① $A_{n\times n}$, $B_{m\times m}$ 均可逆, 求 $\begin{bmatrix}A&O\\D&B\end{bmatrix}^{-1}$ 和 $\begin{bmatrix}C&A\\B&\end{bmatrix}^{-1}$

解: $\left[\begin{array}{cc|cc}A&O&E&O\\D&B&O&E\end{array}\right]\xrightarrow{行变换}\left[\begin{array}{cc|cc}A&O&E&O\\O&B&-DA^{-1}&E\end{array}\right]$

$=\left[\begin{array}{cc|cc}E&O&A^{-1}&O\\O&E&-B^{-1}DA^{-1}&B^{-1}\end{array}\right]$ (第一行左乘 A^{-1}, 第二行左乘 B^{-1})

7. 关于幂.

① $R(A)=1$, 求 A^n. (拆开A).

$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\2&-2&-2&2\end{bmatrix}$ (每行都成比例)

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\2\end{bmatrix}(1,-1,-1,1)$ 公约数 第一行

② $A=PBP^{-1}$, 求 A^n

$\Rightarrow A^n=PB^nP^{-1}$.

③ $\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}^n=(2E+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix})^n$.

④ $\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}A^n&O\\O&B^n\end{bmatrix}$

8. 结论:

① $A_{n\times n}$, A^* 与 A 的R关系.

$R(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n\\1, & R(A)=n-1\\0, & R(A)<n-1\end{cases}$

② 有关 $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 为方阵A的迹

$\begin{cases}tr(A\pm B)=tr(A)\pm tr(B)\\tr(kA)=k\cdot tr(A)\\tr(AB)=tr(BA)\\AB-BA\neq E_n\ (左tr=0, 右tr=n)\end{cases}$

③ $A_{m\times n}$, 对任意 $n\times1$ 矩阵B都有 $AB=O_{m\times1}$, 则 $A=O$.

若 $A\neq0$, 可设 $(A)_{ij}\neq0$

设B中 b_j 不为0, 其余元素为0

∴ AB 中有一元素 $a_{i1}b_1+a_{i2}b_2+\cdots+a_{ij}b_j+\cdots a_{in}b_n$

$=a_{ij}b_j\neq0$ 与 $AB=O_{m\times1}$ 矛盾

故 $A=O$. 法二: 令 $E=(e_1,\cdots e_n)$, 则 $Ae_i=0$ ∴ $A=AE=(0,0\cdots0)=0$

④ 有关矩阵方程.

ⓐ $A^*BA=2BA-8E$.

$\Rightarrow(2E-A^*)BA=8E$.

∴ $B=8(2E-A^*)^{-1}A^{-1}=8(2A-|A|E)^{-1}$

⑤ $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$, 且 $R(A)=R(B)$, 则 $A\cong B$.

秩相等不等价

秩相等+同型→等价.

⑥ $A^T=A$, $A^2=O\Rightarrow|A|=0$

⑦ 每一行都成比例, $R=1$

则 $\begin{vmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{vmatrix}$, 其中 $a_i\neq0$, $b_i\neq0$ $=1$.

⑧ $A=(a_{ij})_{4\times4}$; $B=(b_{ij})_{4\times4}$ 且 $a_{ij}=-2b_{ij}\Rightarrow A=-2B$.

[例]. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\x&4&6\\3&y&9\end{pmatrix}$ 求 $R(A)$

$A\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4-2x&6-3x\\0&y-6&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2\\0&6-3x&4-2x\\0&0&y-6\end{pmatrix}$

∴ $R(A)=\begin{cases}3, & x\neq2且y\neq6\\2, & x=2且y\neq6\\2, & x\neq2且y=6\\1, & x=2且y=6.\end{cases}$

[例] $R(A)=n-1$, 求 $R(A^*)$?

$A^*A=|A|E=0$

∴ $R(A^*)+R(A)\leq n$ ∴ $R(A^*)\leq1$

∵ $R(A)=n-1$

∴ A中至少有一个 $n-1$ 阶子式不为0

而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ ∴ $A^*\neq0$

∴ $R(A^*)\geq1$ ∴ $R(A^*)=1$

[例]. 若 $R(A)<n-1$ 时, 所有 $n-1$ 阶子式全为0. 即 $A^*=(0)$.

eg. 设4阶A.B的伴随为 A^*, B^*, 且 $R(A)=3$, $R(B)=4$, 则 $R(A^*B^*)=1$

[例] 设A.B为n阶矩阵, 下列论述不正确的是 C

A. A可逆 且 $AB=O$, 则 $B=O$.

B. AB中有一个不可逆, 则AB不可逆

C. A.B可逆, 则 $A+B$ 可逆

D. A.B可逆, 则 A^TB 可逆

[例] 设A.B是2个n阶非零矩阵, 满足 $AB=0$, 则A与B的秩 C

C 都小于n D 和小于n

$R(A)+R(B)\leq n$

非0矩阵 $\Leftrightarrow R(A)\geq1$, $R(B)\geq1$

[判断]

① $A_{n\times n}$, $A^2=A$, 则 $A=0$ 或 $A=E$ (×)

② $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, 若 $m>n$, 则 $|AB|=0$ (√) $R(AB)<m$

③ 若 $A_{n\times n}$ 的 $A^*=0$, 则 $|A|=0$ (√)

④ 对方阵进行初等变换不改变矩阵行列式 (×) $\Rightarrow$ 换法改.

⑤ $\begin{vmatrix}E_m&A\\B&E_n\end{vmatrix}=|E_m-AB|=|E_n-BA|$ (√)

⑥ 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0$, $i=1,2\cdots n$, 则A不可逆 (√)

$\Rightarrow$ 每列加到1列 $\begin{vmatrix}\sum a_{ij}&\cdots\\\sum&\cdots\\\vdots&\\\sum&\end{vmatrix}=0$

⑦ $|A_n|=0$, $A^*\neq0$, 则 $R(A)=n-1$ (√)

⑧ A.B都为n阶, A非零, $AB=0$, 则B必有 $|B|=0$ (√) $\Rightarrow$ 看秩

⑨ $A^2=E$, $A\neq E$, 则 $|A+E|=0$ (√) $\Rightarrow$ 看R 逆否

$[\vec a\vec b\vec c]$. $[\vec b\vec c\vec a]$. $[\vec c\vec a\vec b]$ 均为左/右手系相同，而另外三个即为右/左手系！

$\vec a\times\vec b=\vec 0 \Leftrightarrow \vec a\parallel\vec b$.　证 $\vec a=\vec 0$，去 $\vec a^2$ 即可.

系数行列式 $\neq 0$ 线方程组有唯一解.

点积、混合积都是数，叉积是向量.

第三章：几何向量.

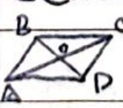
一. 几何向量定义：

1. 自由向量：与起点无关.
   平行 $\Leftrightarrow$ 共线
2. 当把 $k(k\geq 2)$ 个向量的起点放在同一点时，如果这 k 个向量的终点和它们共同的起点都在同一平面上，则称这 k 个向量共面，显然，任两个几何向量都共面
3. 单位向量：$\vec a^{0}=\frac{\vec a}{|\vec a|}$（同方向）.
   注：单位向量为 $\pm\vec a^{0}$.
4. $\vec a\parallel\vec b$ 的充要条件是存在数 λ 使 $\vec a=\lambda\vec b$ 或 $\vec b=\lambda\vec a$.

二. 向量的积

1. 向量间的夹角 $[0,\pi]$：记 $\langle\vec a,\vec b\rangle$
   ☆ $\vec 0$ 与另一向量的夹角可以在 0 到 π 间任意取值.
2. A 在轴 u 上的投影：
   过 A 作轴 u 的垂直平面 π，那么称 π 与 u 交点 A' 为 A 在 u 上投影
3. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴上投影：
   A. B 分别做 u 上投影 A'. B'，则 $\overline{A'B'}$ 为投影，记 $Prj_u\overrightarrow{AB}$.
   ☆ 投影是数，可正/负/零.
4. 投影计算公式
   ① $Prj_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$
   ② 两向量和的投影等于投影的和，即：
   $Prj_u(\vec a_1+\vec a_2)=Prj_u\vec a_1+Prj_u\vec a_2$
5. 点积.
   ① 定义：$\vec a\cdot\vec b=(\vec a,\vec b)=|a||b|\cdot\cos\theta$
   ② $\vec a\cdot\vec b=|a|Prj_a\vec b=|b|Prj_b\vec a$.
   ③ 运算法则
   △ $(\vec a_1+\cdots\vec a_n)(\vec b_1+\cdots\vec b_m)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\vec a_i\vec b_j$
   △ $\vec a\cdot\vec a\geq 0$，此外：
   $\vec a\cdot\vec a=0 \Leftrightarrow \vec a=\vec 0$
   △ 无消去律
   (eg). $\vec a+\vec b+\vec c=\vec 0$（a,b,c 为单位向量），求 $\vec a\cdot\vec b+\vec b\cdot\vec c+\vec a\cdot\vec c$
   两边乘 $\vec a,\vec b,\vec c$ 再相加
   (eg). $|\vec a+\vec b|^2+|\vec a-\vec b|^2=2|\vec a|^2+2|\vec b|^2$
   ④ $\vec a\perp\vec b \Leftrightarrow \vec a\cdot\vec b=0$
6. 向量积（外积）.
   ① $|\vec a\times\vec b|=|\vec a||\vec b|\sin\theta$
   方向：$\vec a\times\vec b\perp\vec a$，$\vec a\times\vec b\perp\vec b$
   向量 $\vec a,\vec b,\vec a\times\vec b$ 构成右手系.
   ② 应用：
   △ $|\vec a\times\vec b|$ = 以 $\vec a$、$\vec b$ 为邻边的平行四边形面积
   △ $\vec b\times\vec a$ 与 $\vec a\times\vec b$ 模同，方向相反
   △ $\vec a\times\vec b=\vec 0$ 是 $\vec a\parallel\vec b$ 的充要条件.
   △ $\vec a\times\vec a=\vec 0$
   ③ 运算规则：
   ⓐ. $\vec a\times\vec b=-\vec b\times\vec a$
   ⓑ. $(k\vec a)\times\vec b=k(\vec a\times\vec b)=\vec a\times(k\vec b)$
   ⓒ $(\vec a+\vec b)\times\vec c=(\vec a\times\vec c)+(\vec b\times\vec c)$.
   ⓓ 无消去律，无交换律.
   ⓔ $(\vec a-\vec b)\times(\vec a+\vec b)=2(\vec a\times\vec b)$
   $(\vec a+\vec b)\times(\vec a-\vec b)=2(\vec b\times\vec a)$
   ④ $\vec a\times\vec b$ 与 $k\vec a+l\vec b$ 垂直（点乘即可）
7. 混合积.
   ① 定义：$[abc]=(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c$
   ② 应用：
   ⓐ $[\vec a\vec b\vec c]=0 \Leftrightarrow$ 三向量共面.
   ⓑ $|[\vec a\vec b\vec c]|$ 是以 a. b. c 为边的平行六面体体积.
   ③ 计算规则：
   当 $\vec a$. $\vec b$. $\vec c$ 组成右手系时，得出的是正数；当 $\vec a$. $\vec b$. $\vec c$ 为左手系时，得出的数为负数
   $[\vec a\vec b\vec c]=[\vec b\vec c\vec a]=[\vec c\vec a\vec b]=-[\vec b\vec a\vec c]=-[\vec c\vec b\vec a]=-[\vec a\vec c\vec b]$
   （轮换不改变符号，对换改变符号）.

(例) 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试应用向量知识证明：它是平行四边形.



已知：$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$

$\because \overrightarrow{AD}=AO+OD=OC+BO=\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}=AO+OB=DC+DO=\overrightarrow{DC}$

（结论）已知 $|\vec a+\vec b|=|\vec a-\vec b|$，试证：$\vec a\cdot\vec b=0$

$\Rightarrow$ 左右两边平方即可证明.

（例）已知 $a=i$，$b=\vec j-2\vec k$，$\vec c=2\vec i-2\vec j+\vec k$

$\Rightarrow$ 全部写成 (x,y,z) 坐标形式.

[例]. 试证：$\vec a\times\vec b+\vec b\times\vec c+\vec c\times\vec a=\vec 0$ 的充要条件是 $\vec a$. $\vec b$. $\vec c$ 共面.

两边与 $\vec c$ 作内积、

$[\vec a\vec b\vec c]+[\vec b\vec c\vec c]+[\vec c\vec a\vec c]=\vec 0$

即，$[\vec a\vec b\vec c]=0$

☆ 混合积中有 2 个元素相同，则值为零

[例]. $\vec a=\vec i+\vec j$，$\vec b=\vec j+\vec k$，且向量 $\vec a$. $\vec b$. $\vec c$ 的长度相等，两两夹角也相等，试求 $\vec c$？

设 $\vec c=(x,y,z)$

$\therefore x^2+y^2+z^2=2$. ①

$\because$ 两两夹角相等

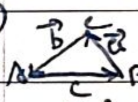
$\therefore \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}=\frac{\vec a\cdot\vec c}{|a||c|}=\frac{\vec b\cdot\vec c}{|b||c|}$

即：$x+y=y+z=1$ ②

联立①. ②得：$x=1$ 或 $-\frac{1}{3}$

$\therefore \vec c=\vec i+\vec k$ 或 $\vec c=-\frac{1}{3}\vec i+\frac{4}{3}\vec j-\frac{1}{3}\vec k$.

[例] 用数量积证明△的余弦定理



$\because \vec a+\vec b+\vec c=0$

$\therefore |a|^2=(\vec b+\vec c)\cdot(\vec b+\vec c)$

$=|b|^2+|c|^2+2\vec b\cdot\vec c$

$=b^2+c^2-2|b||c|\cdot\cos A$

[例] 用向量积证明三角形正弦定理.

对三角形同上，用叉乘表示 S 得：

$S=\frac{1}{2}|\vec a\times\vec b|=\frac{1}{2}|\vec b\times\vec c|=\frac{1}{2}|\vec c\times\vec a|$

$\therefore |a||b|\sin C=|b||c|\sin A=|c||a|\sin B$

即：$\frac{|a|}{\sin A}=\frac{|b|}{\sin B}=\frac{|c|}{\sin C}$.

[问题] 已知 L_1：$\frac{x}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{4}$

L_2：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{2}$

问 L_1. L_2 关系

$\Rightarrow$ 将 L_1 参数方程代入 L_2 得：

$2t-1=3t-1=\frac{4t-2}{2} \Rightarrow t=0$

$\therefore L_1$. L_2 共面相交于点 $(0,-3,0)$

$\Rightarrow$ 判断两直线关系可将 L_1 参数方程代入 L_2，有解：相交 or 重合；无解：异面 or 平行.

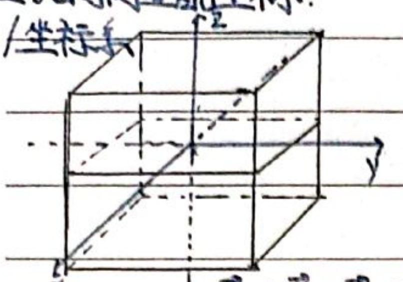
此题亦可判断三向量是否共面

以O.A.B.C为顶点的四面体$V=\frac{1}{6}[\vec{OA}\ \vec{OB}\ \vec{OC}]$.

单位方向向量：2个(±)

三.几何向量的坐标

1.坐标系



$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$，$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$，$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$，$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$，$\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$，$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

2.几何向量的坐标运算

① $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y,\ a_z\pm b_z)$.

② $k\vec{a}=(ka_x,\ ka_y,\ ka_z)$.

③ $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

④ 向量坐标用大括号、小括号都行.

$a_x=Prj_x\vec{a}$；$a_y=Prj_y\vec{a}$；$a_z=Prj_z\vec{a}$

$\vec{i}=(1,0,0)$，$\vec{j}(0,1,0)$，$\vec{k}(0,0,1)$

⑤ $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$ 两行向量按顺序写出坐标.

$=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\vec{k}$

⑥ $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$

⑦ $\vec{a}^{\circ}=\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|},\frac{a_y}{|\vec{a}|},\frac{a_z}{|\vec{a}|}\right)$

$=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$

其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$，$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$

$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$

⑧ 向量坐标记为 (a_x,a_y,a_z) 或 $\{a_x,a_y,a_z\}$.

$\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$

(eg)：$(0,1,2)/\!/(0,3,6)$.

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面：$\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=0$

3.结论

(1) $\vec{a},\vec{b}$共线 ⇔ 存在不全为0的k,l 使 $k\vec{a}+l\vec{b}=\vec{0}$

(2) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面 ⇔ 存在不全为0的k,l,p 使 $k\vec{a}+l\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

四.平面方程

1.法向量：⊥平面的非零向量.

2.点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

设$M(x,y,z)$在面上，法向量$\vec{n}=(A,B,C)$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$在π上

$\because \vec{MM_0}\perp\vec{n}$

$\therefore (x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)\cdot(A,B,C)=0$

$\therefore A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

特征：知一点和法向量.

3.一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$

其中 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

4.三点式方程：

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$，M_2，M_3是空间中不在同一直线上的三点，$M\in\pi$

$\therefore \vec{M_1M}$. $\vec{M_1M_2}$. $\vec{M_1M_3}$共面，即：

$$\begin{vmatrix}x-x_1&y-y_1&z-z_1\\x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\x_3-x_1&y_3-y_1&z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

5.截距式方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面π过$(a,0,0)$ $(0,b,0)$ $(0,0,c)$ 代入三点式方程即可证明.

条件：$abc\neq0$.

6.给出方程$Ax+By+Cz+D=0$.（A.B.C至少一个不为0）.

则其表示以$\vec{n}=(A,B,C)$为法向量的平面.

即：平面 ⟺ 三元一次方程.

注：① $D=0$，过原点

② $A=0$，平行于x轴

$B=0$，平行于y轴

$C=0$，平行于z轴.

看法向量$\vec{n}=(A,B,C)$即可.

③ $A=B=0$，$\pi/\!/xoy$面

$A=B=D=0\Rightarrow xoy$面. $n(0,0,1)$

$A=C=0$，$\pi/\!/xoz$；$y=0$，xoz面

$B=C=0$，$\pi/\!/yoz$；$x=0$，yoz面

(e.g) $2x-y+8=0$ 在平面上表示l，在空间上表示平面.

7.已知π过M_0，且$\vec{a}$、$\vec{b}$均$/\!/\pi$，求π？

$\Rightarrow\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$ 即为法向量，再用点法式方程.

法二：待定系数法，$(A,B,C)\perp\vec{a},\vec{b}$

[例3] 已知直线 $L_1:\begin{cases}x=-2-4t\\y=2+mt\\z=3+2t\end{cases}$

$L_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{n}$

(1) 求m.n使L_1与L_2共面.

$\Rightarrow[\vec{M_1M_2},\vec{s_1},\vec{s_2}]=0$

即：$\begin{vmatrix}1&-1&-1\\-4&m&2\\2&-2&n\end{vmatrix}=0$

即：$mn-4n+2m-8=0$ 即可

(2) 求m.n使$L_1\perp L_2$？

$(-4,m,2)\cdot(2,-2,n)=0$

$\therefore m-n=-4$ 即可.

[例4] 平面$\pi\perp(z=0)$ 且过由点$M_0(1,-1,1)$到直线$L:\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\end{cases}$的垂线，求$\pi$的方程？

$L:\begin{cases}x=0\\y=t\\z=t+1\end{cases}$ $\therefore M_0$在L上垂足为$t=-\frac{1}{2}$时.

$\therefore M_0L:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{-\frac{1}{2}}$

即：垂线为 $\begin{cases}x+2y+1=0\\x-2z+1=0\end{cases}$

设过垂线平面束为$(1+\lambda)x+2y+1+\lambda=0$

由法向量⊥z=0知：$\pi:x+2y+1=0$

[例5] A为2阶方阵，证明，若存在大于等于2的自然数m使得$A^m=0$，则$A^2=0$.

$\because|A|=0\ \therefore R(A)<2$

① $R(A)=0$时，$A=0$ ∴同证

② $R(A)=1$时，∴设$A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}Q$

取$U=P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $V'=(1\ \ 0)Q$

$\therefore A=UV'$ 令$V'U=k$

$\therefore A^2=UV'UV'=kA$

$\therefore A^m=k^{m-1}A$ 且 $A\neq0$

$\therefore k=0\ \therefore A^2=0$.

8.方法归纳.

(1) π 过 M_0 及直线，求 π？

⇒在直线上取两点，用三点式.

(2) π 过 M_0，x 轴，求 π？

①点法式：$\vec{n}=\overrightarrow{OM}\times\vec{i}$

②三点式. ③待定系数法

(3) π 与 l_1. l_2 均平行.

平面法向量 $=\vec{s_1}\times\vec{s_2}$

(4) π 过 l_1 且与 l_2 平行.

⇒ π 法向量 $=\vec{s_1}\times\vec{s_2}$.

(5) 求直线与平面 π 交点

⇒ L 参数方程代入 π 求出 t 即可.

(6) 已知 π_1. π_2. π_3，求过 π_1. π_2 交线且与平面 π_3 ⊥ 的 π？

⇒设 π 为 $\pi_1+\lambda\pi_2=0$

再利用 π 与 π_3 法向量垂直 可求 λ.

(7) 已知 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

求 π_1. π_2 角平分面方程？

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1z+D_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2z+D_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

⇒可得出两个平面方程，最后还要舍弃一个.

五 直线方程.

1.方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$：

平行于已知直线的非零向量.

2.标准方程（点向式方程）

$M(x_0,y_0,z_0)\in L$，$\vec{s}$ 已知，

则 l 为：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

证明：$\overrightarrow{MM_0}$ 与 $\vec{s}$ 对应分量成比例

①特征：已知一点，方向向量.

②当 $m=0$，$np\neq0$ 时应理解为：

$$\begin{cases}x-x_0=0\\ \frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\end{cases}$$

③当 $m=n=0$，$p\neq0$ 时 理解为：

$x=x_0$，$y=y_0$，z 随意

④设标准方程上的点可用参数方程.

3.参数方程.
$$\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases}$$

4.二点式方程.

已知 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ $M_2(x_2,y_2,z_2)$

L 为 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

5.一般式方程.

已知 π_1. π_2，其相交线 L 为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

注：①一般式方程有无数多个.

②标准方程是一个一般方程，它是用2个与坐标面上的平面的交线来表示直线 L 的.

③互化：一般→标准/参数.

$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}.$$

再任取一点可得到标准方程.

令标=任意常数 t 即可得参数方程.

即：一般→标准→参数方程.

④互化：标准→一般

任意拆开标准方程即可

(eg). $\frac{x-1}{0}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-4}{0}$

一般方程为 $\begin{cases}x-1=0\\ z-4=0.\end{cases}$ 不管 y.

6.方法

(1) 求过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 与 L' 垂直相交的 L？

①两点式，设 (a,b,c) 在 L' 上，则 $MM_1\perp\vec{s}$，再两点式.

△设交点 M 可采用参数方程.※

②标准式：任取 L' 上一点 M_1，则 $\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}=\vec{n}$，而 $\vec{s}=\vec{n}\times\vec{s}$.

可求出 L 的方向向量 $\vec{s}$.（麻烦）.

(2) L 垂直于直线 L_1，且平行于 π.

$\vec{s}=\vec{s_1}\times\vec{n}$

[例3]. π_1：$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

π_2：$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

若 $R\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix}=2$，则必有

π_1. π_2 相交

⇒若 // 的话则 $R=1$.

[例4] 设矩阵 $\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$ 的秩为3，则直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ (A)

A.相交于一点 B.重合.

C.平行但不重合 D.异面.

⇒法向量不平行，否则 $R\leq2$

⇒看三个向量混合积

$$\begin{vmatrix}a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2\\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3\\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1\end{vmatrix}=0$$

故相交于一点

$L_1 . L_2$ 共面 $\Leftrightarrow [\vec{s_1}\ \vec{s_2}\ \overrightarrow{M_1M_2}]=0$

六. 位置关系

1. 面与面位置关系（给出 $\pi_1 . \pi_2$）

(1) 重合：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$

(2) 平行 $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$

即：法向量平行.

(3) 相交于一条直线 $\Leftrightarrow$

$\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$ 与 $\vec{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$ 不平行

① 两平面夹角：法向量夹角 φ

$[0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}]$

$\therefore \cos\varphi=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{\sqrt{n_1^2}\cdot\sqrt{n_2^2}}$

即：$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

② 垂直 $\Leftrightarrow n_1\perp n_2$

即：垂直 $\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

2. 线与线

给出 $L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$

$L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$

(1) 重合 $\Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$，$M_1$ 在 L_2 上

(2) 平行 $\Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$ 且无公共点（M_1 不在 L_2 上）

(3) 交于一点 $\Leftrightarrow$

$[\vec{s_1},\vec{s_2},\overrightarrow{M_1M_2}]=0$，且 $s_1 . s_2$ 不平行

(4) 异面 $\Leftrightarrow [\vec{s_1}\ \vec{s_2}\ \overrightarrow{M_1M_2}]\neq 0$

(5) $L_1 . L_2$ 夹角：$\vec{s_1} . \vec{s_2}$ 夹角 φ（$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$）

$\cos\varphi=\frac{|s_1\cdot s_2|}{|s_1||s_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$

(6) $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

(7) 判断两直线关系时，可将一条直线参数方程代入，看 t 有无解.

3. 直线 L 与平面 π 的关系

(1) L 在 π 上 $\Leftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n}$ 且 $M_0\in\pi$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} mA+nB+pC=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases}$

(2) $L\parallel\pi \Leftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n}$ 且 $M_0\notin\pi$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} mA+nB+pC=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0. \end{cases}$

(3) L 与 π 交于一点 $\Leftrightarrow \vec{s}$ 与 $\vec{n}$ 不垂直

$\Leftrightarrow mA+nB+pC\neq 0.$

① 直线 L 与其在平面 π 上的投影直线 L_1 的夹角 φ 称为直线 L 与平面 π 的夹角，规定 $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

其中 $\sin\varphi=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

② $L\perp\pi \Leftrightarrow \vec{n}\parallel\vec{s} \Leftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$

4. 距离

(1) 点到平面距离

$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

(2) 点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 到 L 距离

$d=\frac{|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|}{|s|}$ 求交点坐标也可以

(3) 平行平面距离：$\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$（法向相同）

(4) 异面直线间距离（公垂线长度）

$\begin{cases} L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \\ L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2} \end{cases}$

$d=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\frac{\vec{s_1}\times\vec{s_2}}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}\right|$ 或求 $t_1 . t_2$

5. 平面束：通过 L 的平面的全体

$\lambda_1\pi_1+\lambda_2\pi_2=0.$

应用：

(1) 求 $L:\begin{cases}\pi_1=0\\ \pi_2=0\end{cases}$ 在 π 上投影直线.

设平面 $\pi_1+\lambda\pi_2=0$ 求与 π 上的平面方程 π_3（法向量上求入），$\therefore$ 投影直线为 $\begin{cases}\pi_3\\ \pi\end{cases}$ 或点法式求出 π_3 方程

(2) 求 $L_1:\begin{cases}\pi_1\\ \pi_2\end{cases}$ 与 L_2 距离

$\Rightarrow$ 先求过 L_1 做平行于 L_2 的 π，

再求 L_2 上任一点到 π 距离为所求.

【线代一.二章补充】

(1) $A.B$ 均为4阶方阵，$|A|=1$，$|B|=-2$，则 $\begin{vmatrix} O & 2A \\ -AB & 3B \end{vmatrix}=\underline{-32}$

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 及三阶方阵 $B\neq 0$，且满足 $AB=0$，则 $a=\underline{-4}$

$\Rightarrow$ 令 $|A|=0$

(3) A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，且 $AB=E_m$，$R(A)=r$，则 $\underline{C}$

A. $r>m$ B. $r\le m$ C. $r=m$ D. $r>n$.

$\Rightarrow A.B$ 均可逆 $\therefore R(AB)=R(A)=r$.

对任意一组 $k_1\sim k_m$ 不全为0的数，都有 $k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m\neq 0$，则α线性无关

⟺ 只有 $k_1\cdots k_m$ 全为0时，才有 $k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m=0$，则α线性无关

第四章：n维向量

一、n维向量基础

1.概念：

数域F内的n个数 $\alpha_1\dots\alpha_n$ 组成的有序数组α叫做数域F上的n维向量.

记作 $\alpha=(a_1,a_2\cdots a_n)$ 或 $\beta=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$

注：(1) α叫行向量(行矩阵)

β叫列向量(列矩阵)

(2) a_i叫向量的第i个分量

(3) 若F为 实数域 ⇒ 实向量

复数域 ⇒ 复向量

(4) 记 $R^n(C^n)$ 为实(复)数域上的n维向量全体构成的集合.

2.特殊向量，线性运算

(1) 当且仅当 $a_i=b_i$ 时，才可说两个行(列)向量相等.

(2) 分量都是0的向量叫零向量

(3) $\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=a_1e_1+a_2e_2+\cdots a_ne_n$

二、线性相关与线性无关

1.线性表示：

对于n维向量 $\beta,\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$，如果有一组数 $k_1\cdots k_m$ 使得：$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m$ 则说β是 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 的线性组合，或说β可由 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性表示，此时称 $k_1\cdots k_m$ 为组合系数或表示系数(不一定唯一)

特：$\vec{0}$可由任何一个n维向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性表示.

$\vec{0}=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots 0\alpha_m$

2.线性相关

(1)引理：

$\vec{\alpha},\vec{\beta}$共线 ⟺ 不全为0：$\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}=\vec{0}$

$\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$共面 ⟺ ∃不全为0的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使 $\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}+\lambda_3\vec{\gamma}=\vec{0}$.

(2)定义：若存在数域F中一组不全为0的数 $k_1\cdots k_m$ 使 $k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m=\vec{0}$，则称向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性相关，否则称向量组线性无关

(3)定理1：部分相关，则整体相关

如果一向量组的一部分向量构成的向量组线性相关，那么这个向量组也线性相关

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_r\alpha_r+0\alpha_{r+1}+\cdots+0\alpha_n=0$

(4)定理2：整体无关，则部分无关

证：$\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性无关的充要条件是：只有当 $k_1=k_2=\cdots k_n=0$ 时，才有 $k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_n=0$

(5)定理3：$e_1,e_2\cdots e_n$ 线性无关

证：设 $k_1e_1+\cdots k_ne_n=0$

则 $k_1\cdots k_n$ 必需都为0.

∴线性无关.

(eg.) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关，设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3$，证明 β_1,β_2,β_3 线性无关.

设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$\Rightarrow k_1\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_1+k_2+k_3)\alpha_3=0$

∵ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关，

$\therefore\begin{cases}k_1=0\\k_1+k_2=0\\k_1+k_2+k_3=0\end{cases}$ $\therefore k_1=k_2=k_3=0$

∴ β_1,β_2,β_3 无关.

(6)两个向量共线：∃不全为0的数，使 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 的线性组合为0

三个向量共面：∃不全为0的数，使 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 线性组合为0

∴2向量共线、3向量共面即为线性相关.

(7)注：

①含有零向量的向量组必线性相关

②含有重复向量的向量组必相关

③ α线性相关 ⟺ α=0

α线性无关 ⟺ α≠0

④ α_1,α_2 线性相关 ⟺ 对应分量成比例

α_1,α_2 线无关 ⟺ 对应分量不成比例.

例：三阶方阵A，α为三阶列向量α，若Aα与α线性相关——

⇒只需令二者对应分量对应成比例

[判]

①若β不能表示为 α_1,α_2 线性组合，则 α_1,α_2,β 线性无关.(×)

如 $\underset{\beta}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$ $\underset{\alpha_1}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$ $\underset{\alpha_2}{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}}$

②若 α_1,α_2 无关，且β不能由 α_1,α_2 表示，则 α_1,α_2,β 无关(√)

$\Rightarrow k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\beta=0$

则 k_3 必为0(β不可由另二者表示)

推广：$\alpha_1\cdots\alpha_m$ 无关，且β不由α表示，则 $\alpha\cdots\alpha_m,\beta$ 无关

③ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中任两个都无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也无关(×)

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$

④~~设~~存在一组数 k_1,k_2,k_3 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，且 α_3 可由 α_1,α_2 来表示，则 $k_3\neq 0$.(×)

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}+0\cdot\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$ 或引入平行向量.

⇒向量组表示$\vec{0}$，系数不唯一.

⑤若有( )一组不全为零的数 $k_1\cdots k_m$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m\neq 0$，则向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性无关(×)

⇒( )内加任意一组则对.

⑥向量组中有2个向量成比例，则该向量组一定线性相关(√)

⇒部分相关，则整体相关.

⑦若 α_1,α_2 线性相关，β_1,β_2 相关，则 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2$ 相关(×)

$\begin{cases}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\end{cases}$

⑧若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩等于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩，则 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示(√)

⑨两个秩相等的向量组所生成的向量空间相同(×)

⇒ $\vec{i},\vec{j}$ 与 $\vec{j},\vec{k}$ 的秩为2，但分别生成xOy与yOz

⑩线性无关向量组的极大无关组唯一，反之极大无关组唯一的向量组线性无关(×)

如 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 极大唯一.

⇒向量组线性无关，极大无关组就是其本身；若一向量组只有唯一极大无关组则该向量组除0之外都无关.

无关满秩
β由无关的α表示,方法唯一

3.线性相关

(1)定理:向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_m\ (m\geq 2)$ 线性相关的充要条件是 α_m 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

(2)只含一个向量的向量组 α_1 线性相关的充要条件是 $\alpha_1=0$,

向量组 α_1,α_2 线性相关的充要条件是 $\alpha_1=0$, $\exists k$ 使 $\alpha_1=k\alpha_2$ 或 $\alpha_2=k\alpha_1$

(3) $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 无关 $\Leftrightarrow$ α中任意一个向量都不能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

4.线性相关的判定.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\cdots\quad \alpha_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{pmatrix}$$

矩阵 $A=(\alpha_1\cdots\alpha_m)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}$

(1) β可由A的列向量组线性表示 $\Leftrightarrow$ 存在 $K_{m\times 1}$ 使 $AK=\beta$.

即: $(\alpha_1\cdots\alpha_m)\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\beta$.

(2) $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 存在 $K_{m\times 1}\neq 0$ 使 $AK=0$.

(3) 线性无关 $\Leftrightarrow R(A)=m$

线性相关 $\Leftrightarrow R(A)<m$

[m为列向量的个数]

$\Rightarrow$ 相关即不满秩

(列向量组判定)

(4)行向量组判定:

{无关 $\Leftrightarrow R(A)=$ 行向量个数

相关 $\Leftrightarrow R(A)<$ 行向量个数.

(5)当A为方阵时,无关的充要条件是 $|A|\neq 0$,其行向量与列向量相关性相同.

(6)推论

① r维向量组的每个向量添上s个分量,构成r+s维向量组,若原无关,则新无关,若新有关,则原有关.

$\Rightarrow$ 无关加长为无关,有关减短为有关

② 若向量个数>向量维数,则必线性相关

③ 含零向量、重复向量的向量组必线性相关 (成比例向量)

四 向量组的秩

1.向量组的线性表示.

(1) $\alpha_1\cdots\alpha_r$

(2) $\beta_1\cdots\beta_s$

若(1)中每一个向量都可由(2)线性表示,则(1)可由(2)线性表示.

特:若(1)(2)能互相线性表示,则称二者等价.

(eg). $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 与 R^3 等价.

2.等价的性质:

反身性、对称性、传递性.

3.线性表示与矩阵.

A的列向量组可由B的列向量组线性表示 $\Leftrightarrow \exists K_{s\times r}$ 使 $A=BK$

$$(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r)=(\beta_1\cdots\beta_s)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{s1}&k_{s2}&\cdots&k_{sr}\end{pmatrix}$$

A=BC:A列向量组可由B列向量组表示,表示系数为C列.
A行向量组可由C行向量组表示,表示系数为B行.

$\overset{C}{(\beta_1\beta_2\beta_3)}=\overset{B}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}\cdot(A)$.

B为列满秩, ∴C, A秩相同,

若A不满,则C不满,则β线性相关.

4.极大无关组

在S中选取r个向量 $\alpha_1\cdots\alpha_r$,满足:

(1) $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 线性无关

(2)任取 $\alpha\in S$,总有 $\alpha_1\cdots\alpha_r,\alpha$ 相关

则称 $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 为S的一个极大线性无关组.

注:①极大无关组一般不唯一

②设n维向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性无关, $\alpha_1\cdots\alpha_m,\alpha$ 线性相关,则α可由 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性表示,且表示法唯一

③向量组S中任一α都可由极大无关组表示; $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 中任一向量可由S中向量线性表示,因此:

{S与极大无关组等价

S中任两个极大无关组等价,且向量个数相同

[推论].

1.设 $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)$, α为列向量

① $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow R(A)<m$

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $AX=0$ 有非零解.

② $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow R(A)=m$.

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $AX=0$ 只有零解.

同样,A的行向量组线性无关的充要条件是A行满秩.

2.若 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性无关,若存在方阵C,使 $(\beta_1\cdots\beta_m)=(\alpha_1\cdots\alpha_m)C$

则 $\beta_1\cdots\beta_m$ 相关 $\Leftrightarrow R(C)<m$,

$\beta_1\cdots\beta_m$ 无关 $\Leftrightarrow R(C)=m$.

3.秩

(1)向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性无关. $\Leftrightarrow$ 其秩为m.

(2)秩为r的向量组内任意r个线性无关的向量个数称为该向量组的秩

(3)等价的向量组秩相等.

4.设L是向量空间V的子集,若L在V的运算下也是向量空间,则称L是V的子空间.

★除一个特殊的向量空间{0}外,所有向量空间一定含有无穷多个向量

5.向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 相关, α_3 不能由 α_1,α_2 线性表示,则 α_1,α_2 成比例.

证: $\exists k_1,k_2,k_3\neq 0$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

由 α_3 不能由 α_1,α_2 线性表示,立知 $k_3=0$,由 k_1,k_2 不全为0,知 α_1,α_2 成比例]

6.若向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性相关,则存在m个不全为0的数 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_m$,使对任意向量β,向量组 $\alpha_1+\lambda_1\beta,\alpha_2+\lambda_2\beta,\cdots\alpha_m+\lambda_m\beta$ 相关.

∃不全为0的数 $k_1\cdots k_m$ 使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$,考虑方程组 $k_1\lambda_1+\cdots+k_m\lambda_m=0$

即 $(\lambda)\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=0$ ∵ $\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}\neq 0$,由[illegible]知有非零解,即 $\exists\lambda_1\sim\lambda_m$ 不全为0使该式成立,则加上β后有:

$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+(k_1\lambda_1+\cdots+k_m\lambda_m)\beta=0$.

[illegible]表示结论成立.

$A_{n\times m}$的列秩、行秩相等，等于 $R(A)$.
列向量组行变换破坏了等价性但保留了相关性.

证②：∃不全为0的 $k, k_1 \cdots k_m$ 使
$k\alpha + k_1\alpha_1 + \cdots k_m\alpha_m = 0$
若 $k=0$，不成立
$\because k \neq 0$
$\therefore \alpha = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_m}{k}\alpha_m$
证明表示方法唯一作差即可
$(k_1-k_1')\alpha_1 + \cdots (k_m - k_m')\alpha_m = 0$
$\because \alpha$无关 $\therefore k_i = k_i'$ 唯一.

☆逆命题：?
若 α 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 唯一线性表示，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

5.向量组的秩.
(1) $\begin{cases}\alpha_1 \cdots \alpha_r & ① \\ \beta_1 \cdots \beta_s & ②\end{cases}$
若①无关，①可由②线性表示，则 $r \leq s$.
证：令A是 $(\alpha_1 \cdots \alpha_r)$
B是 $(\beta_1 \cdots \beta_s)$
则 $R(A) = r$.
∃ $K_{s\times r}$ 使 $A = BK$
$\therefore R(A) = R(BK) \leq R(K) \leq s$

(2)推论：
①若 α、β 都是线性无关组，α、β 等价，则 α、β 中向量个数相等 $(r=s)$.
即：等价的无关组所含向量个数相等.
②向量组S中极大无关组所含向量个数一定，即为向量组的秩
③若向量组S的秩为 r，则：
S中任何 $r+1$ 个向量必相关
S中任何 r 个无关的向量都是极大无关组
④等价的向量组秩相等.
等价的无关组含向量个数相等 $r=s$，且向量组等价时，则A、B等
⑤一个向量组与它的任一极大无关组总是等价的.
☆已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是某向量组的一个极大无关组，证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是
⇔ 证 α、β 可互相表示，即等价（找P可逆）

(3)向量组的秩和矩阵的秩关系.
①定理：设A是 $n\times m$ 矩阵，则A的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 的秩等于矩阵A的秩.
证：设 $R(A) = r$，则A中有一个r阶子式不为0，设 $D_r \neq 0$
设 D_r 位于 $l_1 < l_2 \cdots < l_r$ 列上
令 $A_1 = (\alpha_{l_1}, \alpha_{l_2} \cdots \alpha_{l_r})$
则 $R(A_1) = r$，故 $\alpha_{l_1} \cdots \alpha_{l_r}$ 无关，
$\forall \alpha_j (j \neq l_i)$ 设 $l_k < j < l_{k+1}$
令 $A_2 = (\alpha_{l_1} \cdots \alpha_{l_k} \alpha_j \cdots \alpha_{l_r})$
$\therefore R(A_2) \leq R(A) = r < r+1$
$\therefore \alpha_j \cdots \alpha_{l_r}$ 相关
$\therefore \alpha_{l_1} \cdots \alpha_{l_r}$ 是 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 的一个极大无关组 $\therefore \alpha_1 \cdots \alpha_m$ 秩为 r.
②求秩方法 破坏了等价性
$A \xrightarrow{行} B$，R不变
三不变 $\begin{cases}极大\sim位置不变 \\ 表示系数不变\end{cases}$
☆列变换不保证后两条
☆列向量组行变换来求.
③概念
$\begin{cases}向量组等价：可互相表示 \\ 矩阵等价：可初等变换互化.\end{cases}$
判：等价向量组R相同 (√)
R相同+维数相同 ⇒ 向量组等价 (×) $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$
两个向量组R相等，且其中一组可由另一组线性表示，则两向量组等价(√)
向量组等价，对应矩阵⇔ (×)
↳向量组等价向量个数不一定相同
$A = (\alpha_1 \cdots \alpha_r)$ $B = (\beta_1 \cdots \beta_s)$ 当
矩阵等价，向量组未必等价 (√)
$A \xrightarrow{行} B$，则A、B列向量组等价 (√)
此时行向量组未必等价 (√).
$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} \xrightarrow{行} \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$

7.向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 与向量组 $\alpha_1, \cdots \alpha_r, \alpha_{r+1} \cdots \alpha_m$ 的秩相等，则两向量组等价.
显然前可由后表示，现证后可由前表示
设 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 为前无关组
则 $R(前) = n = R(后)$
$\therefore \alpha_1 \cdots \alpha_n$ 也为后的极大无关组
$\therefore$ 后可由前表示
8.若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关，但其中任意三个向量线性无关，则存在一组全不为0的数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 使 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 + \lambda_4\alpha_4 = 0$.
⇒首先 $\lambda_1 \sim \lambda_4$ 不全为0，现若 $\lambda_i = 0$，不符合题意
思想：反证法
9.设 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 无关，证明 $\beta, \alpha_1, \cdots \alpha_r$ 线性无关的充要条件是 β 不能由 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线性表示.
⇒必要性显然，现推充分性
设 $k_0\beta + k_1\alpha_1 + \cdots k_r\alpha_r = 0$
由 β 不能由 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 表示知 $k_0 = 0$.
$\because \alpha_1 \sim \alpha_r$ 无关 $\therefore k_0 = k_i = 0$
$\therefore \beta \sim \alpha_r$ 无关
10.设A是n阶可逆阵，$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_k$ 是k个n维列向量，试证 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_k$ 线性无关当且仅当 $A\alpha_1, A\alpha_2 \cdots A\alpha_k$ 无关. (⇔)
"⇒"设有一组数 $l_1 \cdots l_k$ 使 $l_1A\alpha_1 + l_2A\alpha_2 + \cdots l_kA\alpha_k = 0$
上式左乘 A^{-1}，由无关性知 $l_1 = l_2 = \cdots l_k = 0$
$\therefore A\alpha_1, A\alpha_2 \cdots A\alpha_k$ 无关
"⇐"设有数 $l_1\alpha_1 + \cdots l_k\alpha_k = 0$
左乘A 知 $l_i = 0$
这表明 $\alpha_1 \sim \alpha_k$ 无关
11.设A是n阶实对称阵，则对任意列向量 $\alpha, \beta \in R^n$，都有：
(1) $\alpha\beta' = \beta'\alpha$.
⇒ $\alpha\beta'$ 为 1×1 矩阵 $\therefore (\alpha\beta')' = (\alpha\beta')$
(2) $(A\alpha)'\beta = (A\beta)'\alpha$.
⇒同样注为 1×1 矩阵.
$\therefore$ 左 $= [(A\alpha)'\beta]' = \beta'A\alpha = \beta'A'\alpha = (A\beta)'\alpha$
12.设 $m\times n$ 矩阵A经初等列变换成B，则A、B列向量组等价.
⇒ $B = AC$，$A = BC^{-1}$ 即：A、B列向量组可互相表示

三. 向量空间.

1. 定义：V是数域F上的n维向量构成的非空集合，满足对加法、数乘封闭，则V是数域F上的向量空间.

(eg). $V_1=\{0\}$ 是R上的实向量空间.

(eg₂) n维实向量的全体 R^n 是一个向量空间.

(eg₃) $V=\{(a,2a,3a)\mid a\in R\}$.

$V=\{(a,a,b,c)\mid a,b,c\in R\}$

$V=\{(0,x_2,\cdots,x_n)\mid x_2\cdots x_n\in R\}$

都是向量空间.

(eg₄) $V=\{(1,a,b)\mid a,b\in R\}$ 不是

注：所有向量空间必含 $\vec{0}$，若无 $\vec{0}$ 必不是向量空间.

2. 由向量组生成的向量空间

$\mathrm{span}\{\alpha_1\cdots\alpha_m\}=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\mid k_i\in F\}$

生成的向量空间与向量组是等价的.

3. 基. 维数.

(1) 设V中的向量向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 无关且V中任一向量α均可由 $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 线性表示，则称 $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 为V的基，基中所含向量个数叫向量空间V的维数，记作 $\dim V$.

注₁：规定 $\{0\}$ 维数为0，没基

(eg). $\{(a,2a,3a)\}$，$(1,2,3)$ 是基，维数是1

注₂：向量的维数 ≠ 空间维数
　　分量个数　　　基中向量个数

即：向量组中最大无关组中含向量个数不会超过维数

注₃：若 $V\subseteq R^n$，则 $\dim V\le n$（V是 R^n 的子空间）若 $\dim V=n$，则 $V=R^n$

注₄：n个n维向量构成的向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是 R^n 的基，当且仅当向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性无关.

基不是唯一的，但彼此等价.

注₅：n维标准单位向量组

$\varepsilon_1=(1,0\cdots0)$ $\varepsilon_2=(0,1,0\cdots0)$ $\cdots$ $\varepsilon_n=(0,0\cdots1)$ 是 R^n 的极大无关组，所以 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$ 是 R^n 的一个基，并且 R^n 的维数是n，称 R^n 的这个基为自然基.

(eg). 对 $V=\{(0,x_2\cdots x_n)\mid x\in R\}$ 基为 $\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$，维数 n−1.

(2) 实质：

对由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 所生成的向量空间 $V=\{k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m\}$ 显然向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 的极大无关组就是V的一个基，向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 的秩就是V的维数

(3) 应用：

若向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 是向量空间V的一个基，则V可表示为

$V=\{\gamma\mid\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_r\alpha_r\}$

(eg). 设向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 与向量组 $\beta_1\cdots\beta_s$ 等价，记：

$V_1=\{\alpha=k_1\alpha_1+\cdots k_r\alpha_r\}$

$V_2=\{\alpha=l_1\beta_1+\cdots l_s\beta_s\}$.

求证：$V_1=V_2$.

[例]. α、β 秩同，且 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 可由 $(\beta_1\cdots\beta_n)$ 表示，证明：α、β 等价.

设 $\alpha_{l_1}\cdots\alpha_{l_r}$ 是 α 极大，

$\beta_{k_1}\cdots\beta_{k_r}$ 是 β 极大.

∵ $\alpha_1\sim\alpha_n$ 可由 $\beta_1\sim\beta_n$ 表示

∴ $(\alpha_1\cdots\alpha_n\ \beta_1\cdots\beta_n)$ 可由 $\beta_1\sim\beta_n$ 表示.

∴ $(\alpha_1\cdots\beta_n)$ 可由 $\beta_{k_1}\cdots\beta_{k_r}$ 表示.

∴ $\beta_{k_1}\cdots\beta_{k_r}$ 是 $(\alpha_1\cdots\beta_n)$ 的极大无关组

∴ $R(\alpha_1\cdots\alpha_n\beta_1\cdots\beta_n)=r$

∴ $\alpha_{l_1}\cdots\alpha_{l_r}$ 是 $(\alpha_1\sim\beta_n)$ 极大.

∴ $(\beta_1\cdots\beta_n)$ 可由 $\alpha_{l_1}\cdots\alpha_{l_r}$ 表示.

∴ $(\beta_1\cdots\beta_n)$ 可由 $(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ 表示

法二：<方>：$\alpha_{l_1}\cdots\alpha_{l_r}$ 可由 $\beta_{k_1}\cdots\beta_{k_r}$ 表示

∴ $(\alpha_{l_1}\cdots\alpha_{l_r})=(\beta_{k_1}\cdots\beta_{k_r})P$

∵ $r=(\alpha_{l_1}\cdots\alpha_{l_r})\le R(P)\le r$

∴ P可逆 ∴ $\beta=\alpha P^{-1}$

∴ $\beta_{k_1}\cdots\beta_{k_r}$ 可由 $\alpha_{l_1}\cdots\alpha_{l_r}$ 表示.

[口佳] 3阶矩阵A及3维列向量组X使 X、AX、A^2X 无关，且 $A^3X=3AX-2A^2X$，记 $B=(X,AX,A^2X)$，求 $C_{3\times3}$ 使 $AB=BC$

$\Rightarrow AB=(AX,A^2X,A^3X)$

$=B\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$

又∵ $(X,AX,A^3X)=(X,AX,A^2X)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{3}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$
　　　　　　　　　　　　　　　　　可逆

∴ $R(X,AX,A^2X)=R(X,AX,A^3X)=3$

∴ X、AX、A^2X 无关.

∴ 用无关组表示向量AB，表示系数C必唯一.

拓：求 $|A+B|$

∵ $R(B)=3$ ∴ B可逆

又∵ $AB=BC$

∴ 所求 $=|BCB^{-1}+BEB^{-1}|$

$=|B||C+E||B^{-1}|$

$=|C+E|$

[口佳]. 设有列向量组 $(\alpha_1\cdots\alpha_r)$ 满足 $(\beta_1\cdots\beta_t)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)K_{r\times t}$，则若α无关，则β无关 ⇔ $R(K)=t$

[口] 若 β_1,β_2,β_3 线性无关，且 $a\beta_1-\beta_2$，$b\beta_2-\beta_3$，$c\beta_3-\beta_1$ 线性相关，则a.b.c满足 $abc=1$

$B=A\underbrace{\begin{bmatrix}a&0&-1\\-1&b&0\\0&-1&c\end{bmatrix}}_{K}$ 令 $k=0$ 即可

[口] 当向量组 $\alpha_1\sim\alpha_n$ 相关时，使等式 $k_1\alpha_1+\cdots k_n\alpha_n=0$ 成立的 $\underbrace{k_1\cdots k_n}_{C}$

A 是任意一组不全为0的常数

B C 不唯一

D 是唯一一组不全为0的常数.

正交变换不变长度,角度.

$(A|B)\to(E|A^{-1}B)$

$\begin{cases}B=AK\\ A列满\end{cases}\Rightarrow R(A)+R(K)\le R(B)+A列数$
$R(B)\le R(K)$.

4.坐标:

(1)定义:设V是r维向量空间,$\alpha_1\cdots\alpha_r$是V的一个基,对任意α有$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots x_r\alpha_r$.则称表示系数为坐标.

(2)意义:α关于给定的基的坐标被α和基$\alpha_1\cdots\alpha_r$唯一地确定.

(eg).设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{bmatrix}$ $\beta=\begin{bmatrix}1\\0\\-4\end{bmatrix}$,验证:

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一个基,并求此时$\beta$的坐标.

$|A|=-27\ne0$

$\therefore\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一个基

设$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$

$=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$\therefore\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\beta=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\-1\end{pmatrix}$

$\therefore\beta$坐标为$(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-1)$.

归纳:验证$\alpha_1\cdots\alpha_n$是R^n的基,$\Leftrightarrow\alpha_1\cdots\alpha_n$线性无关

(3)$\alpha_1\cdots\alpha_r$是V的基,则V是由基生成的向量空间,即

$V=span\{\alpha_1\cdots\alpha_r\}$

$=\{k_1\alpha_1+\cdots k_r\alpha_r|k_i\in F\}$

5.坐标变换公式.

(向量空间基不唯一).

(1)定义1:设V为向量空间.

$\begin{cases}\alpha_1\cdots\alpha_r①\\ \beta_1\cdots\beta_r②\end{cases}$是V的2个基,则:

$(\beta_1\cdots\beta_r)=(\alpha_1\cdots\alpha_r)\begin{bmatrix}p_{11}&\cdots&p_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ p_{r1}&\cdots&p_{rr}\end{bmatrix}$

称这个式子为基变换公式.称矩阵P为α到β的过渡矩阵

$\because r\le R(\beta_1\cdots\beta_r)\le R(P)\le r$

或由$\beta_1\cdots\beta_r$线性无关知:

过渡矩阵P可逆.

(2)定义2:$\alpha\in V$

若α在①下坐标为$(x_1\cdots x_r)$

在②下坐标为$(x_1'\cdots x_r')$

则$\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_r'\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_r'\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{bmatrix}$

β到α的变换公式　　α到β的变换公式

(eg1)在R^4中取基

$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$ $\alpha_4=\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$

和

$\beta_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ $\beta_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\2\end{bmatrix}$ $\beta_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\2\end{bmatrix}$ $\beta_4=\begin{bmatrix}1\\3\\1\\2\end{bmatrix}$

求α到β的基变换公式和坐标变换公式

$(\beta_1\cdots\beta_4)=(\alpha_1\cdots\alpha_4)P$.

$\quad\ B\qquad\qquad\quad A$

则$P=A^{-1}B$ (A,B均可逆的)

坐标变换为:$\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_4'\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_4\end{bmatrix}$

(eg2).$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为$R^4$的一个基

$\alpha=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4$,而基向量$\beta$的坐标为$\beta_1=(1,3,5,7)$

$(0,1,2,3)$ $(0,0,1,2)$ $(0,0,0,1)$

求α在基β下坐标?

$B=A\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\5&2&1&0\\7&3&2&1\end{bmatrix}=AP.$

求P^{-1} $\therefore\alpha$在$\beta_1\cdots\beta_4$下坐标为

$\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_4'\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-5\\18\\-57\end{bmatrix}$

[例3]若只有当$k_1\cdots k_m$全为0,等式

$k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m+k_1\beta_1+\cdots k_m\beta_m=0$.

才成立,则向量:

①$(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2\cdots,\alpha_m+\beta_m)$无关 (✓)

②$\alpha_1\cdots\alpha_m$和$\beta_1\cdots\beta_m$均线性无关(×)

(3)方法:知列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,和列向量$\beta_1,\beta_2,\beta_3$,求$\alpha$到$\beta$的过渡矩阵P.

$\Rightarrow$令$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$.

$\therefore P=(\alpha)^{-1}\beta$.

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\,|\,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\to(E|P)$.

把前一个化为单位阵

[例4] $\alpha_1\sim\alpha_s$无关,$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$,

$\beta_2=(\alpha_2+\alpha_3)\cdots\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$,

讨论$\beta_1\sim\beta_s$相关性.

$(\beta_1\cdots\beta_s)=(\alpha_1\cdots\alpha_s)\begin{bmatrix}1&0&&0&1\\1&1&&&0\\0&1&&&\\ \vdots&&&&\\0&0&&1&1\end{bmatrix}_{s\times s}$

$\Downarrow$ 满秩 $\qquad K$

$\therefore\beta$秩$=K$的秩.

$\because K$为方阵 $\therefore$求$|K|$

$\therefore|K|=1+(-1)^{1+s}=\begin{cases}0,s偶\\2,s奇\end{cases}$

$\therefore s$偶相关,

s奇不相关.

[例5]设向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$的秩为r,$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots\alpha_{i_s}$ $(s<r)$为其一无关组,则在原向量组中,存在$r-s$个向量$a_{i_{s+1}},\cdots a_{i_r}$,使向量组$a_{i_1},a_{i_2}\cdots a_{i_s},a_{i_{s+1}}\cdots a_{i_r}$为$a_1\cdots a_m$的一个极大无关组

$\Rightarrow$因向量组$\alpha_1\cdots\alpha_m$的秩为$r>s$,故在此向量组存在一个$a_{i_{s+1}}$使$a_{i_1}\cdots a_{i_{s+1}}$无关(否则与$r>s$矛盾),以此类推,存在$a_{i_{s+1}},a_{i_{s+2}}\cdots a_{i_r}$使$a_{i_1}\cdots a_{i_s}\cdots a_{i_r}$线性无关,故……

[例6]设$\alpha_1\cdots\alpha_m$为向量组,$\beta=\alpha_1+\cdots\alpha_m$ $(m>1)$,证明向量组$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots\beta-\alpha_m$线性无关的充要条件是$\alpha_1\cdots\alpha_m$无关

$(\beta-\alpha_1,\cdots\beta-\alpha_m)=(\alpha)\begin{bmatrix}0&&1\\&\ddots&\\1&&0\end{bmatrix}_m$

矩阵行列和相同,$\det=(-1)^{m-1}(m-1)\ne0$

$\therefore$方阵可逆$\therefore\beta-\alpha_i$与α_i秩相同

[判]

1.向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$与向量组$\alpha_1\cdots\alpha_n,\beta$的秩相等,则$\beta$可由$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性表示(✓)

2.$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$均为三维向量,若$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$表示,则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关(✓).

Page:　　Date:

$(\alpha,\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$
$|\ |$不是绝对值.

四.欧氏空间(实数域范围内)

1.内积:

(1)定义:设 $\alpha=(a_1\cdots a_n)$

$\beta=(b_1\cdots b_n)\in R^n$,记

$(\alpha,\beta)=a_1b_1+\cdots a_nb_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$

称(α,β)为内积.

(2)称定义了线性运算和内积的R^n为欧氏空间,以后仍用R^n表示欧氏空间.

(3)内积满足规律

其中$\alpha.\beta.\gamma\in R^n$, $k.l\in R$.

$$\begin{cases}(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)=\alpha\beta^T=\beta\alpha^T\\(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)=(\alpha,k\beta)\\(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)\\(\alpha,\alpha)\geq 0,\text{且}(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0\\(\alpha,k\beta+l\gamma)=k(\alpha,\beta)+l(\alpha,\gamma).\end{cases}$$

其他:

~~向量乘积可理解为矩阵乘积~~

(4) R^n只是欧氏空间的一类.

(5) 向量在基下的坐标向量一般不属于该向量所在空间.(一)

(4)应用:

①长度$|\alpha|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2}$

长度为1的向量叫单位向量

②引理$\begin{cases}(\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)\\|(\alpha,\beta)|\leq|\alpha||\beta|\end{cases}$

Schwarz不等式.

证:

(5)长度的性质

①非负性:$|\alpha|=0\Leftrightarrow\alpha=0$. $|\alpha|\geq 0$

②正齐次性:$|k\alpha|=|k||\alpha|$.

证:$|k\alpha|=\sqrt{(k\alpha,k\alpha)}=|k|\sqrt{(\alpha,\alpha)}$.

③三角不等式:$|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$.

(6)向量夹角

设$\alpha\ \beta\in R^n$, $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$ 称

$\varphi=\arccos\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$ $(0\leq\varphi\leq\pi)$为$\alpha.\beta$的夹角.

特:$(\alpha,\beta)=0$时称α与β正交.

☆若$\alpha=0$.则α与R^n中任何向量都正交.

2.规范正交基

(1)正交向量组:

①定义:称两两正交的非零向量构成的向量组为正交向量组.

②正交向量组$\alpha_1\cdots\alpha_m$必无关

证:设 $k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m=0$,

两边同时与α_1做内积

则 $k_1(\alpha_1,\alpha_1)+0+0+\cdots 0=0$

由$\alpha_1\neq 0$知 $(\alpha_1,\alpha_1)\neq 0$

$\therefore k_1=0$

同理,而由$\alpha_2\cdots\alpha_m$知

$k_1=k_2=\cdots k_m=0$

$\therefore$必无关

③由单位向量构成的正交向量组称为规范正交向量组(标准)

(2)正交基

①定义:V中的基若两两正交,则为正交基;若每个向量又都是单位向量,则称为规范正交基.

即:$\alpha_1\cdots\alpha_r$为V规范正交基,$\dim V=r$

$\Leftrightarrow(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\1, & i=j\end{cases}$

②性质:设$\alpha_1\cdots\alpha_n$是R^n的规范正交基

$\alpha\ \beta_1=x_1\alpha_1+\cdots x_n\alpha_n$, $\beta_2=y_1\alpha_1+\cdots y_n\alpha_n$

则 $(\beta_1,\beta_2)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots x_ny_n$

[例]判断能否构成向量空间,若能,求dim、一个基

(1) $V=\{(x_1,x_2\cdots x_n)\mid\sum_{i=1}^{n}x_i=0\}$

能,此空间为n维空间R^n中的超平面.故$\dim V=n-1$,而方程组 $x_1+x_2+\cdots x_n=0$的基础解系即可作基.

$a_1=(1,-1,0\cdots 0)$

$a_2=(1,0,-1\cdots 0)$

$a_{n-1}=(1,\cdots\cdots -1)$

(2) $V=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in R, x_1-x_2+x_3=0\}$

$\Rightarrow$平面: $\dim=2$.,方程组 $x_1+x_3-x_2$的基础解系即可作为基$\alpha_1=(1,1,0)$ $\alpha_2=(1,0,-1)$

(3) $V=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1=\frac{1}{2}x_2=\frac{1}{3}x_3, x_1.x_2.x_3\in R\}$.

$\Rightarrow\dim=1$

[例]设β可由$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$线性表示,且表示方法唯一.试证:$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$线性无关.

$\Rightarrow$设$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

且$k_1.k_2.k_3$唯一

设$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=0$

$\therefore\beta=\beta+0=(k_1+\lambda_1)\alpha_1+(\ \ )\alpha_2+(\ \ )\alpha_3$

$\because\beta$表示方法唯一

$\therefore k_i+\lambda_i=k_i$ 即$\lambda_i=0$

$\therefore\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$线性无关

[例]设$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$线性相关,$\alpha_2.\alpha_3.\alpha_4$无关,试证:

(1) α_1可由$\alpha_2.\alpha_3$表示

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3\text{相关}\\\alpha_2.\alpha_3\text{无关}\end{cases}\Rightarrow$得证

(2) α_4不能由$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$表示

$\Rightarrow$假设能表示,故$\exists k_i$使:

$\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

由(1)知 设$\alpha_1=\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_3$

$\therefore\alpha_4=(k_1\lambda_1+k_2)\alpha_2+(k_1\lambda_2+k_3)\alpha_3$

即:α_4可由$\alpha_2.\alpha_3$表示,这与$\alpha_2.\alpha_3.\alpha_4$无关矛盾.

[习题指导P_{68} 23].

同构：保距+保角

(eg). V是向量空间，求α在规范正交基$\alpha_1 \cdots \alpha_r$下坐标.

$\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots k_r\alpha_r$

$(\alpha, \alpha_i) = k_i(\alpha_i, \alpha_i) = k_i$

∴每个表示系数都是α与α_i的内积.

如：在R^2中，$\alpha_1 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$

表示$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

⇒为规范正交基

$(\alpha, \alpha_1) = \frac{3}{2}\sqrt2$，$(\alpha, \alpha_2) = \frac{\sqrt2}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{3\sqrt2}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt2}{2}\alpha_2$

第二种描述.

3. Schmidt正交化方法.

设$\alpha_1 \cdots \alpha_m$为n维向量构成的无关组.

①求与$\alpha_1 \cdots \alpha_m$等价的正交向量组$\beta_1 \cdots \beta_m$

②求与$\beta_1 \cdots \beta_m$等价的规范正交向量组$\gamma_1 \cdots \gamma_m$.

称①为正交化过程

②为规范化过程（单位化）.

(eg). $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$无关，求P正交？

令$\beta_1 = \alpha_1$

$\beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1$

$0 = (\beta_2, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_1) - k(\beta_1, \beta_1)$

$\therefore k = \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}$

$\beta_3 = \alpha_3 - (k_1\beta_1 + k_2\beta_2)$

$= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$

(1) 将$\alpha_1 \cdots \alpha_m$正交化.

$\beta_1 = \alpha_1$

$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$

$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$

$\vdots$

$\beta_m = \alpha_m - \frac{(\alpha_m, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_m, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_m, \beta_{m-1})}{(\beta_{m-1}, \beta_{m-1})}\beta_{m-1}$

即：$\beta_m = \alpha_m - \sum_{i=1}^{m-1}\frac{(\alpha_m, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)}\beta_i$

(2) 单位化：令$\gamma_i = \frac{1}{|\beta_i|}\beta_i \ (i=1, \cdots m)$

则$\gamma_1 \cdots \gamma_m$是与$\alpha_1 \cdots \alpha_m$等价的单位正交基.

4. 正交阵：

$n \times n$实矩阵$A = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$的列向量组$\alpha_1 \cdots \alpha_n$是$R^n$的基的充要条件是A可逆

(1) 定义：n阶实方阵$A^TA = E$，则A为正交阵.

(2) 性质：　$X \xrightarrow{正交} AX$（同构）

① A正交，则A^{-1}, A^T, A^*都正交阵

证：$(A^T)^TA^T = E$

$(A^*)^TA^* = |A|(A^{-1})^T \cdot |A| \cdot A^{-1}$

$\because A^{-1} = A^T \ \therefore (A^{-1})^T \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$

② 对任意n维向量X，AX保持X长度，即：$|AX| = |X|$（保距）

⇒列向量的模.

证：$|AX|^2 = (AX, AX) = (AX)^TAX$

$= X^TA^TAX = X^TX = (X, X) = |X|^2$

☆正交阵×向量 模不变

③ A可逆且$A^{-1} = A^T$

$|A| = 1$或-1

④ AX和AY保持X和Y的内积

$(AX, AY) = (X, Y)$（保角）

⑤ A, B都是n阶正交阵，则AB正交

$(AB)'AB = B'A'AB = B'B = E$

[例] 设$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$是$R^n$的一个基，$\alpha \in R^n$，若$(\alpha, \alpha_i) = 0, i = 1, 2 \cdots n$，则$\alpha = 0$.

设$\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots k_n\alpha_n$，故

$(\alpha, \alpha) = (\alpha, k_1\alpha_1 + \cdots k_n\alpha_n)$

$= k_1(\alpha, \alpha_1) + \cdots k_n(\alpha, \alpha_n)$

$= 0 \quad \therefore |\alpha|^2 = 0$ 从而$\alpha = 0$

[例] 设$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$是$R^n$的一个规范正交基，其中

$\beta_1 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots x_n\alpha_n$

$\beta_2 = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots y_n\alpha_n$

求证$(\beta_1, \beta_2) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots x_ny_n$

⇒由已知$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases}0 & (i \neq j)\\ 1 & (i = j)\end{cases}$

则：$(\beta_1, \beta_2) = (\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i, \sum_{j=1}^n y_j\alpha_j)$

$= \sum_{i=1}^n x_i(\alpha_i, \sum_{j=1}^n y_j\alpha_j)$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_iy_j(\alpha_i, \alpha_j)$

$= \sum_{i=1}^n x_iy_i(\alpha_i, \alpha_i) = \sum_{i=1}^n x_iy_i$

[例] $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$R^3$的一个规范正交基，求$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$与$\beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$的内积？

$(\beta_1, \beta_2) = 1 \times 2 + (-1) \times 1 + 1 \times 2 = 3$

[例] 设$A_{m \times n}$，$B_{n \times m}$为矩阵$(m>n)$，满足$BA = E_n$，问A列向量组相关性如何？

$n = R(E_n) = R(BA) \leq R(A) \leq R(n)$

$\therefore R(A) = n \ \therefore$ A列向量无关.

[例] 设A为n阶方阵，则A是反对称阵的充要条件是：对任一向量X，有$X'AX = 0$

⇒ $(X'AX)' = -X'AX$

$\therefore -X'AX = X'AX \Rightarrow X'AX = 0.$

⇐选取$X = (0, 0 \cdots 1, 0 \cdots 0)' = e_i$

由$X'AX = 0$知$a_{ii} = 0$

再取$X = e_i + e_j$

有$X'AX = (e_i' + e_j')A(e_i + e_j)$

$= a_{ij} + a_{ji} = 0$

即：$a_{ij} = -a_{ji} \ (i \neq j)$

即A反对称

[例] $A_{m \times n}$，若对任意列向量P有$AP = 0$则$A = 0$.

取$P = e_i$，则$Ae_i = 0$

$\therefore A(e_1 \cdots e_n) = 0$

即$AE = 0 \ \therefore A = 0$

$e_i^T A e_j = a_{ij}$.

(3) 定理:

$A=(\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n)$, 则:

A是正交阵 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 是 R^n 的规范正交基.

(证):

$$A^TA=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots \\ \alpha_n^T\end{bmatrix}(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \alpha_n^T\alpha_1 & & & \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n)\\ \vdots & & & \\ (\alpha_n,\alpha_1) & \cdots & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{bmatrix}$$

$\because A^TA=E \Rightarrow$

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

那么这n个向量两两正交,且模为1,故为规范正交基.

(推论): A是行向量组,则:

A正交 $\Leftrightarrow$ A的行向量组是 R^n 的规范正交基.

(应用:判断矩阵是否正交).

$$A=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ A. B都正交.

故"规范"二字不可去掉.

如:虽然 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 是 R^2 正交基, 但 $(\alpha_1\ \alpha_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 不正交.

5.结论.

(1) 证明三维列向量 $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 所生成的向量空间就是 R^3

$\Leftrightarrow$ 证明 $\alpha_1.\alpha_2\alpha_3$ 无关, 即 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 是 R^3 的一个基, 其生成的V就是 R^3

(2) 由 $\alpha_1.\alpha_2$ 生成 V_1, 由 $\beta_1.\beta_2$ 生成 V_2, 证 $V_1=V_2$

$\Leftrightarrow$ 证 $(\alpha_1\ \alpha_2)(\beta_1\ \beta_2)$ 可互相表示 (等价)

(3) $(\alpha_1 \cdots \alpha_r)$ 可由 $(\beta_1 \cdots \beta_s)$ 表示.

$\Rightarrow$ 前者极大无关组可由后者表示

5.概念辨析: 等价

(1) $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 与 $\beta_1 \cdots \beta_s$ 等价.

$\Leftrightarrow$ 秩相等.且 $(\alpha_1 \cdots \alpha_r)$ 可由 $(\beta_1 \cdots \beta_s)$ 表示

(2) $(\alpha_1 \cdots \alpha_r)$ 与 $(\beta_1 \cdots \beta_s)$ 等价, 则 A. B 未必等价.

而当且仅当 $r=s$ 时, A.B等价.

(3) A. B 矩阵等价, 则: A与B的列(行)向量组未必等价

反例: $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

① 若 $A \xrightarrow{列} B$, 则 A.B 列向量组等价, 此时行向量组未必等价.

$AQ=B$

$\therefore$ B列可由A列表示.

而 $A=BQ^{-1}$ $\therefore$ A列可由B列表示.

$\therefore$ 二者列向量组可互相表示

反例: $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow{列} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

② 若 $A \xrightarrow{行} B$, 则行向量组等价.

[判].

1.秩相等的两个线性无关组等价 (×).

2.所含向量个数相同的两个线性无关的向量组等价 (×)

设 $\alpha_1 \cdots \alpha_m \cdots \alpha_{2m}$ 无关.

分成两半即为反例

3.若 $(\alpha_1 \cdots \alpha_m)$ 的秩为 $r(<m)$, 则 $(\alpha_1 \cdots \alpha_m)$ 中任意r个线性无关的向量组都与原向量组等价 (√)

4.$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关, β_1 可由 $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 线性表示, 而 β_2 不能由 $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 表示, 则对任意常数k, 必有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1+\beta_2$ 无关 (√)

反证: 设 $k\beta_1+\beta_2=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$

设 $\beta_1=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

代入知: $\beta_2=(l_1-kk_1)\alpha_1+(l_2-kk_2)\alpha_2+(l_3-kk_3)\alpha_3$. 矛盾

5.

6.若 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 线性无关, 总存在 α_{m+1} 使 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 仍线性无关 (×).

$\Rightarrow$ 要设 α 维数为n

$$\begin{cases}m<n: 有\\ m=n, 无.\end{cases}$$

7.若 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线性无关, 且 $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2} \cdots \alpha_n$ 中任一向量都可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线性表示, 则 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 是 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{r+1} \cdots \alpha_n$ 的一个极大无关组 (√)

8.若矩阵A.B.C满足 $A=BC$, 则A的列向量组可由B列向量组线性表示 (√).

也可说A行可由C行表示.

9.设向量空间V中的向量都是n维向量, 则 $\dim V=n$ (×).

$\dim V \le n$

10.A是可逆的反对称阵, α是n维列向量, 则 $R\begin{pmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{pmatrix}=n$ (√)

☆ $\alpha^TA^{-1}\alpha=0$.

[例] 设向量组 ~~α~~ β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 线性表示，但不能由向量组(I)：$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{m-1}$ 线性表示，记向量组(II)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{m-1}, \beta$。

则：$\begin{cases} \alpha_m \text{ 不可由(I)表示} \\ \alpha_m \text{ 可由(II)表示} \end{cases}$

⇒ 设 $\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m$

则 $k_m \neq 0$.

若 α_m 可由(I)表示，由第一个条件知 β 可由(I)表示，矛盾，故 α_m 不可由(I)表示

[例] 设向量组 α.β.γ 线性无关，α.β.δ 相关，则 C

A. α 必可由 β.γ.δ 线性表示

B. β 必不可由 α.γ.δ 表示

C. δ 必可由 α.β.γ 表示

D. δ 不可由 α.β.γ 表示

整体无关 部分无关 ∴ α.β 无关

故 δ 可被 α.β 表示。即：C

[例] 设n维列向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$，$(m<n)$ 线性无关，则n维列向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性无关的充要条件为 D

A. 向量组 $\alpha_1, \cdots \alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1 \cdots \beta_m$ 线性表示

B. $\beta_1 \cdots \beta_m$ 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 表示

C. $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 与 $\beta_1 \cdots \beta_m$ 等价.

D. 矩阵 $A = (\alpha_1, \cdots \alpha_m)$ 与 $B = (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m)$ 等价.

⇒ 个数相同的两个线性无关的向量组无法判断其线性表示关系

[例] 设有任意两个n维向量组 $\alpha_1, \cdots \alpha_m$ 和 $\beta_1, \cdots \beta_m$，若存在两组不全为0的数 $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ 和 $k_1 \cdots k_m$ 使 $(\lambda_1+k_1)\alpha_1 + \cdots + (\lambda_m+k_m)\alpha_m + (\lambda_1-k_1)\beta_1 + \cdots + (\lambda_m-k_m)\beta_m = 0$，则有：$\alpha_1+\beta_1, \cdots \alpha_m+\beta_m, \alpha_1-\beta_1, \cdots \alpha_m-\beta_m$ 线性相关 (✓)

• 若向量组 $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 中任意一个向量都可由其余两个向量线性表示则 $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 相关 (✓)

若向量组 $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 相关，则 α_1 可表示为其余向量组合 (×)

[例] 设 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots a_{in})$，$i=1,2,\cdots m$，$m \le n$，且 $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{m} |a_{ij}|$，证明：向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 无关.

⇒ 反证法，设 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 相关，故有不全为0的数 $k_1 \sim k_m$ 使 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$

即：$(\alpha_1^T, \cdots, \alpha_m^T)\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = 0$ 设 $|k_j|$ 最大

即 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = 0$

~~$a_{1j}k_1+$~~

$\therefore a_{1j}k_1 + \cdots a_{jj}k_j + \cdots + a_{mj}k_m = 0$

故 $|a_{jj}k_j| = |a_{jj}||k_j| = |\sum_{i=1, i\neq j} a_{ij}k_i|$

$\le \sum_{i\neq j} |a_{ij}||k_i| \le \sum_{i\neq j}^{m} |a_{ij}||k_j|$

$\therefore |a_{jj}| \le \sum_{i=1, i\neq j}^{m} |a_{ij}|$. 矛盾.

[例] $\alpha_1, \cdots \alpha_m$ $(m \ge 2)$ 无关，令：$\beta_1 = \alpha_1 + \lambda_1\alpha_m$，$\beta_2 = \alpha_2 + \lambda_2\alpha_m$，$\cdots$ $\beta_{m-1} = \alpha_{m-1} + \lambda_{m-1}\alpha_m$，证明向量组 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{m-1}$ 线性无关

$\Rightarrow (\beta) = (\alpha)\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}_{m\times(m-1)}$

显然，右边的为列满秩，

$\therefore R(\beta_1 \cdots \beta_{m-1}) = R(\text{右}) = m-1$

即 β 无关.

[例] 向量组 $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 无关，$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3.\alpha_4$ 相关，$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3.\alpha_5$ 无关则 $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3.\alpha_5-\alpha_4$ 无关.

⇒ 由前2个条件知：

$\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$

$\therefore (\quad) = (\alpha_1.\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 1 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

∴ 方阵满秩

$\therefore \alpha_1.\alpha_2.\alpha_3.\alpha_5-\alpha_4$ 无关.

[例] 证明：n维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 线性无关的充要条件是 $\begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \neq 0$

⇒ 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$

则 $D = |\quad| = |A^T A| = |A|^2$

∴ A中无关 ⟺ $|A| \neq 0$ ⟺ $D \neq 0$.

[例] 设由 $\alpha_1 = (1,1,0,0)^T$，$\alpha_2 = (1,0,1,1)^T$ 生成的向量空间为 V_1，由 $\beta_1 = (2,-1,3,3)^T$ $\beta_2 = (0,1,-1,-1)^T$ 生成的空间为 V_2，证明 $V_1 = V_2$

⇒ 只需证明 α_1, α_2 与 β_1, β_2 等价

可得出 $(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

∵ 方阵可逆 ∴ α. β 等价.

[例] 已知 A 是三阶矩阵，$\alpha_1 \neq 0$，$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 是三维向量，满足 $A\alpha_1 = \alpha_1$，$A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2$，$A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$，证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关.

反证：设 可不全为0 k_1, k_2, k_3 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ ①

①左乘A 代入已知条件得：$k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1+\alpha_2) + k_3(\alpha_2+\alpha_3) = 0$ ②

②−①得：$k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2 = 0$ ③

③左乘A 代入条件：$k_2\alpha_1 + k_3(\alpha_1+\alpha_2) = 0$ ④

④−③得：$k_3\alpha_1 = 0$

因 $\alpha_1 \neq 0$ ∴ $k_3 = 0$ 代入③知：$k_2 = 0$ 代入①知 $k_1 = 0$

∴ 矛盾.

法二：

$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

∵ R(左) = $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

∴ A满秩 $R(A) = 3$

$\because R(A) \le R(A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) \le 3$.

$\therefore R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$

$\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}_n$ ⇒ 行和相等.

[极好] 已知 m 个向量组线性相关，但其中任意 $m-1$ 个向量都线性无关，证明：

(1) 若存在等式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则这些系数要么全为0，要么全不为0.

证：

① 若存在某个 $k_i=0$，由剩下的无关知，剩下的 k 也全为0

$\therefore k_1=k_2=\cdots=k_m=0$.

② 若存在某个 $k_i\neq0$，反证法：

设此时 $k_j=0$ $(j\neq i)$，则必有除 α_j 以外的 $(m-1)$ 个向量是相关的，矛盾，$\therefore$ 全不为0

或：若 $k_i\neq0$，则 α_i 可由其余 α 表示，而 $k_j=0$，即 α_i 可由除 α_j 以外的表示，即除 α_j 以外，其余的 $m-1$ 个向量相关，故矛盾.

(2) 如果存在2个等式：

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m=0$ ①

$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_m\alpha_m=0$ ②

其中 $\lambda_1\neq0$，则 $\frac{k_1}{\lambda_1}=\frac{k_2}{\lambda_2}=\cdots\frac{k_m}{\lambda_m}$

$\because \lambda_1\neq0$. $\therefore$ 由(1)知 λ 全不为0

将 ①×λ_1 − ②×k_1 得：

$(\quad)\alpha_2+(\quad)\alpha_3+\cdots(\quad)\alpha_m=0$

$\because$ 无关 $\therefore \lambda_1k_i-k_1\lambda_i=0$

$(i=2,3\cdots m)$

$\therefore \frac{k_1}{\lambda_1}=\frac{k_2}{\lambda_2}=\cdots\frac{k_m}{\lambda_m}$

[例] P81，$\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ $\beta_2=\begin{bmatrix}a\\2\\1\end{bmatrix}$ $\beta_3=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$

$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$ $\alpha_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$ 具有相同的秩，且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示，求 a、b.

法一：$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$，$\therefore R=2$

$\therefore |(\beta_1,\beta_2,\beta_3)|=0$ $\therefore a=3b$

$\because \beta_3$ 可由 α 表示

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\beta_3$ 相关

令 $|(\alpha_1,\alpha_2,\beta_3)|=0$ $\therefore b=5$

法二：方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$ 有解.

[例] 设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 可由 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$ 线性表示，且 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 无关，试证：向量组 $\beta_1\cdots\beta_n$ 无关.

法①：$R(\alpha_i)\le R(\beta_i)$

$\therefore n=R(\alpha_i)\le R(\beta_i)\le n$

$\therefore (\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)$ 满秩.

法②：

$$\underset{A}{(\alpha_1\cdots\alpha_n)}=\underset{B}{(\beta_1\cdots\beta_n)}\underset{C}{\begin{bmatrix}k_{11}&\cdots&k_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ k_{n1}&\cdots&k_{nn}\end{bmatrix}}$$

$\because R(A)=n$ $\therefore R(BC)=n$

~~又 $\because R(BC)\le R(B)+R(C)-n$~~

$\therefore n=R(BC)\le R(B)\le n$

$\therefore R(B)=n$，满秩即无关.

[例] 设 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示，但 α 不能由 α_2,α_3 表示，试证 α_1 可由 α,α_2,α_3 表示

⇒ 设 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ $(k_1\neq0)$

$\therefore \alpha_1=\frac{1}{k_1}\alpha-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-\frac{k_3}{k_1}\alpha_3$

即 α_1 可由 α,α_2,α_3 表示.

[例] 设 A、B 分别为 $m\times p$ 和 $p\times n$ 矩阵，证明 $R(AB)\le\min\{R(A),R(B)\}$

证：由

$(A\ \ O_{m\times n})\xrightarrow{c_2+c_1(B)}(A\ \ AB)$

$\begin{pmatrix}B\\O_{m\times n}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(A)r_1}\begin{pmatrix}B\\AB\end{pmatrix}$ 知：

$R(A)=R(A\ \ O_{m\times n})=R(A\ \ AB)\ge R(AB)$

$R(B)=R\begin{pmatrix}B\\O_{m\times n}\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}B\\AB\end{pmatrix}\ge R(AB)$

[较好] 设 $(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_5)=A=\begin{bmatrix}1&2&3&0&1\\2&1&1&2&1\\1&3&4&0&1\end{bmatrix}$，

$\left(\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&0&1\\0&1&1&0&0\\0&0&-2&2&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&-2&2&-1\end{bmatrix}\right.$

$\left.\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)$，求该向量组的一个极大无关组并表示其余向量？

⇒ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为极大无关组

$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$

$\alpha_5=\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3$

[例]设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_k$ 是互不相同的k个数,且 $k\le n$,证明n维向量组 $\alpha_1\sim\alpha_k$ 无关.

$\alpha_1=\begin{bmatrix}a_1\\a_1^2\\\vdots\\a_1^{n-1}\end{bmatrix};\begin{bmatrix}a_2\\a_2^2\\\vdots\\a_2^{n-1}\end{bmatrix}=\alpha_2,\ \alpha_k=\begin{bmatrix}a_k\\\vdots\\a_k^{n-1}\end{bmatrix}$.

构造 $\beta_i=\begin{bmatrix}a_i\\\vdots\\a_i^{k-1}\end{bmatrix}$, $1\le i\le k$

$\therefore(\beta_1\cdots\beta_k)$ 为方阵,

$\det=\prod_{1\le j<i\le k}(a_i-a_j)\ne0$.

$\therefore\beta$ 无关 (无关加长得 α 仍无关)

[例]设向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r,\alpha_{r+1}\cdots\alpha_m$ 的秩为s,向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 的秩是t.

试证: $t\ge r+s-m$.

证: $S=R(\quad)\le R(\alpha_1,\cdots\alpha_r)+R(\alpha_{r+1}\cdots\alpha_m)$

$=t+R(\alpha_{r+1},\cdots\alpha_m)$

$\le t+(m-r)$

[例]n维列向量 $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性相关,试证:

$$D=\begin{vmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_m\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_m\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_m^T\alpha_1 & \alpha_m^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_m^T\alpha_m\end{vmatrix}=0.$$

令 $A=(\alpha_1\cdots\alpha_m)$

$D=|A^TA|$

$R(A^TA)\le R(A)<m$

$\therefore D=0$.

[例]设列向量组 $\beta_1\cdots\beta_s$ 和列向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 满足:

$(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_r)=(\alpha_1\cdots\alpha_s)K_{s\times r}$

且 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$ 无关,证明: $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_r$ 线性无关的充要条件是矩阵K的秩为r. P69 25.

$\Rightarrow B=AK$

$\therefore R(B)=R(AK)\le R(K)$

$\because\alpha_1\cdots\alpha_s$ 无关 $\therefore R(A)=S$

$\therefore R(B)=R(AK)\ge R(K)$

$\therefore R(B)=R(K)$

$\therefore\beta$ 无关 $\Leftrightarrow B$ 列满秩 $\Leftrightarrow$

$R(B)=r\Leftrightarrow R(K)=r$.

[例]设 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是一组n维向量,证明:该向量组线性无关的充要条件是任一n维向量都可由它们线性表示.

$\Rightarrow$ 对 $\forall\alpha\in R^n$, $(\alpha,\alpha_1\cdots\alpha_n)$ 相关,再由 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 无关知 α 可由 $\alpha_1\sim\alpha_n$ 表示

$\Leftarrow$ 因任一n维向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性表示,所以n维向量组 $\varepsilon_1=(1,0\cdots0)\cdots\varepsilon_n=(0,0\cdots1)$ 也可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 表示,而向量组 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$ 的秩为n,所以向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 秩为n,即 $\alpha_1\sim\alpha_n$ 无关.

第五章：线性方程组

一、基本概念

设有线性方程组（m个方程，n个未知量）

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{bmatrix}$　$\beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$　$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

1. 称 A 为系数矩阵。
   记 $B=\left[A \,\middle|\, \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right]$ 为增广矩阵
2. 方程组可写成 $AX=\beta$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

3. 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$
   其中 α_i 为列向量 $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$

$\therefore AX=\beta$ 可写成向量形式：

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_n\alpha_n=\beta.$

实质：将系数矩阵按列分块，X矩阵就得按行分块。

4. 设 $x_1=d_1, x_2=d_2\cdots x_n=d_n$ 为方程的解，则称 $X_0=\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ 为解（向量）。

注：若方程组有解，则称方程组相容，否则不相容。

5. 方程形式 $\begin{cases} \text{一般形式} \\ \text{矩阵形式} \\ \text{向量形式} \end{cases}$
6. 分类：
   $\begin{cases} \text{非齐次：} b_i \text{不全为0} \\ \text{齐次：} b_i \text{全为0.} \end{cases}$

又因 $x_1=x_2=\cdots x_n=0$ 是齐次~的零解，所以齐次~一定相容。

二、非齐次线性方程组

1. 解的实质：

方程组的解就是用向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性表示 β 的表示系数，因此下列提法等价

$\begin{cases} \text{方程组有解} \\ \beta \text{可由} \alpha_1\cdots\alpha_n \text{线性表示（R同）} \\ \alpha_1\cdots\alpha_n \text{与} \alpha_1\cdots\alpha_n,\beta \text{等价.} \\ R(A)=R(A|\beta). \end{cases}$

2. 定理：

非齐次线性方程组有解的充要条件是它的系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，即：

$R(A)=R(A\,|\,\beta)$

注：即增广矩阵的行阶梯中不含有行 $(0,0\cdots 0|b)$.

三、齐次线性方程组解的结构

设有方程组 $AX=0$，即：

$x_1\alpha_1+\cdots x_n\alpha_n=0.$

记 $N(A)$ 为 $AX=0$ 的全体解向量构成的解集合

1. 齐次方程组必有解。
2. 分析过程：

(1) $A_{m\times n}X=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow R(A_{m\times n})=n$

(2) 有非零解（用 α 线性表示0系数不全为0）

$\Leftrightarrow R(A_{m\times n})<n.$

$\Leftrightarrow$ 有无穷多解（给 X_0 乘任意常数均为解）

3. 定理：

齐次方程组解的集合构成向量空间 $N(A)$，并且 $N(A)$ 的维数是 $n-R(A)$

n 是未知量个数，也是 A 列数

【例】已知 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，A 是4阶方阵，$R(A)=3$，求 $AX=\beta$ 的通解：

特解为：$\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$

通解为：$[(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)]k.$

【基础】：

1. 齐次线性方程组的解的任意线性组合仍为其解。
2. $A_{m\times n}$，$R(A)=m$，则对任意向量 β，方程组 $AX=\beta$ 均有解。
   $m=R(A)\le R(A|\beta)\le \min\{m,n\}$
3. 若 $|A|=0$，则 A^* 的各行成比例。
   $\Rightarrow r(A)\le n-1.$
   ① 若 $r(A)=n-1$，则 $r(A^*)=1$
   不妨设第一行 α_1 为行向量的极大无关组，则剩余行向量均可由 α_1 线性表示，故各行成比例.
   ② 若 $r(A)<n-1$，则 $r(A^*)=0$
   即：$A^*=0$，显然各行成比例.
4. 设 $A=(a_{ij})_{n\times(n+1)}$，$r(A)=n$，则方程组 $AX=0$ 的任意两解成比例.
   $\Rightarrow$ 基础解系只有1个向量
   $\therefore X=k\xi.$
5. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，且 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0$ $(i=1,2\cdots n)$，则 A 不可逆.
   $\Rightarrow$ $A\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}=0.$　$\therefore AX=0$ 有非零解 $\therefore |A|=0.$
6. $A_{n\times n}$，$B=\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$ 其中 $b=(b_1\cdots b_n)^T$.
   若 $r(A)=r(B)$，则 $AX=b$ 有解.
   $\because r(A)\le r(A|b)\le r(B)=r(A)$
   $\therefore r(A|b)=r(A)$ $\therefore AX=b$ 有解
7. $A_{n\times(n-1)}$，$B=(A|\beta)$
   ① 若 $AX=b$ 有解，则 $|B|=0$
   $R(B)=r(A)\le n-1.$
   ② $r(A)=n-1$ 时，$AX=b$ 有解 $\Leftrightarrow |B|=0$
   $\Rightarrow$ 显然，现证 $\Leftarrow$
   $n-1=r(A)\le r(A|\beta)<n$
   $\therefore r(A|\beta)=n-1=r(A)$
8. $A_{n\times n}$，对任意的n维非零列向量X，均有 $X^TAX>0$，则 $|A|\ne 0$.
   $\Rightarrow$ 若 $|A|=0$，则 $AX=0$ 有非0解
   设 $AX_1=0$，则 $X_1^TAX_1=X_1^T\cdot 0=0$
   与题设矛盾.

Page:　Date:

基础解系中有 $n-r$ 个向量　$\{x \mid AX=\beta\}$ 秩为 $n-R(A)+1$.

(1) 证明 $N(A)$ 为向量空间

⟺ 只需证明 $N(A)$ 对加法、数乘封闭

(2) 证明维数为 $n-R(A)$

设 $R(A)=r$

① 若 $r=n$，则 $N(A)=\{0\}$，显然成立

② 若 $r<n$，则 A 中存在 r 阶子式不为 0，不妨设 A 左上角 r 阶子式不为 0

即：$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$

将 A 行分：$AX=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{bmatrix}X$

$\begin{bmatrix}\beta_1 x\\ \beta_2 x\\ \vdots \\ \beta_n x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$

则 A 的前 r 个行向量是 A 行向量的一个极大无关组.

即 从 $\beta_{r+1}X=0$ 到 $\beta_nX=0$ 无效

$\therefore \begin{cases} a_{11}x_1+\cdots a_{1r}x_r=-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots \\ \quad\vdots \\ a_{r1}x_1+\cdots a_{rr}x_r=-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n \end{cases}$

$\therefore$ 只需试

$$\begin{matrix} x_{r+1} & x_{r+2} & \cdots & x_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}$$

$\therefore$ 得 $n-r$ 个解向量(无关)

$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}d_{11}\\d_{21}\\ \vdots\\d_{r1}\\1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}\quad \varepsilon_2=\begin{bmatrix}d_{12}\\d_{22}\\ \vdots\\d_{r2}\\0\\1\\ \vdots\\0\end{bmatrix}\cdots \varepsilon_{n-r}=\begin{bmatrix}d_{1,n-r}\\d_{2,n-r}\\ \vdots\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}$

令 $B=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-r}\ \varepsilon)$，则 $AB=(A\varepsilon_1\ A\varepsilon_2\cdots A\varepsilon_{n-r}\ A\varepsilon)=0$.

$\therefore R(B)\le n-R(A) < n-r+1$

从而 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-r}\ \varepsilon$ 相关.

(3) 当 $R(A)<n$ 时，称 $N(A)$ 的基 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-r}$ 为方程组的基础解系，称 $x=k_1\varepsilon_1+\cdots+k_{n-r}\varepsilon_{n-r}$ 为通解.

☆ $AX=0$ 的 $n-r$ 个线性无关的解即为基础解系

(4) $A_{n\times n}X=0$

① 只有零解(唯一解).

⟺ $R(A)=n$ ⟺ $|A|\neq 0$；可逆.

② 有非零解(无穷多解).

⟺ $R(A)<n$ ⟺ $|A|=0$ ⟺ A 不可逆.

(eg.) $A_{n\times n}$ 中 $\sum a_{ij}=0\ (i=1,\cdots n)$ 则 A 不可逆.

证：$A\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum a_{1j}\\ \sum a_{2j}\\ \vdots\\ \sum a_{nj}\end{bmatrix}=0$

$\therefore A$ 不可逆.

(eg.) $A_{n\times n}$ 为实矩阵，对 $\forall x\in R^n (x\neq 0)$ 有：$x^TAx>0$ 则 A 可逆

反证. 若 A 不可逆，则 $\exists x_0\neq 0$ 使 $Ax_0=0$.

$\therefore x_0^TAx_0=x_0^T\times 0=0$. 矛盾

$\therefore A$ 可逆

4. 关于秩.

(1) $AX=0$ 的解都是 $BX=0$ 的解，则 $R(A)\ge R(B)$

证：$N(A)\subset N(B)$

$\therefore n-R(A)\le n-R(B)$

(2) $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解，则 $R(A)=R(B)$

(eg.) $A_{m\times n}$ 实，则 $R(A^TA)=R(A)=R(AA^T)$

考虑 $AX=0$ 与 $A^TAX=0$.

若有 $Ax_0=0$，则必有 $A^TAx_0=0$

若有 $A^TAY_0=0$，则 $(AY_0, AY_0)=(AY_0)^TAY_0=Y_0^TA^TAY_0=0$.

$\therefore$ 同解 $\therefore$ 秩相等.

而 $(A^T)^TA^TX=0$ 与 $A^TX=0$ 同解.

(3) 秩相等未必同解

(4) $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解 ⟺ 秩相同且 $AX=0$ 的解是 $BX=0$ 的解.

"⇐" 设秩为 r，设 $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的基础解系，则其也是 $BX=0$ 的解，而 $\varepsilon_1\sim\varepsilon_{n-r}$ 无关 $\therefore \varepsilon$ 为 $BX=0$ 基础解系.

(5) $AX=0$ 的解都是 $BX=0$ 的解 ⟺ $AX=0$ 与 $\begin{cases}AX=0\\BX=0\end{cases}$ 同解.

"⇒" 显然.

"⇐" 若 $AX_0=0$，则 $\begin{cases}AX_0=0\\BX_0=0\end{cases}$

若 $\begin{cases}AY_0=0\\BY_0=0\end{cases}$ 则 $AY_0=0$

"⇐" 若 $AX_0=0$，则 $BX_0=0$.

(6) $AX=0$ 的解都是 $BX=0$ 的解

⟺ $R(A)=R\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$；

(eg.)

$\begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\ ax_1+a^2x_3=0\\ ax_2+a^2x_4=0\end{cases}$ 满足 $x_1+x_2+x_3=0$，求 a.

令 $A=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\a&0&a^2&0\\0&a&0&a^2\end{bmatrix}$　$B=[1,1,1,0]$

则 $R(A)=R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}<4$

$\therefore$ 使 $\begin{vmatrix}A\\B\end{vmatrix}=0$ 时求 $a=\frac{1}{2}$

(7) $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解 ⟺ $R(A)=R(B)=R\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$.

三.非齐次方程组补充.

1. $AX=\beta$

$(A|\beta)\xrightarrow{行}(A_1|\beta_1)$.

则二者同解.

证: $P(A|\beta)=(A_1|\beta_1)$

$\therefore (PA|P\beta)=(A_1|\beta_1)$

若 $Ax_0=\beta$, $PAx_0=P\beta$

即: $A_1x_0=\beta_1$

若 $A_1Y_0=\beta_1$, 则 $P^{-1}A_1Y_0=P^{-1}\beta_1$

即: $AY_0=\beta$.

即: 被增广矩阵行变换不改变解.

(eg.) 求 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3-x_4=0\\x_1-x_2+x_3-3x_4=0\\2x_1+3x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$

的基础解系和通解.

$A\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\0&-2&0&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{matrix}1&0&1&-2\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{matrix}$

$R(A)=2$, $\therefore$ 无数解.

$\therefore$ 同解方程 $\begin{cases}x_1=-x_3+2x_4\\x_2=-x_4\end{cases}$

令 $\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

可得 $\varepsilon_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ $\varepsilon_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$

通解 $X=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2$.

(k_1, k_2 为任意常数)

法二: 令 $\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1+2k_2\\-k_2\\k_1\\k_2\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$

★ $A\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}E_r&B\\0&0\end{bmatrix}$

则 $\begin{bmatrix}-B\\E_r\end{bmatrix}$ 列向量组为基础解系.

2. 基础解系不同?

$X_1=\eta_1+k_1\varepsilon_1$

$X_2=\eta_2+k_2\varepsilon_2$.

$\Rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2$ 为等价向量组, 再看 η 是否满足 X_1 即可

5. 公共解.

① $AX=0$ 与 $BX=0$ 的公共解是 $\begin{cases}AX=0\\BX=0\end{cases}$ 的解.

② (eg.) 2 个齐次方程组

(I) 的通解为 $k_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\2\\2\\1\end{bmatrix}$

与 (II) $\begin{cases}x_1+x_4=0\\x_1+2x_2-x_4=0\end{cases}$ 求(I).(II)公共解

$\Rightarrow$ 将(I)的通解代入(II).

$\begin{cases}-k_2+k_2=0\\-k_2+2k_1+4k_2-k_2=0\end{cases}$ $\therefore k_1=-k_2$.

$\therefore$ 公共解 $X=k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ (k_1 是任意常数).

③ (I) 通解 $k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2$, (II) 通解 $l_1\delta_1+l_2\delta_2+l_3\delta_3$.

令二者相等, 由系数条件.

④ $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_r$ 是 n 维列向量, $r<n$, 且 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_r$ 无关, 找一个齐次线性方程组 $AX=0$ 以 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_r$ 为基础解系.

$\Rightarrow$ 令 $B=[\varepsilon_1\cdots\varepsilon_r]$

考虑 $B^TX=0$, $\because R(B^T)=r$

$\therefore B^TX=0$ 的解中有 $n-r$ 个向量,

设基础解系为 $(\delta_1\cdots\delta_{n-r})$

则 $A^T=(\delta_1,\cdots\delta_{n-r})$

此时 $B^TA^T=0$, $AB=0$, $R(A)=n-r$.

$\therefore AX=0$ 的基础解系中有 $n-R(A)$ $=r$ 个向量 即: $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_r$ 就是 $AX=0$ 基础解系.

(eg.) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2)\in R^{3\times2}$, $R(A)=2$, β 是线性无关组 $A^TX=0$ 基础解系. 求线性方程 $\beta^TX=0$ 基础解系.

$\Rightarrow \because \alpha_1^T\beta=\alpha_2^T\beta=0$

$\therefore \beta^T\alpha_1=\beta^T\alpha_2=0$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2$ 为 $\beta^TX=0$ 的 2 个无关解

$\because \beta\neq0$ $R(\beta)=1$ $\therefore n-R(\beta)=2$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2$ 即为 $\beta^TX=0$ 基础解系

$A_{n\times n}$，则 $AX=0$ 与 $A^TAX=0$ 同解.

四.非齐次线性方程组解

1.非齐次 $AX=\beta$ ($\beta\neq 0$)，称：$AX=0$ 为 $AX=\beta$ 的导出组.

2.定理：

①若 η_1,η_2 都是 $AX=\beta$ 的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是 $AX=0$ 的解

②.非齐次解+导出组解为非齐次的解；~~即~~ 非齐次解差为导出组解.

3.对 $A_{m\times n}X=\beta$.

① $R(A|\beta)\neq R(A)$ 时无解

② $R(A|\beta)=R(A)=n$ 时唯一解.

③ $R(A|\beta)=R(A)<n$ 无穷解.
$\eta_1+k(\eta_1-\eta_2)$

证②：若 $A\varepsilon_1=A\varepsilon_2=\beta$
令 $\delta=\varepsilon_1-\varepsilon_2$，则导出组有非零解 ($A\delta=0$)，与 $R(A)=n$ 矛盾，故 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$
前面加上：增广=系数R.
∴有解，再给解是唯一)

证③：因为有解 ∴ $R(A|\beta)=R(A)$
若 $R(A)<n$，则 $\exists\,\delta\neq 0$ 使 $A\delta=0$，也设 ξ 是 $AX=\beta$ 的解，则 $\delta+\xi$ 也是 $AX=\beta$ 的解，则与解唯一矛盾.

4.当 $R(A|\beta)=R(A)<n$ 时.设 $\delta_1\cdots\delta_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的基础解系，η^* 是 $AX=\beta$ 的特解，则 $AX=\beta$ 通解为：
$\eta=\eta^*+k_1\delta_1+\cdots k_{n-r}\delta_{n-r}$
即：特解+导出组通解

证：$\{x\mid AX=\beta\}=\{\eta^*+\sum k_i\delta_i\}$
左⊂右：设 $A\eta=\beta$
则 $\eta-\eta^*$=导出组解，可被基础解表示
右⊂左：从右任取一个.
导出解+齐次解为 $AX=\beta$ 解

5.重要

① $AX=\beta$ 有唯一解 $\Rightarrow$ $AX=0$ 唯一解
$\not\Leftarrow$

② $AX=\beta$ 有无穷解 $\Rightarrow$ $AX=0$ 有无穷解
$\not\Leftarrow$

③特：$A_{n\times n}$.
$AX=\beta$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $AX=0$ 唯一解
∵ A是 $(A|\beta)$ 的子列
∴ $n\geq R(A|\beta)\geq R(A)=n$.

④ $A_{n\times n}$
$AX=\beta$ 无穷解 $\Rightarrow$ $AX=0$ 无穷解
$\not\Leftarrow$
而 $\begin{cases}R(A)\leq R(A|\beta)\leq n\\ R(A)<n\end{cases}$ 回不去
∴回推非齐次不一定有解.

(eg1). $\begin{cases}2x_1+4x_2-x_3+3x_4=9\\ x_1+2x_2+x_3=6\\ x_1+2x_2+2x_3-x_4=7\\ 2x_1+4x_2+x_3+x_4=11\end{cases}$ 求通解.

解：$(A|\beta)\xrightarrow{\text{行变换}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&0&1&5\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$

∴同解方程 $\begin{cases}x_1=-2x_2-x_4+5\\ x_3=x_4+1\end{cases}$

⟹二行非0首式在哪一列哪不自由
也可每一行第一个
令 $x_2=x_4=0$ 求特解 $\eta^*=\begin{bmatrix}5\\1\\8\end{bmatrix}$
再求通解即可
⟹有几个自由未知量是几个常数

法二：令 $x_2=k_1$，$x_4=k_2$
$\therefore X=\begin{bmatrix}-2k_1-k_2+5\\k_1\\k_2+1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$，$k_1,k_2$ 任意

6.**总结论.**
$\eta_1\cdots\eta_s$ 是 $AX=\beta$ 的解.
①若：$k_1+k_2+\cdots k_s=0$，则 $k_1\eta_1+\cdots k_s\eta_s$ 是 $AX=0$ 的解
②若 $k_1+\cdots k_s=1$，则 $k_1\eta_1+\cdots k_s\eta_s$ 是 $AX=\beta$ 的解.

[例]：

1.对n元方程组 $AX=b$，有：
(1)若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=b$ 有唯一解 (×).
(2) $AX=b$ 有唯一解的充要条件是 $R(A)=n$ (×)
⟸不成立：$n\leq R(A|\beta)\leq\min\{m,n\}$
(3)若 $AX=b$ 有2个不同解，则 $AX=0$ 有无穷多解 (✓).

2.设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 是一个齐次线性方程组的系数矩阵，则该齐次线性方程组仅有零解的充要条件是：A列向量组线性无关 (✓)
⟺ $R(A)=n$.

3.若 $A_{m\times n}B=0$，$R(B)=n-R(A)$. 则B的列向量组是 $AX=0$ 的基础解系 (×).
⟹B列向量都是 $AX=0$ 的解，但B列数未知，当B列数 $>R(B)$ 时则不对；但此题若改成：B列向量极大无关组是 $AX=0$ 基础解系则正确.

4.∃矩阵B使 $A_{m\times n}B=0$ 且 $R(A)+R(B)=n$ (✓).
若A经初等变化可以化成B，则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解. (×)
⟹初等行变化

5. $A_{m\times n}$ 的秩为 r ($r<n$)：
(1) $AX=0$ 的任何基础解系中均含有 $n-r$ 个向量 (✓)
(2)若有 $n\times(n-r)$ 矩阵B. 满足 $AB=0$，则 $R(B)\leq n-r$ (✓)
(3) β 为一m维列向量，且 $R(A|\beta)=r$，则 β 可由A的列向量组线性表示 (✓)
(4). u 是 $AX=0$ 通解，η_0 为 $AX=\beta$ 的特解，则 η_0+u 为 $AX=\beta$ 的通解 (✓).

(eg2). 讨论方程组解情况

$$\begin{cases} ax_1+(a-1)x_2+x_3=1 \\ ax_1+ax_2+x_3=2 \\ 2ax_1+2(a-1)x_2+ax_3=2. \end{cases}$$

法一: $(A|\beta) \to \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 2-a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array}\right]$.

当 $a\neq 0$ 且 $a\neq 2$ 时,

$R(A|\beta)=R(A)=3$. 唯一解.

当 $a=0$ 时. $R(A|\beta)=3$, $R(A)=2$

∴无解.

当 $a=2$ 时. $R(A|\beta)=R(A)=2<3$

∴有无穷多解.

法二: Cramer法则

$|A| = \begin{vmatrix} a & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = a(a-2)$

∴ $|A|\neq 0$ 时 有唯一解.

(eg3). $A_{4\times4}$, $\beta(\neq 0)$ 是 4×1 矩阵, $R(A)=2$; $\eta_1\sim\eta_4$ 均是非齐次 $AX=\beta$ 的4个解, 且满足:

$\eta_1+\eta_2=\begin{bmatrix}2\\4\\0\\8\end{bmatrix}$; $\eta_2+\eta_3=\begin{bmatrix}3\\0\\3\\3\end{bmatrix}$.

$3\eta_3+\eta_4=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$. 求通解.

令 $\eta^*=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)$, 则 $A\eta^*=\beta$

令 $\xi_1=3(\eta_1+\eta_2)-2(2\eta_2+\eta_3)$

$\xi_2=2(\eta_1+\eta_2)-(3\eta_3+\eta_4)$

则 $A\xi_1=A\xi_2=0$

~~$(=(k_1+\dots k_5)\beta=0)$~~.

∵ $R(A)=2$ ∴ $AX=0$ 有2个基础解

∴ ξ_1, ξ_2 为基础解系

∴ $\eta=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2$.

法二: 求3个特解: X_1, X_2, X_3.

∴ X_1-X_2, X_2-X_3 为通解.

若二者线性无关, 则

$X=X_1+k_1(X_1-X_2)+k_2(X_2-X_3)$

若相关, 则舍去, 继续求.

(eg4) 若 $A_{4\times4}=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$.

$\alpha_2.\alpha_3.\alpha_4$ 无关, $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$.

$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$. 求 $AX=\beta$ 通解.

⇒ 经分析. $\alpha_2.\alpha_3.\alpha_4$ 为A极大无关组 ∴ $R(A)=3$.

而可求特解 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ ∴只需求一个非0解 使 $AX=0$ 即可

∵ $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+0\alpha_4=0$

∴ $\eta=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$ 使 $A\eta=0$.

∴ $X=\eta^*+k\eta$

$=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$.

(eg5). $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ $\beta=\begin{bmatrix}1\\0\\a\end{bmatrix}$ 已知

$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 求 $k_1.k_2.a$.

设 $x_1.x_2$ 使 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\beta$

∴令 $A=(\alpha_1,\alpha_2)$ 则 $AX=\beta$ 有解.

∴ $B=(A|\beta)\to\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&2&1\\0&0&a-2\end{array}\right]$ ∴ $a=2$

∴ $R(A|\beta)=R(A)=2=n$

∴有唯一解

$(A|\beta)\xrightarrow[\text{行}]{\text{初等行变}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{array}\right]$

∴ $\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\\x_2=\frac{1}{2}\end{cases}$ ∴ $\beta=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2$

(eg6).

$\alpha_1=\begin{bmatrix}\lambda+1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\\lambda+1\\1\end{bmatrix}$ $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\\lambda+1\end{bmatrix}$

$\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 讨论β何时可由 $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 表示

⇒ 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

~~考虑方程 $AX=\beta$~~

$(A|\beta)\xrightarrow[\text{互换}]{\text{一、三}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&\lambda+1&1\\1&\lambda+1&1&1\\\lambda+1&1&1&1\end{array}\right]$

$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&\lambda+1&1\\0&\lambda&-\lambda&0\\0&0&-\lambda^2-3\lambda&-\lambda\end{array}\right]$

当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时.

$R(A|\beta)=R(A)=3$ ∴可唯一表示

$\beta=\frac{1}{\lambda+3}\alpha_1+\frac{1}{\lambda+3}\alpha_2+\frac{1}{\lambda+3}\alpha_3$

当 $\lambda=0$ 时. 表示不唯一

解 $=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ ∴ $\beta=(1-k_1-k_2)\alpha_1+k_1\alpha_2+k_2\alpha_3$

当 $\lambda=-3$ 时, 不能表示

(eg). $\alpha_i=\begin{bmatrix}a_{i1}\\ \vdots\\ a_{in}\end{bmatrix}$ $i=1\cdots r$, $\alpha_1\sim\alpha_r$线性无关

β是 $\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots a_{1n}x_n=0\\ \vdots\\ a_{r1}x_1+\cdots a_{rn}x_n=0\end{cases}$ 的非零向量,

判断 $\alpha_1\cdots\alpha_r$, β相关性

⇒若 $k\beta+k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0$

两边与β作内积

$k(\beta,\beta)+k_1(\ \ )+k_2(\ \ )\cdots k_r(\ \ )=0$

$\therefore k(\beta,\beta)=0$

$\therefore k=0$.

由题干知 $(\alpha_1\cdots\alpha_n)\beta=0$.

(eg.) $A=(\alpha_1,\alpha_2)\in R^{3\times2}$, $R(A)=2$, β是 $A^TX=0$ 的基础解系, 求 $\beta^TX=0$ 的基础解系

⇒∵β 3行一列≠0

$\therefore R(\beta^T)=1$ ↗ β^T列数.

$\therefore \beta^TX=0$ 有 3-1 个向量.

$\because \begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\end{bmatrix}\beta=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\beta\\ \alpha_2^T\beta\end{bmatrix}=0$

$\therefore \beta^T\alpha_1=\beta^T\alpha_2=0$.

$\therefore(\alpha_1,\alpha_2)$ 即为基础解系

(eg.) 设A.B为n阶方阵, 且AB=0, 则必有 A　看AX=0.

A. 若R(A)=n, 则B=0.
B. 若A≠0, 则B=0.
C. 或者A=0, 或者B=0

[例] $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\5\end{bmatrix}$ $\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\a+2\\1\end{bmatrix}$ $\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{bmatrix}$

$\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{bmatrix}$

问何时 β 不能/可唯一表示

考虑方程: $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$

$B=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4|\beta)\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{array}\right]$

∴当 a=-1, b≠0时, β不由α表示.

当 a≠-1, b任意时, β可唯一表示为 $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3.\alpha_4$的组合.

[例] 当a为何值时, 方程组解的情况?

$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1\\(a+1)x_1+(a+1)x_2+2x_3=2\\(2a+1)x_1+3x_2+(a+2)x_3=3\end{cases}$

系数阵 $|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}$

$=(a+2)(a-1)^2$

(1) a≠1且a≠-2时, 方程组有唯一解: $x_1=x_2=x_3=\frac{1}{a+2}$

(2) 当a=-2时

$(A|\beta)\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&-2\\0&1&-1&-1\\0&0&0&3\end{array}\right]$

$\because R(A)=2\neq R(A|\beta)=3$

∴原方程组无解.

(3)当a=1时,

$(A|\beta)\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$ ∴无穷解.

同解方程为 $x_1=1-x_2-x_3$

$\therefore X=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

[例] $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, 则线性方程组 $(AB)X=0$ D

A. 当n>m时, 仅有零解
B. 当n>m时, 必有非零解
C. 当m>n时, 仅有零解
D. 当m>n时, 必有非零解.

$R(AB)\le R(A)\le\min\{m,n\}$.

[例] $\alpha_1=(a_1,a_2,a_3)^T$, $\alpha_2=(b_1,b_2,b_3)^T$, $\alpha_3=(c_1,c_2,c_3)^T$, 则三条直线 $a_ix+b_iy+c_i=0$, 其中 a_i,b_i不同时为0, 则三条线交于一点充要条件是 B

A. $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2)$
B. $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$相关, $\alpha_1.\alpha_2$无关

$\Rightarrow R(\alpha_1.\alpha_2|-\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2)=2$.

⇒3个方程, 2个未知数唯一解.

[例3] 设A.B为n阶方阵, 且AB=0, 则必有 A

A. 若R(A)=n, 则B=0
B. 若A≠0, 则B=0.
C. 或者A=0 或者B=0
D. |A|+|B|=0.

$R(A)+R(B)\le n$.

五. 几何应用.

1. 考察实系数线性方程组.

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \end{cases} \quad *$$

其中 a_{11}, a_{12}, a_{13} 不全为0;
a_{21}, a_{22}, a_{23} 也不全为0.

方程 * 中有2个平面, 方程组的解就是这2个平面的交点坐标.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$B=\left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ (1) $R(A)\neq R(B)$ 时, 两个平面平行不重合

(2). $R(A)=R(B)=1$ 时, 两个平面重合.

(3) $R(A)=R(B)=2$ 时, 方程组有无穷多解, 其通解可写成

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix}$$

即: $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$ (t任意常数)

$\therefore$ 2个平面交于一条直线

2. 参数方程:

$\Rightarrow$ 求 L: $\begin{cases} 2x+y+3=0 \\ 4x+y-z+5=0 \end{cases}$ 参数方程

解: $\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{行} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$

$\therefore$ 同解方程 $\begin{cases} 2x=z-2 \\ y=-z-1 \end{cases}$

$\therefore X=\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

(eg1.) $\begin{cases} \pi_1: 3x+2y+z=1-a \\ \pi_2: x+4y-3z=1+a \\ \pi_3: 3x-3y+(b-1)z=-9. \end{cases}$

讨论三个平面位置关系.

$\Rightarrow$ 由法向看出3个平面互不平行

$(A|\beta)\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & -a \\ 0 & 5 & -5 & 1+2a \\ 0 & 0 & b-7 & 3a-9 \end{array}\right]$

① $b\neq 7$ 时, $R(A|\beta)=R(A)=3$

$\therefore$ 有唯一解. 即, 三面交于一点

$\left(\frac{1-3a}{5}-\frac{3(a-3)}{b-7}, \frac{1+2a}{5}+\frac{3(a-3)}{b-7}, \frac{3(a-3)}{b-7}\right)$

② $b=7$, $a=3$ 时. $R(A|\beta)=R(A)=2$

$\therefore$ 无穷多解.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{8}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 三面交于一条线 $\begin{cases} x=-\frac{8}{5}-t \\ y=\frac{7}{5}+t \\ z=t \end{cases}$

③ $b=7$, $a\neq 3$ 时. 无解.

$\therefore \pi_1, \pi_2, \pi_3$ 两两相交并且交线 //

(eg2) 平面上三点共线的充要条件是 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$.

$\Rightarrow$ 设 $y=kx+b$ 为三点共的线

则 $\begin{cases} kx_1+b=y_1 \\ kx_2+b=y_2 \\ kx_3+b=y_3 \end{cases}$ * 关于 k, b 的方程有解.

$$R\underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ x_3 & 1 & y_3 \end{array}\right]}_{左}=R\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix}}_{右}\leq 2$$

$\therefore R\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right)=0$

$\Leftarrow$ 若 $x_1=x_2=x_3$ 共线.

若不全相同. $R\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix}=2$

$\therefore R(左)\leq 2$

而 $R(右)\leq R(左)$ $\therefore R(左)=2$

$\therefore$ * 有解, 三点共线

(eg3). 讨论三条直线位置关系

$\begin{cases} L_1: x+y+a=0 \\ L_2: x+2y+b=0 \\ L_3: x+3y+c=0 \end{cases}$

$\Rightarrow (A|\beta)=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -a \\ 1 & 2 & -b \\ 1 & 3 & -c \end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & -a \\ 0 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 2b-a-c \end{array}\right]$

$\therefore a+c=2b$ 时,
$R(A)=R(A|\beta)=2$, 方程组有唯一解, 这表示三条直线交于一点.

$a+c\neq 2b$ 时, 方程组无解

$\therefore$ 这表示三条直线在平面上两两相交.

Date:

[例] 设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵A的秩为 $n-1$，而A中某元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} \neq 0$，试证 $(A_{i1}, A_{i2} \cdots A_{in})'$ 是该方程组的基础解系

⇒ 不妨设 $A_{11} \neq 0$，则

$$\xi = (A_{11}, A_{12} \cdots A_{1n})' \neq 0$$

$$A\xi = \begin{bmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots a_{1n}A_{1n} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \cdots a_{2n}A_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \cdots a_{nn}A_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\because R(A) = n-1 \quad \therefore |A| = 0 \quad \because A\xi = 0$

$\therefore \xi$ 为 $AX=0$ 的解向量

而 $\xi \neq 0$ ∴线性无关

而基础解系含线性无关的向量个数为 $n - R(A) = 1$，因此 ξ 为 $AX=0$ 的基础解系.

[例] 设 η 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ $(\beta \neq 0)$ 的一个解向量，$\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$ 是它对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，证明：

(1) $\eta, \xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$ 线性无关

设存在数 $k, k_1 \cdots k_{n-r}$ 使

$$k\eta + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$$

两边左乘A得

$$k\beta = 0 \quad \therefore k = 0$$

又 $\because \xi_1 \cdots \xi_{n-r}$ 无关

$\therefore k_1 = k_2 = \cdots k_{n-r} = 0$

$\therefore \eta, \xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$ 线性无关.

(2) $\eta, \xi_1+\eta, \xi_2+\eta, \cdots \xi_{n-r}+\eta$ 是 $AX=\beta$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解向量.

⇒ 易证～是 $AX=\beta$ 的 $n-r+1$ 个解向量，现证无关.

法一：$(\quad) = (\eta, \xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}) \cdot B$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\therefore B$ 可逆 $\therefore$ A无关.

法二：设

$$k\eta + k_1(\xi_1+\eta) + \cdots k_{n-r}(\xi_{n-r}+\eta) = 0$$

即：$(k + \sum_{i=1}^{n-r} k_i)\eta + k_1\xi_1 \cdots k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$

∴都为0 $\therefore k = k_1 = \cdots k_i = 0$

∴线性无关.

[例] 设非齐次线性方程组 $AX=\beta$ $(\beta \neq 0)$ 的系数矩阵的秩为 r，$\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_{n-r}, \eta_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解向量，证明：它的任意一个解向量都可表示为：

$$X = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$

其中 $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-r+1} = 1$

⇒ $AX=0$ 的基础解系含 $n-r$ 个线性无关解向量，即：

$\eta_{n-r+1} - \eta_1, \eta_{n-r+1} - \eta_2 \cdots \eta_{n-r+1} - \eta_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的解，设

$$k_1(\eta_{n-r+1} - \eta_1) + \cdots + k_{n-r}(\eta_{n-r+1} - \eta_{n-r}) = 0$$

则 $(k_1 + \cdots k_{n-r})\eta_{n-r+1} - k_1\eta_1 - \cdots - k_{n-r}\eta_{n-r} = 0$

$\because \eta_1 \cdots \eta_{n-r+1}$ 无关

$\therefore k_1 = k_2 = \cdots k_{n-r} = 0$

于是：

$\eta_{n-r+1} - \eta_1, \eta_{n-r+1} - \eta_2 \cdots \eta_{n-r+1} - \eta_{n-r}$ 无关，因而是 $AX=0$ 的基础解系

故 $AX=\beta$ 通解可表示为

$$X = \eta_{n-r+1} + l_1(\eta_{n-r+1} - \eta_1) + \cdots l_{n-r}(\eta_{n-r+1} - \eta_{n-r})$$

$$= k_1\eta_1 + \cdots k_{n-r}\eta_{n-r} + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$$

其中 $k_1 = -l_1, k_2 = -l_2 \cdots k_{n-r} = -l_{n-r}$

$k_{n-r+1} = l_1 + l_2 + \cdots l_{n-r} + 1$.

且 $k_1 + k_2 + \cdots k_{n-r+1} = 1$

[例] 证明：与线性方程组 $AX=0$ 的基础解系等价的线性无关向量组也是 $AX=0$ 的基础解系.

设 $R(A) = r$，$\xi_1 \cdots \xi_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系，设 $\beta_1 \cdots \beta_{n-r}$ 中的任一向量均可由 $\xi_1 \cdots \xi_{n-r}$ 线性表示，即：

$$\beta_i = k_{i1}\xi_1 + k_{i2}\xi_2 + \cdots k_{i,n-r}\xi_{n-r}.$$
$$(i = 1, 2 \cdots, n-r)$$

$\therefore A\beta_i = k_{i1}A\xi_1 + k_{i2}A\xi_2 + \cdots k_{i,n-r}A\xi_{n-r} = 0$

这说明 $\beta_1 \cdots \beta_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的含 $n-r$ 个解向量的线性无关组，故：

$\beta_1 \cdots \beta_{n-r}$ 也是 $AX=0$ 的一个基础解系

[例] 设 $A_{m\times n}$ 的秩等于 r，试证：若 $r<n$，则存在秩为 $n-r$ 的列满秩阵 B 使 $AB=0$

⇒ 考虑 $AX=0$，$\because R(A)<n$，$\therefore AX=0$ 基础解系中有 $n-r$ 个线性无关的向量，故设 $\xi_1 \cdots \xi_{n-r}$ 为基础解系.

则 $R(\xi_1 \cdots \xi_{n-r}) = n-r$

$\therefore B = (\xi_1 \cdots \xi_{n-r})$

且 $AB = O_{m\times(n-r)}$.

[例] $A_{m\times n}$，试证：$R(A)=m \Leftrightarrow$ 对任意 $m\times 1$ 矩阵 β，方程组 $AX=\beta$ 总有解.

"⇒"：

$$m = R(A) \le R(A|\beta) \le m$$

所以 $R(A) = R(A|\beta) = m$，

故方程组 $AX=\beta$ 有解.

"⇐" 取 $\beta = e_i$，$\exists x_i$ 使 $Ax_i = e_i$

$\therefore AX = A(x_1, x_2 \cdots x_m) = (Ax_1, Ax_2, \cdots Ax_m) = E_m$

$\therefore m \geq R(A) \geq R(AX) = m$

$\therefore R(A) = m$.

[例] 3个不同平面组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

它的系数矩阵、增广矩阵的秩都是2，则：?

⇒ 无穷多解，有一个自由未知量 交于一条直线.

[例] 讨论 a 为何值时，方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a^2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a. \end{cases}$$ 与方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (a+1)x_1 + (a+1)x_2 + 2x_3 = a+1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

同解？

⇒ 考察第二个方程组的系数行列式 $= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$

当 $a \neq 1$ 且 $\neq -2$ 时，第二个方程组有唯一解，而此时第一个方程组系数矩阵、增广矩阵的秩都是2 无穷多解，舍.

当 $a=1$ 时，这2个方程组同解，解为

$$X = k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

当 $a=-2$ 时，第一个方程组系数矩阵、增广阵的秩都是2，知该方程组有无穷多解，而由

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

第二个方程组的系数矩阵不等于增广阵的秩，该方程组无解.

[例] 已知四元齐次方程组

(I) 为 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$,

已知另一四元齐次方程组(II). 的一个基础解系为

$\alpha_1=(2,-1,a+2,1)^T$.

$\alpha_2=(-1,2,4,a+8)^T$,

当 a 为何值时, 方程组(I).(II) ~~有公共解~~ 有非零公共解?

⇔ 非

解(I)得基础解系

$\beta_1=(1,0,2,3)^T$, $\beta_2=(0,1,3,5)^T$.

∴ 原题 ⇔

∃不全为0的数 x_1, x_2, x_3, x_4

使 $x_1\beta_1+x_2\beta_2=x_3\alpha_1+x_4\alpha_2$

即 $(\beta_1,\beta_2,-\alpha_1,-\alpha_2)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=0$ 有非零解

$\therefore r(\beta_1,\beta_2,-\alpha_1,-\alpha_2)<4$

$\therefore a=-1$.

法二: $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_2+(a+2)x_3+x_4=0 \\ -x_1+2x_2+4x_3+(a+8)x_4=0 \end{cases}$

⇒ 令系数矩阵 = 0.

[例] 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{bmatrix}$ 求一秩为2的矩阵, 使 $AB=0$

解 $AX=0$. 得基础解系.

$\varepsilon_1=(-1,1,0)^T$

$\varepsilon_2=(-2,0,1)^T$

$\therefore$ 令 $B=\begin{bmatrix}-1&-2\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 即可.

[例] 设 $A=(a_{ij})_{n\times 2n}$, $X=(x_1,x_2\cdots x_{2n})^T$, 方程组 $AX=0$ 的一个基础解系为 $(b_{i1},b_{i2}\cdots b_{i,2n})^T$, $i=1,2\cdots n$, 求方程组的通解:

$$\begin{cases} b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots b_{1,2n}y_{2n}=0 \\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots b_{2,2n}y_{2n}=0 \\ \vdots \\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots b_{n,2n}y_{2n}=0 \end{cases}$$

⇒ 令 $B=(b_{i1},b_{i2}\cdots b_{i,2n})^T$

$\because AB=0$ $\therefore B^TA^T=0$.

$\therefore \begin{bmatrix} b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1,2n}\\ b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2,2n}\\ \vdots&&&\vdots\\ b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{n,2n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\ a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\ \vdots&&&\\ a_{1,2n}&a_{2,2n}&\cdots&a_{n,2n}\end{bmatrix}=0$

$\therefore A^T$ 每一列为 $BY=0$ 解向量

又 ∵ $AX=0$ 基础解系含 n 个向量, 所以 $r(A)=n$ ∴ A 行向量组无关

又 ∵ $r(B)=n$ ∴ A 行向量组为 $BY=0$ 的基础解系

[例] $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行向量组是某个齐次线性方程组基础解系, 证明: $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 的行向量组也是该方程组的基础解系 ⇔ ∃可逆阵 $P=(p_{ij})_{m\times m}$ 使 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{m}p_{ik}a_{kj}$. ($i=1,2\cdots m$; $j=1,2\cdots n$).

解: "⇒".

∵ $A_{m\times n}$、$B_{m\times n}$ 行向量组均是 $CX=0$ 的基础解系 ∴ A 行向量组与 B 行向量组等价

∴ 存在可逆阵 P 使 $B=PA$ ∴

$b_{ij}=\sum_{k=1}^{m}p_{ik}a_{kj}$ ($i=1\sim m$, $j=1\sim n$)

"⇐" ∃P 使 ~ 则 $B=PA$

∴ A 行向量组. B 行向量组等价

又 ∵ A 行向量组是 $CX=0$ 基础解系, ∴ B 行向量组也是 $CX=0$ 基础解系.

[例] $A_{m\times n}$, $\beta_{n\times 1}$, $X=(x_1\cdots x_n)^T$, 则 D.

A. 若 $R(A)<n$, 则 $AX=\beta$ 无解

B. 若 $R(A)<m$, 则 $AX=\beta$ 无解.

C. 若 $R(A)=n$, 则 $AX=\beta$ 有解.

D. 若 $R(A)=m$, 则 $AX=\beta$ 有解.

⇒ $m=R(A)\le R(A|\beta)\le\min\{m,n\}$

[例] 设 $AX=0$ 的解都是 $BX=0$ 的解, 则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解 ⇔ $r(A)=r(B)$.

⇒ 同解, 则 $n-r(A)=n-r(B)$.

⇐ 设 $r(A)=r(B)=r$

设 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-r}$ 是 $AX=0$ 基础解系

$\therefore \varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-r}$ 也是 $BX=0$ 的 $n-r$ 个线性无关的解向量 又 ∵ $r(B)=r$

$\therefore \varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-r}$ 也是 B 基础解系

∴ $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

[例] $A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$ 证明: $ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解 ⇔ $R(AB)=r(B)$

"⇒": $n-r(AB)=n-r(B)$

⇐ 设 X_1 是 $BX=0$ 的解, $BX_1=0$

$\therefore ABX_1=A0=0$

∴ $BX=0$ 的解都是 $ABX=0$ 的解.

设 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-r}$ 是 $BX=0$ 基础解系

∵ 秩相等

$\therefore \varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-r}$ 也是 $ABX=0$ 基础解系

∴ $ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

[例] $A_{m\times n}$. $B_{k\times n}$, 则: $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解 ⇔ $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(A)=r(B)$.

证 "⇒" 若 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解, 则: $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 与 $AX=0$ 同解.

又 ∵ $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 的解都是 $AX=0$ 的解

∴ 由此到最上面的题知:

$r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(A)$

同理: $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(B)$

"⇐": ∵ $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 的解都是 $AX=0$ 的解 由此到最上面题知

$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 与 $AX=0$ 同解

又 ∵ $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 与 $BX=0$ 同解.

∴ $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

[例] $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$ 是 $m\times n$ 阶矩阵, $\beta_{m\times 1}$, $X=(x_1,x_2\cdots x_n)^T$, 判:

(1) 若 $AX=\beta$ 有解, 则 $\alpha_1\cdots\alpha_n,\beta$ 线性相关. (√).

(2) 若 $\alpha_1\cdots\alpha_n.\beta$ 线性相关, 则 $AX=\beta$ 有解 (×)

⇒ β 前表示系数可为0, 此命题不等价于 β 可由 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 表示

(3) 若 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 无关, $\alpha_1\cdots\alpha_n.\beta$ 相关 则 $AX=\beta$ 有唯一解 (√)

(4) 若 $\beta\neq0$, 则 $AX=\beta$ 的所有解不构成 R^n 的子空间 (√)

[例]. $A^T=-A$，D为对角元全大于0的对角阵，证明：

(1) $|A+D|\neq 0$.

反证：若 $|A+D|=0$，则 $(A+D)X=0$ 有非零解 X_1

$\therefore$ 有 $X_1^T(A+D)X=0$

$\therefore X_1^TAX_1+X_1^TDX_1=0$

$\because$ A为反对称阵，所以

$\begin{cases} X_1^TAX_1=0 \\ X_1^TDX_1=0 \end{cases}$

但 $D=diag(a_1\cdots a_n)\ (a_i>0)$

$\therefore X_1^TDX_1>0$ $\therefore$ 矛盾

$\therefore |A+D|\neq 0$

(2) $|A+D|>0$

$\Rightarrow$ 令 $f(x)=|xA+D|$. $x\in[0,1]$.

假设 $|A+D|<0$.

则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 零点存在性定理知 $\exists x_0\in(0,1)$ 使：$|x_0A+D|=0$

$\therefore \frac{1}{x_0}|A+\frac{D}{x_0}|=0$

($\frac{D}{x_0}$ 为对角元全大于0的对角阵)，但由第一步：

$|A+\frac{D}{x_0}|\neq 0$ 矛盾，故 $|A+D|>0$

[练]. $AX=0$ 有基础解系

$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\\0\end{bmatrix}$ $\xi_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ $\xi_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$

则该方程一个特解是 B

A $(-1,5,3,7)^T$ B $(0,4,-9,1)^T$

C. $(1,2,-3,1)^T$ D $(2,-1,-3,0)^T$

$\Rightarrow (\xi_1,\xi_2,\xi_3\,|\,A\ B\ C\ D)\xrightarrow{行}$

$\left[\begin{array}{ccc|cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \end{array}\right]$

下面有0的为答案

实矩阵的根可为复数.

$e_i^T A e_j = a_{ij}$

第六章:

一.特征值与特征向量.

1.定义: (AX与X共线).

设$A_{n\times n}$,若$\exists\lambda$及非零列向量X使$AX=\lambda X$,则称λ是A的一个特征值,则称X是A的属于特征值λ的一个特征向量.

(eg). $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$E_n X = X = 1X \quad (X\neq 0)$.

注:

①λ是A特征值. $\Leftrightarrow$ $\exists X_0\neq 0$使$AX_0=\lambda_0 X_0$

Y是A特征向量. $\Leftrightarrow$ $\exists k$使$AY=kY$。

即:特征值.向量不可孤立存在.

② $X\neq 0$.

2.求λ. X.

任意n维列向量X都是E_n的属于特征值1的特征向量.

$|\lambda E_n-A|$是关于λ的n次多项式,称为方阵A的特征多项式.称$|\lambda E_n-A|=0$为特征方程.这n个根即是A的n个特征值.

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

使$(\lambda_i E-A)X=0$的非零列向量都是列向量,即:它的全部非零解

$N(\lambda_i E-A)$是A关于λ_i的特征子空间(除0外所有解).

(eg.) 求$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$的特征值.向量

$$|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

$= (\lambda-1)(\lambda+2)^2$.

$\therefore \lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=-2$.

对于$\lambda=1$,解$(E-A)X=0$.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}X=0.\ \therefore \xi_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore X=k\xi_1\ (k\neq 0)$是$A$的属于1的全部特征向量.

对于$\lambda=-2$,解$(-2E-A)X=0$.

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ \therefore \xi_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\quad \xi_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\therefore X=k_2\xi_2+k_3\xi_3$ (k_2. k_3不同时为0)是A属于-2的全部特征向量

3.重数(几何≤代数).

(1)代数重数.

$|\lambda E-A| = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$

称n_i为λ_i的代数重数.

$\sum_{i=1}^{s} n_i = n$

(2)几何重数.

$\dim N(\lambda_i E-A)=n-R(\lambda_i E-A)$

4.特征值的性质 ($A_{n\times n}$)

(1)矩阵A的n个特征值之和=A的n个对角线元素之和

$|\lambda E_n-A| = \lambda^n+(-a_{11}-a_{22}-\cdots-a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$

(2) 0不是A的特征值$\Leftrightarrow A$可逆.

0是A的特征值$\Leftrightarrow A$不可逆

(2) A可逆,λ是A的特征值,则$\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值.

$AX=\lambda X\ (X\neq 0)$.

$\therefore A^{-1}AX=\lambda A^{-1}X \quad \therefore A^{-1}X=\frac{1}{\lambda}X\ (X\neq 0)$

[基础]:

1.向量:

(1) α为零向量当且仅当$|\alpha|=0$

(2)两两正交的向量组为正交基.正交向量组一定是线性无关组.

2.设向量α在正交基$\alpha_1\cdots\alpha_m$下的坐标为$(x_1,x_2\cdots x_m)^T$,则

$x_i=\frac{(\alpha,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} \quad (i=1,2\cdots m)$.

3.称正交基$\alpha_1\cdots\alpha_m$为标准正交基,若$|\alpha_i|=1$,向量α在标准正交基下的坐标分量

$x_i=(\alpha,\alpha_i)$

4.正交阵: $AA^T=E$.

(1) A为正交阵$\Leftrightarrow A^T=A^{-1}$ $\Leftrightarrow$ A的行(列)向量组为标准正交组.

(2) A正交,则$|A|=1$或-1

(3)若A.B均为正交阵,则A^T. A^{-1}. A^*. AB. AB^{-1}均是正交阵.

5.线性变换:设$A=(a_{ij})_{n\times n}$

(1) $y=Ax$为从R^n到R^n的一个线性变换

(2)设A可逆,称$y=Ax$为R^n上的可逆变换

(3)若A正交,称$y=Ax$为R^n上的正交线性变换.正交变换不改变向量的长度与夹角.

6.施密特正交化.

$\beta_1=\alpha_1$

$\beta_2=\alpha_2-\lambda_{12}\beta_1$

$\vdots$

$\beta_m=\alpha_m-\lambda_{1m}\beta_1-\lambda_{2m}\beta_2-\cdots-\lambda_{m-1,m}\beta_{m-1}$

$\lambda_{ij}=\frac{(\beta_i,\alpha_j)}{(\beta_i,\beta_i)}$

即: $\beta_m=\alpha_m-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(\alpha_m,\beta_{m-1})}{(\beta_{m-1},\beta_{m-1})}\beta_{m-1}$

(eg.) $V=k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,求该向量空间的标准正交基.

$\Rightarrow$将$\alpha_1=(1,1,1)^T$, $\alpha_2=(0,1,1)^T$标准正交化,令:

$\beta_1=\alpha_1=(1,1,1)^T$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})^T$

单位化: $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$

$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})^T$

$A_{m\times n}X=0$ 的解除0外是特征向量. $B\sim E$, B可对角化, 则 $B=E$.
相似阵λ同, 但特征向量不同.

(4) λ是A的特征值, $f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots a_1x+a_0$, 则f(λ)是f(A)特征值.

$AX=\lambda X\ (X\neq 0)$.

$f(A)X=(a_mA^m+\cdots a_0E)X$

$\because A(AX)=A(\lambda X)=\lambda(AX)=\lambda^2X$

$\therefore A^kX=\lambda^kX$.

$\therefore f(A)X=(a_m\lambda^m+\cdots a_1\lambda+a_0)X$
$=f(\lambda)X$.

(eg.) 2是A的特征值, 求 A^2+A-E 的一个λ?
$2^2+2-1=5$

(eg.) 2是A的特征值, 则kA的一个特征值: 2k

(eg.) $A^TA=E$, $|A|=-1$, 证明 -1是A的一个λ?
⇒求 $|-E-A|=(-1)^n|A||A^T+E|$
$=(-1)^{n+1}|A+E|$

(eg.) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0$, 则0是A的特征值.

$A\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$ 是0, A的一个特征向量

(5) 矩阵A的n个特征值的乘积等于A的行列式的值. 即: $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.
故0是A的一个特征值当且仅当 $|A|=0$

(6) 特征方程 $|\lambda E-A|=0$ 在复数范围内恒有解, 解的个数等于特征方程的次数(重根按重数计算). 因此, n阶方阵A在复数域有n个特征值.

(7) A的无关的特征向量个数 =A的不同λ的几何重数的和.
ep. $(\lambda_iE-A)X=0$ 所有解.

5. 特征向量的性质.

(1) $\lambda_1\cdots\lambda_s$ 是A的互不相同的特征值, $x_1\cdots x_s$ 依次是 $\lambda_1\cdots\lambda_s$ 的特征向量, 则 $x_1\cdots x_s$ 无关.

(证:) ~~$\lambda_1k_1x_1+$~~ ...
设 $k_1x_1+\cdots k_sx_s=0$
两边左乘 $A, A^2\cdots A^{s-1}$ 得:

$$\begin{cases}\lambda_1k_1x_1+\cdots\lambda_sk_sx_s=0\\ \lambda_1^2k_1x_1+\cdots\lambda_s^2k_sx_s=0\\ \vdots\\ \lambda_1^{s-1}k_1x_1+\cdots\lambda_s^{s-1}k_sx_s=0\end{cases}$$

$$\therefore (k_1x_1\cdots k_sx_s)\underbrace{\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2&\cdots&\lambda_1^{s-1}\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&\lambda_s&\lambda_s^2&\cdots&\lambda_s^{s-1}\end{bmatrix}}_{B}=0$$

而 $|B|=\prod_{s\ge i>j\ge 1}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0$.

∴B可逆.

$\therefore (k_1x_1,k_2x_2\cdots k_sx_s)=0$

即 $k_ix_i=0$ 又 $\because x_i\neq 0$ $\therefore k_i=0$

$\therefore x_1\cdots x_s$ 无关

即: 特征值不同的向量线性无关.

(2) $\lambda_1\cdots\lambda_s$ 是A的互不相同的特征值, $x_{i1}\cdots x_{ir_i}$ 是 λ_i 的 r_i 个线性无关的特征向量, 则:
$x_{11}\cdots x_{1r_1};\ x_{21}\cdots x_{2r_2};\cdots\cdots$
$\underbrace{x_{s1}\ x_{s2}\cdots x_{sr_s}}_{\lambda_s}$ 线性无关

⇒理解:
$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$

$\lambda_1\to(\lambda_1E-A)X=0$ 的基础解系有 $n-R(\lambda_1E-A)$ 个.

所有基础解系放一起无关

(3) λ_1,λ_2 是A的不同特征值, X_1,X_2 分别是 λ_1,λ_2 特征向量, 则 X_1+X_2 一定不是A特征向量.

⇒设∃k使 $A(x_1+x_2)=k(x_1+x_2)$

$\therefore \lambda_1x_1+\lambda_2x_2=kx_1+kx_2$

但是 $\because x_1, x_2$ 无关 $\therefore \lambda_1=k_1$, $\lambda_2=k_2$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2$, 矛盾.

[基础]:

1. λ, X 求法

(1) $|\lambda E-A|=0$ 的全部根就是A的全部特征值

(2) 对每个不同的特征值 λ_i, 齐次方程组 $(\lambda_iE-A)X=0$ 的全部非零解, 就是A的属于特征值 λ_i 的全部特征向量, 称 $(\lambda_iE-A)X=0$ 的解空间为A的关于 λ_i 的特征子空间.

(3) 若λ为A的r重特征值, 则: $R(\lambda E-A)\ge n-r$, 此时与λ相对应的线性无关的特征向量最多有r个.

2. 若 $X_1\cdots X_m$ 都是A的属于同一特征值 λ_0 的特征向量, 且记 $X=k_1X_1+\cdots k_mX_m$, 若 $X\neq 0$, 则X也是属于 λ_0 的特征向量

3. 若n阶方阵A的n个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$, 则:
$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$ $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=tr(A)$

4. 若A为实对称阵, λ为A的r重特征值, 则 $R(\lambda E-A)=n-r$, 此时与λ相对应的A的线性无关特征向量有r个.

5. 正交阵的特征值的绝对值(模)为1

6. 相似阵的性质 $A\sim B$
(1) $|A|=|B|$; $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$
$tr(A)=tr(B)$ $R(A)=R(B)$
(2) A, B特征值完全相同
(3) $A^{-1}\sim B^{-1}$, $A^T\sim B^T$
(4) A与B等价.
(5) 对任意 $t\in R$, $tE-A\sim tE-B$.

7. 相似对角化:
任意n阶实对称阵一定可以正交相似对角化

8. 设A, B为正交阵, 则矩阵 A^T, A^{-1}, AB, A^TB^T 及 $\begin{bmatrix}A&\\&B\end{bmatrix}$. $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}A&A\\-A&A\end{bmatrix}$ 都是正交阵

9. 3阶方阵A满足 $A\alpha_i=i\alpha_i$ $(i=1,2,3)$
⇒ $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}$ 且 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$\begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{bmatrix}$ 的λ为 $k_1, k_2 \sim k_n$. 三角阵λ为对角线上数.

6.有关实对称阵 特征值、特征向量的性质.

(1)特征值都是实数.

(2)实对称阵属于不同λ的实特征向量必正交.

⇒设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 求 (X_1, X_2)

$\lambda_1 (X_1, X_2) = \lambda_1 X_1^T X_2$

$= (\lambda_1 X_1)^T X_2 = (AX_1)^T X_2$

$= X_1^T A^T X_2 = X_1^T A X_2$

$= X_1^T (\lambda_2 X_2) = \lambda_2 (X_1, X_2)$

$\because \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \therefore (X_1, X_2) = 0$.

(3)实对称阵代数重数 = 几何重数.

⇒对于实对称阵A的 r_i 重特征值 λ_i, 一定有 r_i 个线性无关的向量, 即:

$(\lambda_i E_n - A)X = 0$ 每个基础解系恰好含 r_i 个向量

几何重数和=代~和=n

∴实对称阵一定含n个线性无关的特征向量

eg. 1 A是3阶实对称阵, A特征值为1,2,2, $X_1 = (1,1,0)^T$ 与 $X_2 = (0,1,1)^T$ 都是2的特征向量, 求A的对应1的单位特征向量.

设 $X = (x_1, x_2, x_3)^T$

则X与 X_1、X_2 均正交

$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

∴单位化 $= \pm \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

⇒一个向量的单位向量有2个

故 用正交来做.

(eg.) 设3阶方阵A实对称, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是1的特征向量, 求0的特征向量.

设0的 $X = (x_1, x_2, x_3)$ 正交得,

$x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

$\Rightarrow X = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (k_1^2 + k_2^2 \neq 0)$

∴X即为所有属于0的特征向量.

二. 相似矩阵.

1.相似定义:

设A、B为n阶方阵, 若存在可逆阵T 使 $B = T^{-1}AT$, 则称A与B相似, 记 $A \sim B$

称从A到B的这种变换为相似变换, 称T为相似变换矩阵.

2.性质

(1)自反性: $A \sim A$

(2)对称性: $A \sim B$ 则 $B \sim A$

(3)传递性: $A \sim B$, $B \sim C$ 则 $A \sim C$

⇒设 $B = T_1^{-1} A T_1$

则 $C = T_2^{-1} B T_2$

$= (T_1 T_2)^{-1} B \, T_1 T_2$.

3.若 $A \sim D = \mathrm{diag}(k_1 \cdots k_n)$, 则称A可相似对角化.

4.性质: 若 $A \sim B$

(1)相似阵的行列式、秩、迹相等.

(2) $f(x) = a_m x^m + \cdots a_1 x + a_0$

则 $f(A) \sim f(B)$

$B^k = T^{-1}AT\,T^{-1}AT \cdots = T^{-1}A^kT$

$\therefore f(B) = T^{-1}(a_m A^m + \cdots a_1 A + a_0 E)T$

$= T^{-1} f(A) T$

(3) $(\lambda E - A) \sim (\lambda E - B)$

$|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$

(4)相似阵λ相同, 但反之不对.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq T^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} T = E$.

由 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $2 - R(E - A) = 1$

∴代=2, 几何=1

10.设A,B为同阶方阵, 则: AB与BA, AB+B与BA+B均分别有相同的特征值.

①设 $\exists X \neq 0$ 使 $(AB)X = \lambda X$

两边左乘B: $(BA) \cdot BX = \lambda \cdot BX$

若 $BX \neq 0$, 则λ为BA特征值

若 $BX = 0$, $\because ABX = \lambda X$, $X \neq 0$

$\therefore \lambda = 0$, $\therefore |AB| = 0$

$\therefore |BA| = 0 \quad \therefore \lambda = 0$ 也是BA特征值

∴AB与BA有相同特征值.

② $\left. \begin{array}{l} AB + B = (A+E) \cdot B \\ BA + B = B \cdot (A+E) \end{array} \right\}$ 同理.

③拓展:

$\left. \begin{array}{l} AB + B + A + E \\ BA + B + A + E \end{array} \right\}$ 的λ也相同

11.设 $A_{n \times n}$, A不可逆, 求 A^* 的λ.

① $R(A) < n-1$ 时, $A^* = 0$

∴0为 A^* 的n重特征值.

② $R(A) = n-1$ 时,

0为 A^* 的 n−1重特征值

另一特征值 $tr(A^*) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

12.实对称正交阵的特征值为1或−1.

⇒设 $\exists X \neq 0$ 使 $AX = \lambda X$

左乘A: $A^2 X = \lambda^2 X$

$\because A^T A = E$, $A^T = A \quad \therefore A^2 = E$

$\therefore X = \lambda^2 X \quad \therefore (\lambda^2 - 1)X = 0$

$\therefore \lambda = \pm 1$

13.若任意n维非零向量均是A的特征向量, 则A为数量阵 kE_n.

⇒因为任何非零向量都是A的特征向量, 则A的特征值都相等, 设为k; 否则若A有2个不同特征值 λ_1、λ_2, X_1、X_2 为 λ_1、λ_2 的特征向量, 则 $X_1 + X_2 \neq 0$ 就不是特征向量, 与此条件矛盾.

⇒因此对 $e_1 \cdots e_n$ 有:

$A e_i = k e_i$

$\therefore A E_n = k E_n$ 即 $A = k E_n$

14.若A与B相似, C与D相似, 则 $\begin{bmatrix} A & \\ & C \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B & \\ & D \end{bmatrix}$

⇒令 $P_1^{-1} A P_1 = B$, $P_2^{-1} A P_2 = D$

令 $P = \begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{bmatrix} \quad \therefore P^{-1} = \begin{bmatrix} P_1^{-1} & \\ & P_2^{-1} \end{bmatrix}$

$\therefore P^{-1} \begin{bmatrix} A & \\ & C \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} B & \\ & D \end{bmatrix}$

$A^k=T^{-1}D^kT^{-1}$

$|E_m+kAB|=|E_n+kBA|$

$|\lambda E_m-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda E_n-BA|$

A_n, B_n 均为实对称阵，A_n, B_n 特征多项式相等，则 $A\sim B$ (√).

(5) 若 $A\sim\begin{bmatrix}k_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & k_n\end{bmatrix}$，则：

$k_1\sim k_n$ 是 A 的 n 个特征值

5. 相似对角化的充要条件：

(1) $A_{n\times n}$ 与对角阵相似 $\Leftrightarrow$

$A_{n\times n}$ 可相似对角化 $\Leftrightarrow$

$A_{n\times n}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

证"$\Rightarrow$" $\exists$ 可逆 T 及 $D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$

使 $T^{-1}AT=D$，即：$AT=TD$

分块令 $T=(t_1\cdots t_n)$

则 $\begin{cases}AT=(At_1,\cdots At_n)\\ TD=(\lambda_1t_1\cdots\lambda_nt_n)\end{cases}$

$\therefore At_i=\lambda_it_i$ $\because T$ 可逆

$\therefore t_i\neq 0$.

$\therefore t_1\cdots t_n$ 是 A 特征向量

又 $\because T$ 可逆 $\therefore t_1\cdots t_n$ 无关.

即：A 有 n 个无关的特征向量.

证"$\Leftarrow$"：设 $t_1\cdots t_n$ 是 A 的 n 个无关的特征向量. 设 $\lambda_1\sim\lambda_n$ 是 $t_1\cdots t_n$ 的 n 个特征值.

即：$At_i=\lambda_it_i\ (i=1\sim n)$

令 $T=(t_1\cdots t_n)$

$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$ 易证 $AT=TD$

即：$D=T^{-1}AT$

(2) 若 $T^{-1}AT=D$，则 T 的 n 个列向量是 A 的 n 个线性无关的特征向量，且这 n 个特征向量对应的特征值依次为 D 主对角线上元素.

$T=(t_1\ \ t_2\ \ \cdots\ \ t_n)$

$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$

推论. n 阶方阵有 n 个不同特征值，则 A 可相似对角化

(反过来不一定成立).

(eg). 把 $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 相似对角化. 求 T、D.

$\therefore\lambda_1=2, \lambda_2=1$.

$\therefore$ 设 $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

对 $\lambda_1=1$ ~~解~~ $(E_2-A)X=0$

$\therefore t_1=\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}$

对 $\lambda_2=2$，解 $(2E-A)X=0$.

$\therefore t_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

$\therefore T=(t_1, t_2)=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(eg). 设 $A_{3\times3}$ 的 λ 为 $1, -1, -1$，其对应的特征向量为：

$t_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ $t_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$ $t_3=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$

求 A、A^9?

令 $T=(t_1, t_2, t_3)$，则 T 可逆

且 $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$

$\therefore A=TDT^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -6 & -6\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

$\therefore A^9=TD^9T^{-1}=A$

(eg). $A=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}(1, 0, 1)$ 求 λ.

$\Rightarrow|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-2)$

(eg). $A_{3\times3}$，$\lambda=1, 2, 3$)

求 $|A^3+A^2+2E|$.

$\because A\sim D=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}$

$\therefore A^3+A^2+2E\sim D^3+D^2+2E$

相似 $\Rightarrow$ 行列式相等

$\therefore=|D^3+D^2+2E|$

(eg.) $\lambda=2$ 为 A 的一个特征值，求行列式 $|A^2-3A+2E|$.

$\Rightarrow$ 所求 $=|A-2E||A-E|=0$

$(\because\lambda=2\ \ \therefore|2E-A|=0)$

[例]:

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为向量空间 V 的一组标准正交基，则：

$\beta_1=\frac{1}{3}(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3)$

$\beta_2=\frac{1}{3}(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)$

$\beta_3=\frac{1}{3}(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)$

也是 V 的一组标准正交基 (√).

2. n 阶方阵 A 的特征值为 $2, 4, \cdots 2n$，则 $|A-3E|=-(2n-3)!$ (√)

$\begin{vmatrix}-1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 2n-3\end{vmatrix}$

3. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，计算 $A^n-2A^{n-1}\ (n\geq2)=0$ (√).

$\Rightarrow A\sim\begin{bmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}$

4. 实对称方阵 A 的 P 次幂 A^P 的特征值为方阵 A 特征值的 P 次幂. (√).

令 $A=T^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}T$

5. A 为 n 阶实对称阵，则 $R(A)=R(A^2)$. (√) $\begin{bmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{bmatrix}$

6. λ 同不一定相似 (√)

$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 不相似于 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

如但 A、B 均可相似对角化时，λ 同则相似 (√)

7. [略].

正交阵 λ 模为 1 (√)

$\Rightarrow\lambda$ 为特征值

$\bar{\lambda}(\bar{x})^Tx=\bar{\lambda}(\bar{x})^Tx$

$\therefore\bar{\lambda}|x|^2=\bar{\lambda}|x|^2$

$\therefore\bar{\lambda}\lambda=1\ \ \therefore|\lambda|^2=1$

实对称正交阵 λ 为 1 或 -1 (√)

正交阵 λ 为 1 或 -1 (×)

$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\lambda=\pm i$

8. X 为 n 阶可逆阵 A 的特征向量，P 为 n 阶可逆阵，则 $P^{-1}X$ 为 $P^{-1}A^2P$ 的特征向量 (√)

9. A 为 n 阶实方阵，$A^2=A$，则 A 特征值只能是 0 或 1 (√).

$A^m = PD^mP^{-1}$

(P^{-1}不用求，为P^T).

例. 四阶方阵A满足$|A+3E|=0$，$AA^T=2E$，$|A|<0$，求A^*的一个特征值？

$|AA^T|=|2E|=2^4$

$\therefore |A|=-4$，且A可逆

$\therefore AA^*=-4E$

$\therefore A=-4(A^*)^{-1}$

代入第一个式子知：

$|3E-4(A^*)^{-1}|=0$.

$\therefore \frac{3}{4}$是$(A^*)^{-1}$的一个λ

$\therefore \frac{4}{3}$是A^*的一个λ

(3) 几何重数≤代数重数

证：λ_0是A的m重特征值，设$m<n$ ($m\le n-1$)

若λ_0的几何重数>m，设：$\alpha_1,\cdots\alpha_m,\alpha_{m+1}$是属于$\lambda_0$的线性无关的特征向量.

即：$A\alpha_i=\lambda_0\alpha_i$ $(i=1,2\cdots m)$

将$\alpha_1\cdots\alpha_{m+1}$扩充为无关组$\alpha_1\cdots\alpha_{m+1}\cdots\alpha_n$，令$T=(\alpha_1\cdots\alpha_m,\alpha_{m+1}\cdots\alpha_n)$

则T可逆.

$AT=(\lambda\alpha_1\cdots\lambda\alpha_{m+1},A\alpha_{m+2}\cdots A\alpha_n)$

$=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\left[\begin{array}{c|c}\lambda\ \ddots\ \lambda & * \\ \hline 0 & *\end{array}\right]$

$\therefore T^{-1}AT=\left[\begin{array}{c|c}\lambda_0\ \ddots\ \lambda_0 & * \\ \hline 0 & *\end{array}\right]$.

$\therefore |\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_0)^{m+1}g(\lambda)$

得λ_0代数重数$\ge m+1$矛盾

$\therefore \lambda_0$几何重数≤m

(4) 定理.

A可相似对角化 ⟺ A每一特征值的代数重数 = 几何重数 ($n-R(\lambda E-A)$)

"⟹" A有n个无关的特征向量.

∴几何重数之和=n

又∵几何≤代数

∴代数之和=n

"⟸" 几何重数之和=n.

eg.7 $A=\begin{bmatrix}\lambda_0 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_0 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_0\end{bmatrix}$ 问A可否对角化

代数：λ_0代数重数=3.

几何：$3-R(\lambda_0E-A)=1$

∴不可相似对角化.

eg. $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 可相似对角化，求x, y满足条件

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -1\\ -x & \lambda-1 & -y\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$.

$\therefore \begin{cases}1为2重特征值\\ 3为1重特征值\end{cases}$

∵A可相似对角化

$\therefore R(E-A)=1$

$R(3E-A)=2$.

$(E-A)\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & x-y\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$(3E-A)\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & x+y\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore x-y=0$ 即可.

(5) 实对称必可相似对角化.

三. 实对称阵的正交相似对角化

1 定理：设A为n阶实对称阵，则存在正交阵P使$P^{-1}AP=D$.

且对角阵$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$，λ为n个特征值.

2. 判断是否相似：$A_{n\times n}$，$B_{n\times n}$

① 若λ不同，则一定不相似

② 若λ同 $\begin{cases}若A,B都可相似对角化 \Rightarrow 相似\\ 一个可对角化，另一个不可对角化 \Rightarrow 必不相似\\ 2个都不可对角化 \Rightarrow 不一定.\end{cases}$

[例] $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

相似

10. $A_{3\times3}$，$R(A)=1$，则$\lambda=0$必是A的二重特征值 (×).

⟹ $3-R(0E-A)=2$

∴0几何重数为2

∴将"为"改成"至多"即可.

11. $A_{n\times n}$的特征值为n个0，则$A=0$ (×)

反例 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

∴已知$A_{n\times n}$可相似对角化，且A特征值全为0，则$A=0$ (✓)

$A=T[0]T^{-1}=0$.

12. 若$|E-A||E+A|=0$，则A的特征值只能是±1 (×)

若$A_{n\times n}$与$B_{n\times n}$有相同的特征多项式，则$A\sim B$ (×)

⟹ 若$A_{n\times n}$与$B_{n\times n}$特征多项式相同且n个特征值互异，则$A\sim B$ (✓)

$A^2=A \Rightarrow R(A)+R(A-E)=n$

两矩阵相似 $\Rightarrow$ tr. 11 相等

(eg.) ~~设~~ $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$. 求正交阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

~~$|\lambda E-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$~~

解 $(5E-A)X=0$ 得:

$T_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 单位化得 $P_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

解: $(-E-A)X=0$ 得

$X=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$
$\quad T_2 \qquad T_3$

~~将 T_2. T_3 正交化得:~~

~~$\beta_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ $\beta_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$~~

$\therefore P_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}$ $P_3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

$\therefore D=\begin{bmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$

$P=(P_1,P_2,P_3)$.

(eg.) n 阶实对称阵 A 的特征值都 > 0, 求证: $|A+E|>1$.

$\Rightarrow$: ∃正交阵 P 使 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$

$\therefore |A+E|=|E+P[\ ]P^{-1}|$

$=|P|\begin{vmatrix}\lambda_1+1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n+1\end{vmatrix}|P^{-1}|$

$=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)$

(eg.) 实对称阵 $A_{3\times3}$ 的特征值为 1.0.0. $T_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $T_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 是 $AX=0$ 的基础解系. 求 A 和 A^{100}

设 $T_3=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ 是 $\lambda=1$ 的特征向量,

由正交知: $X=k\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=kT_3$

$\therefore T=[T_1,T_2,T_3]$

$D=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}$

$\therefore A=TDT^{-1}$

$A^{100}=TD^{100}T^{-1}=A$.

证明: $f(\lambda)$ 为 $f(A)$ 特征值

$\Rightarrow$ 只需证: $f(A)X=f(\lambda)X$.

(eg.) A 为实对称矩阵, 则 $R(A^k)=R(A)$

$\Rightarrow$ ∃正交阵 P 使 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$

$\therefore A^k=P\begin{bmatrix}\lambda_1^k&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^k\end{bmatrix}P^{-1}$

$\therefore R(A^k)=R\begin{bmatrix}\lambda_1^k&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^k\end{bmatrix}$

$=R\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}=R(A)$.

3. 定理 $A_{n\times n}$.

一定∃可逆 T, 使 (若当标准型)

$T^{-1}AT=D=\begin{bmatrix}\lambda_1&k&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&k_{n-1}\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$

其中 $\lambda_1\sim\lambda_n$ 为 n 个特征值

K 为 0 或 1 的数.

但此时 D(列) 不一定为特征向量.

(例) $A_{4\times4}\sim\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}=D$

$A^m=TD^mT^{-1}=T\begin{bmatrix}D_1^m&\\&D_2^m\end{bmatrix}T^{-1}$

~~意义: 所有 $A_{n\times n}^m$ 均可求,~~

只需相似于 D 再分块, 问题化为求 $\begin{bmatrix}\lambda_1&k_1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&k_{n-1}\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}^m=(kE+B)^m$.

(eg.) $A_{n\times n}$, $A^2=A$, $R(A)=r<n$

证明 A 可相似对角化, 并求 $|A+E|$.

$\Rightarrow$ 若 $f(A)=0$, λ 是 A 特征值

$\therefore f(\lambda)=0$ 即 $\lambda^2=\lambda$ $\therefore \lambda=0, 1$

$\because A(A-E)=0$

$\therefore \begin{cases}R(A)+R(A-E)\le n\\R(A)+R(E-A)\ge R(A+E-A)=n\end{cases}$

$\therefore R(A)+R(A-E)=n$

$\therefore R(A-E)=n-r$.

即有 ~~......~~

$\therefore\begin{cases}有 n-r 个属于 0 的特征向量\\有 r 个属于 1 的特征向量\end{cases}$

$\therefore A\sim\begin{bmatrix}0&&&&\\&\ddots&&&\\&&0&&\\&&&1&\\&&&&\ddots\\&&&&&1\end{bmatrix}$ (n-r 个 0)

$\therefore |A+E|=2^r$

或 $A(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)=A$

即 $A\varepsilon_i=1\varepsilon_i$

$\therefore 1$ 有 r 个无关向量.

$\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 的一个特征值

$A\sim B$, 则特征多项式 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

[例3] 设三阶实对称阵 A 的特征值为 -1, 1, 1, $\varepsilon=(0,1,1)^T$ 为对应于 -1 的特征向量, 求 A.

$\Rightarrow$ 设 $\varepsilon_{1,2}=(x,y,z)$

$\therefore y+z=0$.

$\therefore \varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

$\therefore P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$

$P=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon)$.

~~[例] 求 $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&-1&2\\-1&-2&1\end{bmatrix}$ 求 A 的特征值.~~

$\Rightarrow |\lambda E-A|=$

$(\lambda-1)(\lambda-1+2i)(\lambda-1-2i)=0$

$\therefore \lambda_1=1, \lambda_2=1-2i, \lambda_3=1+2i$ 为 A 的特征值.

[例3] 已知三阶实对阵 A 的各行元素和等于 2, 且 $R(2E+A)=1$, 求正交阵 P. 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

① 求 λ.

$\because R(-2E-A)=1$

$\therefore -2$ 是二重特征值

2 是一重特征值

② $\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 设 $\varepsilon_{2,3}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

则 $x_1+x_2+x_3=0$.

$\therefore \varepsilon_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ $\varepsilon_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

正交单位化 $P_2=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix}$ $P_3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

$\therefore P=(P_1,P_2,P_3)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix}$

[结论] 设 n 阶方阵 A 各行元素和均为 k, 则:

(1) k 是 A 的一个 λ

(2) A^{-1} 各行元素和为 $\frac{1}{k}$

$\Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1}\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

(3) $aA+bA^{-1}$ 各行元素和为 $ak+\frac{b}{k}$

Date: Page:

A 的 λ 为 $1,-1$ 由 $\therefore A^{2n}=PEP^{-1}=E_2$

A_n 各行元素和为 k $\Rightarrow A_n\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&3\\0&0&2\end{bmatrix}$ 特征向量 $X=k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$|A|\neq 0$，则 $AB\sim BA$

$BA=A^{-1}(AB)A$

[难] 设 $\alpha=(a_1,\cdots a_n)$ 与 $\beta=(b_1,\cdots b_n)^T$ 正交，求

$$A=\begin{bmatrix}a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n\\ a_2+b_1 & & & a_2+b_n\\ \vdots & & & \vdots\\ a_n+b_1 & \cdots & \cdots & a_n+b_n\end{bmatrix}$$

的 n 个特征值.

$\Rightarrow$ 令 $A=BC$

$$B=\begin{bmatrix}a_1 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ b_1 & \cdots & b_n\end{bmatrix}$$

$\therefore |\lambda E_n-BC|$

$$=\lambda^{n-2}\begin{vmatrix}\lambda-\sum_{i=1}^n a_i & 0\\ 0 & \lambda-\sum_{i=1}^n b_i\end{vmatrix}$$

$\therefore n$ 个特征值为：

0 ($n-2$ 重).

$\sum_{i=1}^n a_i$. $\sum_{i=1}^n b_i$

[难] 设 A 为 n 阶可逆阵，α,β 为非零列向量，证明以 λ 为未知数的方程 $|\lambda A-\alpha\beta^T|=0$ 的一个根为 $\beta^TA^{-1}\alpha$，其余根为 0.

$\Rightarrow$ 对方程两边乘 $|A^{-1}|$ 得：

$|\lambda E-\alpha\beta^TA^{-1}|=0$

降阶 $=\lambda^{n-1}(\lambda-\beta^TA^{-1}\alpha)$

$\therefore$ 一个根为 ~，其余为 0.

[例] 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，$R(A)=r<n$，试证明 A 可相似对角化，并写出对角阵.

$\Rightarrow$ 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$

$\therefore A(\alpha_1\cdots\alpha_n)=A(\alpha_1\cdots\alpha_n)$

$\because \alpha_1\cdots\alpha_r$ 线性无关

$\therefore AX=1X$ 有

即：$\lambda=1$ 时有 r 个特征向量.

对于 $AX=0$. 解有 $n-r$ 个向量

$\therefore \lambda=0$ 时有 $n-r$ 个向量

$\therefore A$ 可相似对角化

对角阵为 $\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1\ 0 & \\ & & & \ddots\ 0\end{bmatrix}$

[难] 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. $B=(b_{ij})_{n\times n}$，若存在正交阵 P 使 $B=P^{-1}AP$，则：

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n b_{ij}^2$$

$\Rightarrow BB^T=P^{-1}APP^TA^T(P^{-1})^T=P^{-1}AA^TP$.

$\therefore tr(BB^T)=tr(AA^T)$

[难] 设 A 为 n 阶上三角阵，有：

(1) 若 $a_{ii}\neq a_{jj}$ ($i\neq j$, $i,j=1.2.\cdots n$). 则 A 可相似对角化.

$\Rightarrow |\lambda E-A|=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$

即：A 有 n 个不同特征值，即 A 可相似对角化.

(2) 若 $a_{11}=a_{22}\cdots=a_{nn}$ 且至少有一个 $a_{i_0j_0}\neq 0$ ($i_0\neq j_0$)，则 A 不可以相似对角化.

$\Rightarrow$ 假设 A 可相似对角化，则 $\exists$ 可逆阵 P，使 $P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n)$

其中 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=a_{ij}(i=j)=K$

$\therefore P^{-1}AP=KE$ $\therefore A=KE$

这与 $\exists a_{ij}\neq 0$ ($i\neq j$) 矛盾.

故 A 不可相似对角化.

[难] 设 $\alpha=(1,0,-1)^T$，$A=\alpha\alpha^T$，n 为正整数，计算 $|aE-A^n|$ 的值.

$\because |\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-\alpha^T\alpha)=\lambda^2(\lambda-2)$

$\therefore A\sim\begin{bmatrix}2 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}$

$\therefore$ 所求 $=(a-2^n)a^2$.

法二：$\exists$ 可逆阵 P 使：$A=P\begin{bmatrix}2 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}P^{-1}$

$$\therefore |\lambda E-aE+A^n|=\begin{vmatrix}\lambda-a+2^n & & \\ & \lambda-a & \\ & & \lambda-a\end{vmatrix}$$

$\therefore aE-A^n$ 的特征值为 ~，a，a.

$\therefore |aE-A^n|=a^2(a-2^n)$.

[例] 设 $\alpha=(1,k,1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ 的逆矩阵的一个特征向量，求 k?

$\Rightarrow$ α 是 A^{-1} 的特征向量，易证 α 也是 A 的特征向量.

$\therefore A\alpha=\lambda\alpha$ 得方程组

$$\begin{cases}3+k=\lambda\\ 2+2k=k\lambda\\ 3+k=\lambda\end{cases}\quad\therefore k=1\text{ 或 }-2$$

[较易] 设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&&\\&y&\\&&-1\end{bmatrix}$ 相似，求 x. y

$\Rightarrow$ 和为迹，积为值.

$$\begin{cases}2+x=2+y-1\\ |A|=-2y.\end{cases}$$

法二：由 A 与 B 相似，有：

$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$ 即：

$(\lambda-2)[\lambda^2-x\lambda-1]=(\lambda-2)[\lambda^2+(1-y)\lambda-y]$.

比较系数得：$x=0$，$y=1$.

显然：$2.\ 1.\ -1$ 为 A 特征值

法三：相似矩阵的 tr. 值相等.

[较好] 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{bmatrix}$ 已知 A 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，试求 x. y 的值及可逆阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

$\Rightarrow r(2E-A)=1$,

$$(2E-A)\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x=2$，$y=-2$.

$\therefore |\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$

分别求 $\lambda=2$，$\lambda=6$ 特征向量

$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ $\varepsilon_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ $\varepsilon_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$ 令 $P=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$

$$\therefore P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{bmatrix}.$$

A反对称，则 $\varepsilon^T A\varepsilon=0$

[例] 设A、B为实对称阵，则A、B相似 $\Leftrightarrow$ A、B特征值相同

"$\Rightarrow$" $A\sim B$，则 $\exists P$ 使 $A=P^{-1}BP$

$\therefore |\lambda E-A|=|P^{-1}(\lambda E-B)P|$
$=|\lambda E-B|$

即：A、B特征值相同

"$\Leftarrow$" 设 $\lambda_1\cdots\lambda_n$ 为A、B特征值

$\therefore P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\ddots\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$

$\therefore A=P_1P_2^{-1}BP_2P_1^{-1}$

注：实对称阵必可相似对角化.

[例] 任意方阵A与 $P^{-1}AP$ 的特征多项式相同.

$|\lambda E-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E)P-P^{-1}AP|$
$=|\lambda E-A|$

[例] 设A、B为 $n\times n$ 阶实矩阵，如果A为可逆阵，B为反对称阵，证明 $|A^TA+B|>0$.

$\Rightarrow$ 设 λ 为 A^TA+B 的特征值，则 $\exists\varepsilon\neq0$，使 $(A^TA+B)\varepsilon=\lambda\varepsilon$，两边同时左乘 ε^T，有：

$\varepsilon^TA^TA\varepsilon+\varepsilon^TB\varepsilon=\lambda\varepsilon^T\varepsilon$.

由A可逆知 $A\varepsilon\neq0$，即

$\varepsilon^TA^TA\varepsilon=(A\varepsilon)^TA\varepsilon\neq0$

而 $\varepsilon^TB\varepsilon=0$，于是有 $\lambda\varepsilon^T\varepsilon>0$，

由 $\lambda>0$，所以 $|A^TA+B|>0$

[例] 矩阵B是A交换第i、j行，再交换第i、j列得到的，证明：$A\sim B$ 并求P使 $P^{-1}AP=B$.

$\Rightarrow B=E(i,j)AE(i,j)$ 且 $E^{-1}(i,j)=E(i,j)$

$\therefore P=E(i,j)$.

[例] 设n阶实对称阵A的n个特征值 λ_i $(i=1,2\cdots n)$ 互异，x_1 为 λ_1 对应的单位特征向量，证明：方阵 $A-\lambda_1x_1x_1^T$ 的特征值为 $0,\lambda_2\cdots\lambda_n$.

$\Rightarrow$ 设A对应于 $\lambda_2\cdots\lambda_n$ 的特征向量为 $x_2\cdots x_n$，则有 $x_1^Tx_i=0$ (正交)

于是当 $i\neq1$ 时，

$(A-\lambda_1x_1x_1^T)x_i=Ax_i=\lambda_ix_i$

而 $i=1$ 时，$(A-\lambda_1x_1x_1^T)x_1=Ax_1-\lambda_1x_1=0$
$=0\cdot x_1$

$\therefore 0,\lambda_2\cdots\lambda_n$ 为特征值.

[例] 设 $A=\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}$，$|A|=-1$，A的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，求 a,b,c,λ_0！

$\Rightarrow$ 由 $\begin{cases}AA^*=-E\\A^*\alpha=\lambda_0\alpha\end{cases}$ 有 $\lambda A\alpha=-\alpha$

$\therefore\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1\\\lambda_0(-5-b+3)=1\\\lambda_0(-1+c-a)=-1\end{cases}$

$\therefore\lambda_0=-1\quad b=-3\quad a=c$

再由 $|A|=-1$ 知：$a=c=2$.

[例] 设A、B为n阶方阵，A有n个不同特征值，证明：$AB=BA\Leftrightarrow$ A的特征向量也为B的特征向量.

"$\Rightarrow$" 设A有特征向量 ε，特征值 λ，即 $A\varepsilon=\lambda\varepsilon$，将上式左乘B.

$\therefore BA\varepsilon=\lambda B\varepsilon$

即：$A(B\varepsilon)=\lambda(B\varepsilon)$

若 $B\varepsilon=0$，则 $B\varepsilon=0\varepsilon$，$\varepsilon$ 也是B的特征向量

若 $B\varepsilon\neq0$，则 $B\varepsilon$、ε 均是A的特征向量，因A有n个不同特征值，特征值为单根，所以对应的线性无关的特征向量只有一个（即 $B\varepsilon$ 与 ε 成比例）$\therefore B\varepsilon=\mu\varepsilon$

$\therefore\varepsilon$ 也是B特征向量.

"$\Leftarrow$" $\because$ A、B均有n个不同特征值.

即：(几何重数=代数重数)

$\therefore$ A、B有相同的特征向量

$\therefore$ 二者有相同的P，即：

$A=PD_1P^{-1}\quad B=PD_2P^{-1}$

$\therefore\begin{cases}AB=PD_1D_2P^{-1}\\BA=PD_2D_1P^{-1}\end{cases}$ 二者相等

[例] 设 $\alpha=(a_1,\cdots a_n)^T$ 是一个n维实向量，其中 $a_1\neq0$，证明 $A=\alpha\alpha^T$ 可相似对角化，并求可逆阵P及对角阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$

$\Rightarrow|\lambda E-A|=\lambda^{n-1}|\lambda E_1-\alpha^T\alpha|$
$=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum_{i=1}^n a_i^2)$

$\therefore$ A特征值为0（n-1重），$\sum_{i=1}^n a_i^2$

解 $(0E-A)X=0$ 得出 n-1个无关的特征向量：

$\varepsilon_1=(a_2,-a_1,0\cdots0)^T$

$\varepsilon_2=(a_3,0,-a_1,0\cdots0)^T$

$\varepsilon_3=(a_4,0,0,-a_1\cdots0)^T$

$\vdots$

$\varepsilon_{n-1}=(a_n,0,0\cdots\cdots-a_1)^T$

解 $(\sum_{i=1}^n a_i^2E-A)X=0$ 得出：

$\sum_{i=1}^n a_i^2$ 的特征向量：

$\varepsilon_n=(a_1,\cdots\cdots a_n)^T$

$\therefore$ 令 $P=(\varepsilon_1\cdots\cdots\varepsilon_n)$，则：

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&&\\&\ddots&\\&&0\\&&&\sum_{i=1}^n a_i^2\end{bmatrix}$

[例] 设n阶实对称阵A的特征值全为负，证明存在特征值均为非负数的实对称阵B，使 $A=B^2$.

$\Rightarrow P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$ (P正交)

$\Rightarrow$ 令 $B=P\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}P^{-1}$

[例].

哈工大资源分享站
Q.Q 2842305604

Page: Date:

[例] 设A、B为n阶非零矩阵，且 $A^2+A=B^2+B=0$，证明：① $\lambda=-1$ 必是A、B特征值 ② 若 $AB=BA=0$，ξ_1、ξ_2 分别是A、B的对应于特征值 $\lambda=-1$ 的特征向量，证明 ξ_1、ξ_2 线性无关。

$\Rightarrow$ ① $\because (A+E)A=0$

$\therefore (A+E)X$ 有非零解

$\therefore |A+E|=0$

$\therefore \lambda=-1$ 是A(B)特征值

② $A\xi_1=-\xi_1$ 两边左乘B

$\therefore BA\xi_1=-B\xi_1=0$

$\therefore B\xi_1=0\cdot\xi_1$

即：ξ_1 是B对应于 $\lambda=0$ 的特征向量，故 ξ_1、ξ_2 线性无关。

[例] 设n阶矩阵 $A=[a_{ij}]$，若：$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$ $(i=1,2\cdots n)$，则A的所有特征值 λ_i 的模小于1。

$\Rightarrow$ 设 $A\xi=\lambda_i\xi$（λ_i 为任意一个特征值）

$$\therefore \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 得方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=\lambda x_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=\lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots a_{nn}x_n=\lambda x_n \end{cases}$$

设 $|x_k|=\max\{|x_1|,|x_2|\cdots|x_n|\}$，

$|\lambda|=\left|\lambda\cdot\frac{x_k}{x_k}\right|=\left|\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j}{x_k}\right|\le\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|\frac{|x_j|}{|x_k|}\le\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|<1$

由 λ 任意性知：$|\lambda_i|<1$。

[例] 已知

$$A=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-1 & \\ & & & & n \end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix} n & & & \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

问A、B是否相似，若相似求P使 $P^{-1}AP=B$。

$\Rightarrow$ ① A的全部特征值为 $1,2\cdots n$，互不相同，故A相似于由特征值组成的对角阵B

② $\lambda_1=1$ 时，$A\xi=\xi$

$\therefore \xi_1=(1,0\cdots0)^T$

$\lambda_2=2$ 时，$A\xi=2\xi$

$\xi_2=(0,1,0\cdots0)^T$

$\therefore \lambda=n$ 时，$\xi_n=(0,0\cdots,1)^T$

$\therefore P=(\xi_n\cdots\xi_1)$

$$=\begin{bmatrix} & & 1 \\ & ⋰ & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

$\therefore P^{-1}AP=B$

[例] 设三阶矩阵A有三个非零的正交特征向量，证明A是对称阵。

$\Rightarrow$ 设A特征值是 λ_1、λ_2、λ_3，它们对应的特征向量分别是 ξ_1、ξ_2、ξ_3，则 ξ_1、ξ_2、ξ_3 正交，将 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 单位化得 $Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

且 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$

$\therefore A=Q\Lambda Q^T$

$\therefore A^T=Q\Lambda Q^T=A$

$\therefore$ A是对称阵

[例] 设A是n阶矩阵 $(n>1)$，$r(A)=1$，试证：A可对角化 $\Leftrightarrow tr(A)\neq0$。

$\Rightarrow$ A有特征值0，且几何重数为 $n-1$

$\because A$：$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=tr(A)$ $\therefore$ 分类：

① $tr(A)=0$ 时，A有n重特征值0，有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，即A不可对角化

② $tr(A)\neq0$ 时，A有 $n-1$ 重特征值0及1重特征值 $tr(A)$

且有 $(n-1)+1=n$ 个无关向量。

$\therefore$ A可对角化 $\Leftrightarrow tr(A)\neq0$。

[例] 设n阶方阵A满足 $A^2-3A+2E=0$，证明A可相似对角化。

~~$\lambda^2-3\lambda+2=0$~~

~~$\Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-1$~~

又 $\because (2E-A)(E-A)=0$，

$\therefore r(2E-A)+r(E-A)\le n$。

而 $r(2E-A)+r(E-A)\ge r(E)=n$

$\therefore r(2E-A)+r(E-A)=n$

设2、1的几何重数为 r_1、r_2。

$\therefore n\ge r_1+r_2\ge n$

$\therefore r_1+r_2=n$。

$\therefore$ A有n个线性无关向量

故A相似于一个对角阵

[例] 设A为n阶矩阵，$AA^T=E$，$|A|<0$，试求 A^* 的一个特征值。

$\Rightarrow$ 只需求 $|A|$ 及A的 λ

易求得 $|A|=-1$

$|E+A|=|A||A^T+E|=-|E+A|$

$\therefore |E+A|=0$

$\therefore$ 1是A的一个 λ

$\therefore A^*$ 的一个特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}=1$

[例] 设A为三阶实对称阵满足 $A^2+2A=0$，$r(A)=2$，求A的全部 λ

$\Rightarrow \lambda^2+2\lambda=0$ $\lambda=-2、0$

~~$\therefore \lambda=0$ 几何重数为~~ 1

$\therefore$ 对角阵 $\begin{bmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

[易]降阶公式.

(1) $A_{n\times n}$的元素全为1,求λ?

$|\lambda E-A|=\lambda^{n-1}(\lambda-n)$

$\therefore \underbrace{0,0\cdots 0}_{n-1个},n$

(2) $A=\begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & & & a_2+b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n+b_1 & & & a_n+b_n \end{bmatrix}$

$\alpha=(a_1\cdots a_n)$与$\beta=(b_1\cdots b_n)$正交,求λ?

$\Rightarrow R=1$时,能分成$(n\times1)$与$(1\times n)$

$R=2$时,能分成$(n\times2)$与$(2\times n)$

$\therefore A=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$

$=P\begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix}\cdot[E_r, 0]Q$

解:$A=\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$

$\therefore |\lambda E-A|=\lambda^{n-2}\left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \Sigma a_i & n \\ 0 & \Sigma b_i \end{bmatrix}\right|$

$=\lambda^{n-2}(\lambda-\Sigma a_i)(\lambda-\Sigma b_i)$

[难] $A_{n\times n}$,且∃m使$A^m=A^{m-1}$.

判试证A特征值只能是0或1.

$\Rightarrow AX=\lambda X\ (X\neq0)$

$\therefore f(A)X=f(\lambda)X$

若$f(A)=0$,则有$f(\lambda)X=0$

$\because X\neq0\ \therefore f(\lambda)=0$

$\therefore \lambda^m=\lambda^{m-1}\Rightarrow\lambda=0$或1

[难].设数列$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$, $x_0=1$

$x_1=3$,求x_n及$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

[易]. $A\sim\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$ 求$R(A-E)$

$+R(A+E)$. __4__.

$A\sim D$

则$A+E\sim D+E$

$A-E\sim D-E$.

[易]. A.B均为n阶方阵,且$|A|\neq0$,

证明:$AB\sim BA$.

$AB=AB(AA^{-1})=A(BA)A^{-1}$

$\therefore AB\sim BA$.

[易]设A为n阶可逆方阵,若A特征值为λ,则$(A^*)^2+E$必有特征值__$\frac{|A|^2}{\lambda^2}+1$__.

$\Rightarrow (A^*)^2=|A|^2(A^{-1})^2$.

[易]. A为3阶方阵,A的特征值为0,0,1, $X_1.X_2$是$AX=0$的基础解系, X_3是$AX=X$的非零解.则A的全部特征向量为____

$k_1X_1+k_2X_2$及k_3X_3

$(k_3\neq0$且$k_1^2+k_2^2\neq0)$

[易]已知1,1是$A_{2\times2}$的λ,则C

A. A与$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$相似.

不可对角化

B. A与$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$相似 E_2

C 若$A\neq E_2$,则A不可对角化.

$A=T^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}T=E_2$

[易]设A为n阶实对称阵,证明$R(A^2)=R(A)$.

$R(A^2)=R\left(\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{bmatrix}\right)=R\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\right)=R(A)$.

V中零.负元素唯一　证明××是线性空间 ⇒ 证明其对"+"、数乘封闭

第七章：线性空间、变换

一、线性空间定义

1. 和与积：

设V是一个非空集合，F是一个数域

(1) 若对任意两个元素 $\alpha,\beta\in V$，总有唯一的一个元素 $\gamma\in V$ 与之对应，称 $\gamma=\alpha+\beta$ 为 α 与 β 的和。

(2) 若对任一 $k\in F$ 及任一元素 $\alpha\in V$，有唯一的一个 $\delta\in V$ 与之对应，称为 k 与 α 的积，记为 $\delta=k\alpha$。

2. 若加法、数乘满足下八条

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3) 在V中∃元素0，使对任意 $\alpha\in V$，都有 $\alpha+0=\alpha$，则称这个元素0为V的零元素

(4) 对任意 $\alpha\in V$，都有 $\beta\in V$ 使 $\alpha+\beta=0$，称这个 β 为 α 的负元素

(5) $1\alpha=\alpha$

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

则称V为数域F上的线性空间。

3. 注：验证V是否为线性空间时，不仅要验证在V上是否定义"+"、数乘，还要验证加法、数乘是否满足线性运算的八条规律。

(e.g.) 新定义：

$\forall a,b\in R^+$，$a\oplus b=ab$

$\forall k$、a 满足 $k\cdot a=a^k$。

⇒ 加法、数乘均满足8条。

注：零元素为1，负元素为0.

(e.g.) R^n 是实线性空间

(e.g.) 实数域R上的线性空间称为实线性空间，实线性空间中的向量称为实向量。

由于线性空间与n维向量空间有许多本质上相同的性质，因此人们常把线性空间称为向量空间。线性空间V中的元素不论其本来的属性如何，统称为向量。

(e.g.) 所有 $m\times n$ 实矩阵的全体构成的集合 $R^{m\times n}$ 关于矩阵的加法、数乘是实线性空间。

(e.g.) 次数不超过n的实多项式的全体以及零多项式构成的集合

$P[x]_n=\{p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\mid a_i\in R\}$

是实线性空间。

(e.g.) n次实多项式的全体

$Q[x]_n=\{p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\mid a_n,a_{n-1}\cdots a_0\in R,a_n\neq0\}$

对于加法不封闭，故不是线性空间。

(e.g.) 定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数的全体，关于函数的加法及实数与函数的乘法是实线性空间

3. 线性空间V的一些其他性质

(1) V中零元素是唯一的，记为0

(2) V中每个元素的负元素是唯一的，记其负元素为 $-\alpha$。

(3) $0\alpha=0$，$(-1)\alpha=-\alpha$，$k0=0$。

(4) $k\alpha=0\Rightarrow k=0$ 或 $\alpha=0$。

[例] 已知 $1,x,x^2$ 是实线性空间 $R[x]_2=\{p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0\mid a_i\in R\}$ 的基，试求 $p(x)=(x-2)(x-3)$ 在该基下的坐标。

⇒ $(6,-5,1)$。

[例] 验证实线性空间 R^n 中与已知向量 α_0 正交的所有向量全体 $S=\{\alpha\in R^n\mid(\alpha_0,\alpha)=0\}$ 是 R^n 的一个子空间。

设 $\alpha,\beta\in S$，$k\in R$

$(\alpha_0,\alpha+\beta)=(\alpha_0,\alpha)+(\alpha_0,\beta)=0$

$(\alpha_0,k\alpha)=k(\alpha_0,\alpha)=0$

∴ S对加法数乘封闭，即S是 R^n 的一个子空间。

[例] 设U为线性空间V的子空间，并且U与V的维数相等，证明U=V.

设U的维数为r，则U有一极大线性无关组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$，则该无关组也是V的一个无关组，而 $\dim V=r$ ∴ 该无关组是V的极大无关组，即为V的一个基底，所以任意 $\alpha\in V$，可表示为 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 的线性组合 ∴ $V\leq U$

综上：U=V.

[例] 判断哪些为线性变换。

(1) 在 V_n 中，$A(\alpha)=\alpha+\alpha_0$，$\forall\alpha\in V_n$，其中 α_0 是 V_n 中一固定向量

二.子空间

1.定义:设V是数域F上的线性空间,L是V的一个非空子集.如果L对于V上所定义的加法和数乘也构成F上的线性空间,则称L是V的一个线性子空间,简称L是V的一个子空间.

2.定理:

F上线性空间V的非空子集L构成V的子空间的充要条件是L对V中的加法.数乘封闭

3.注:线性空间V的零向量0构成的集合{0}是V的子空间.

V也是V的子空间.

4.设V是数域F上的线性空间,$\alpha.\beta\in V$.集合 $L=\{\gamma\mid\gamma=k\alpha+l\beta,k.l\in F\}$ 是V的一个子空间,称这个线性空间为由向量α,β所生成的子空间.

一般地,由V中向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$所生成的线性子空间为$L=\{\gamma\mid\gamma=k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m\}$.

三.线性空间的基.维数.坐标

1.定义:在线性空间V中如果存在n个向量$\alpha_1,\cdots\alpha_n$满足:

(1) $\alpha_1,\cdots\alpha_n$线性无关.

(2) V中任意向量α,都使$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n,\alpha$线性相关.

称$\alpha_1,\cdots\alpha_n$为线性空间V的一个基底,称V的基所含向量的个数n为线性空间V的维数.

☆只含一个零向量的线性空间,称为零维向量空间,n维与零维线性空间统称为有限维向量空间.

(eg.1). $V=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\middle|a.b.c\in R\right\}$为3维向量空间,基为$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$.

不難看 $k_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

(e.g2).

$P[x]_3=\{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\mid a_i\in R$ $i=0,\cdots 4\}$是四维向量空间.

基$_1$:$1,x,x^2,x^3$.

$\Rightarrow$令 $k_1+k_2x+k_3x^2+k_4x^3=0$

x为任意数 $\therefore k_i=0$.

基$_2$:$1,1-x,1-x^2,1-x^3$

$\Rightarrow$找过渡矩阵.

$$基_2=基_1\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$\because$过渡矩阵可逆 $\therefore$基$_2$个向量无关

(eg3) $R^{2\times3}$中任何一个由6个矩阵构成的线性无关向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_6$都是$R^{2\times3}$的基

2.设$\alpha_1,\cdots\alpha_n$是F上线性空间V_n的一个基,则V_n中任何一个元素α都可由$\alpha_1,\cdots\alpha_n$唯一线性表示,体现

即:$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_n\alpha_n$

称$(x_1,x_2\cdots x_n)$为α关于基$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$的坐标,记为$(x_1,x_2\cdots x_n)$

四.线性变换

1.定义:设$V_n.U_m$分别是数域F上的n维.m维的线性空间.如果对于V_n中任一元素α,按照一定的规则$\mathcal{A}$,总有U_m中一个确定的元素β和它对应,那么,这个规则$\mathcal{A}$称为由V_n到U_m的映射.

2.设映射$\mathcal{A}$将V_n中元素α映成U_m中元素β,记为$\mathcal{A}(\alpha)=\beta$或$\mathcal{A}\alpha=\beta$

3.线性映射:

如果由V_n到U_m的映射$\mathcal{A}$满足

① $\mathcal{A}(\alpha_1+\alpha_2)=\mathcal{A}(\alpha_1)+\mathcal{A}(\alpha_2)$

② 对任意$\alpha\in V_n$及任意$k\in F$都有$\mathcal{A}(k\alpha)=k\mathcal{A}(\alpha)$

则称$\mathcal{A}$是从V_n到U_m的线性映射

特:

4.若对$\forall\alpha\in V_n$ 都有 $\mathcal{A}_1(\alpha)=\mathcal{A}_2(\alpha)$,则称$\mathcal{A}_1$与$\mathcal{A}_2$相等,记为.

$\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2$

5. 线性空间V_n到自身的线性映射称为V_n的线性变换。

(eg1). 零变换 $\mathcal{T}_0(\alpha)=0, \forall\alpha\in V_n$

(eg2) 恒等变换. $I_V(\alpha)=\alpha, \forall\alpha\in V_n$

(eg3). 求导为线性变换

$\mathcal{A}: P[x]_2 \to P[x]_2$

$\mathcal{A}[f(x)]=f'(x), \forall f(x)\in P[x]_2$

注:限定向内$P[x]$

(eg4). $\mathcal{A}(A)=A^T, \forall A\in R^{n\times n}$

即:转置也为线性变换 ???

6. 线性变换满足:

① $\mathcal{A}(0)=0$, $\mathcal{A}(-\alpha)=-\mathcal{A}(\alpha)$

② 若$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m$.

则$\mathcal{A}(\beta)=k_1\mathcal{A}(\alpha_1)+\cdots k_m\mathcal{A}(\alpha_m)$

③ $\alpha_1\cdots\alpha_m$相关,则

$\mathcal{A}(\alpha_1)\cdots\mathcal{A}(\alpha_m)$相关

⇒逆命题、否命题均不一定

$\alpha_1\cdots\alpha_m$无关,零变换后相关.

④ 像集$\mathcal{A}(V_n)$是V_n的一个线性子空间

⑤ 使$\mathcal{A}(\alpha)=0$的全体

$Ker(\mathcal{A})=\{\alpha\in V_n \mid \mathcal{A}(\alpha)=0\}$

也是V_n的一个子空间,称为

$\mathcal{A}$的核.

7. 秩: V_n的线性变换$\mathcal{A}$的像空间$\mathcal{A}(V_n)$的维数,称为线性变换$\mathcal{A}$的秩.

注:若A是线性变换$\mathcal{A}$的矩阵,则$\mathcal{A}$的秩就等于矩阵A的秩,若$\mathcal{A}$的秩是r,则$\mathcal{A}$的核$Ker\mathcal{A}$的维数为$n-r$.

五. 矩阵表示

1. 引入.

设$\mathcal{A}$是V的一个线性变换

$\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$是$V$的一个基

则$\mathcal{A}(\varepsilon_1)\cdots\mathcal{A}(\varepsilon_n)\in V$,则存在$a_{ij}$使

$$\begin{cases}\mathcal{A}(\varepsilon_1)=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2\cdots a_{n1}\varepsilon_n\\ \vdots\\ \mathcal{A}(\varepsilon_n)=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots a_{nn}\varepsilon_n\end{cases}$$

称$(\mathcal{A}(\varepsilon_1)\cdots\mathcal{A}(\varepsilon_n))$为形式矩阵

$$(\mathcal{A}(\varepsilon_1)\cdots\mathcal{A}(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots&a_{1n}\\a_{21}&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}}_{A}$$

称矩阵A为线性变换$\mathcal{A}$在基$\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$下的表示矩阵.

2. 意义:对于$\mathcal{A}(X)=AX$

$\forall X=(x_1,\cdots x_n)^T\in R^n$.

则$\mathcal{A}$是R^n的一个线性变换,

这个$\mathcal{A}$的像空间就是A的列向量组$\alpha_1\cdots\alpha_n$生成的R^n的子空间,$\mathcal{A}$的核就是$AX=0$的解空间

(e.g.) 已知 $\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ $\varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ $\varepsilon_3=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$

是R^3的基, $\mathcal{A}(\varepsilon_1)=\varepsilon_1+\varepsilon_3$

$\mathcal{A}(\varepsilon_2)=\varepsilon_1$, $\mathcal{A}(\varepsilon_3)=\varepsilon_1+\varepsilon_2$

求表示矩阵

$(\mathcal{A}(\varepsilon_1),\mathcal{A}(\varepsilon_2),\mathcal{A}(\varepsilon_3))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

(eg) $\mathcal{A}$在$\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$下表示矩阵为$A$,

$\alpha\in V$, 求$\mathcal{A}(\alpha)$.

⇒设$\alpha=x_1\varepsilon_1+\cdots x_n\varepsilon_n$.

$\because[\mathcal{A}(\varepsilon_1)\cdots\mathcal{A}(\varepsilon_n)]=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)A$

$\therefore\mathcal{A}(\alpha)=x_1\mathcal{A}(\varepsilon_1)+\cdots x_n\mathcal{A}(\varepsilon_n)$

$=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)A\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$

任意实二次型都可化标准形，规范型

(eg) $P[x]_2$ 基为 $1, x, x^2$

$\mathcal{A}(f)=f'$ 求 $\mathcal{A}$ 在 $1, x, x^2$ 下表示矩阵 并求 $f=x+5x^2$ 在 $\mathcal{A}$ 下的像。

$\mathcal{A}(1)=0$

$\mathcal{A}(x)=1$ $\quad \therefore A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\mathcal{A}(x^2)=2x$

$\therefore \mathcal{A}(f)=A\begin{bmatrix}0\\1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\10\\0\end{bmatrix}$

$\therefore \mathcal{A}(f)=10x+1$

3. 定理：

在 V_n 中取定 2 个基：

$(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ 和 $(\beta_1 \cdots \beta_n)$

设由基 $(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ 到基 $\beta_1 \cdots \beta_n$ 的过渡矩阵是 P，$\mathcal{A}$ 在这 2 个基下矩阵依次为 A, B，则：

$B=P^{-1}AP$

4. 结论：

R^n 中的线性变换 $\mathcal{A}$ 在自然基 $\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ $\varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} \cdots \varepsilon_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

下的矩阵为 $A=[\mathcal{A}(\varepsilon_1) \cdots \mathcal{A}(\varepsilon_n)]$.

(eg) R^3 中，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为自然基

已知 $\mathcal{A}(\varepsilon_i)$ 在其表示矩阵为

$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&2&0\end{bmatrix}$ 求 $\mathcal{A}$ 在新基：

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 下的矩阵

$\Rightarrow \mathcal{A}(\alpha_1)=\varepsilon_1$

$\mathcal{A}(\alpha_2)=\mathcal{A}(\varepsilon_1)+\mathcal{A}(\varepsilon_2)=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$

$\mathcal{A}(\alpha_3)=\mathcal{A}(\varepsilon_1)+\mathcal{A}(\varepsilon_2)+\mathcal{A}(\varepsilon_3)=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$

$\therefore \mathcal{A}(\alpha_1)=\alpha_1$

$\mathcal{A}(\alpha_2)=-\alpha_1+2\alpha_3$

$\mathcal{A}(\alpha_3)=-\alpha_1+2\alpha_3$

$\therefore [\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \mathcal{A}(\alpha_3)]=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&2&2\end{bmatrix}$.

[证3].

已知 $(\beta_1 \cdots \beta_n)=(\alpha_1 \cdots \alpha_n)P$

$\mathcal{A}(\alpha_1 \cdots \alpha_n)=(\alpha_1 \cdots \alpha_n)A$

求 $\mathcal{A}(\beta_1 \cdots \beta_n)$

原式 $=\mathcal{A}(\alpha_1 \cdots \alpha_n)P$

$=(\alpha_1 \cdots \alpha_n)AP$

$=(\beta_1 \cdots \beta_n)P^{-1}AP$.

(eg) 设数域 F 上的线性空间 V_3 中的线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵是 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$

求 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ 下的矩阵 B.

$\Rightarrow (\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1)=(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)P$, $P=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore \mathcal{A}(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)=$

$\mathcal{A}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)P$

$=(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)AP$

$=(\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1)P^{-1}AP$

$\therefore B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\end{bmatrix}$

判断f正定？⇒求A各阶顺序主子式.

第八章 二次型与二次曲面.

一.实二次型

1.定义：含有n个变量$x_1,\dots,x_n$的n元二次齐次函数

$$f(x_1\cdots x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \cdots + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

称为数域F上的二次型.（F为系数a的数域）.

2.分类.

~~当系数a_{ij}都是复数时,~~ 称f为复二次型；当系数a_{ij}都是实数时,称实二次型.

3.二次型中取$a_{ij}=a_{ji}$,则:

$$2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$$

$$\therefore f(x_1\cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j =$$

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n +$$
$$a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

$\therefore f(x) = X^TAX$. [A实对称]

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称实对称矩阵A为二次型f的矩阵,R(A)为f的秩.

(eg). $f=x^2+y^2+xy-yz$ 写矩阵

$\Rightarrow xy=\frac{1}{2}\ \ yz=-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$ 对角元为x^2.y^2.z^2系数.

但 $f(x)=X^T\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 \end{bmatrix}X$

但A不叫二次型矩阵.

4.标准型：无混合项,矩阵为对角阵.

二.合同

1.定义：给定2个n阶方阵A.B. 若存在可逆阵C使$B=C^TAC$. 则A.B合同.

2.性质：

①反身性：取C=E

②对称性：$B=C^TAC$,则 $A=(C^{-1})^TAC^{-1}$

③传递性：

三.化实二次形为标准形.

1.线性变换.

设C是n阶可逆阵,

$X=(x_1\cdots x_n)'$ $Y=(y_1\cdots y_n)'$

则$X=CY$为可逆线性变换.

即：R^n中向量在2组基下的坐标变换就是可逆线性变换.

若C正交,则为正交线性变换.

2.正交变换化标准形.

(1)定理：$f=X^TAX$为n元实二次型,∃正交线性变换$X=PY$使

$f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$

其中$\lambda_1\cdots\lambda_n$为A的n个特征值

$\Rightarrow f=X'AX=(PY)'A(PY)$

$=Y'(P'AP)Y$.

(2)存 $R(A)=R(P'AP)$.

(3)方法：

①先写A,P

②把A正交相似对角化得P.

- 求λ
- 求X
- X正交单位化

③ $X=PY$

$\therefore f=X'AX=Y'P'APY=Y'DY$

[重点]

1.合同

(1) A.B为2个n阶方阵,若存在n阶可逆阵P使$P^TAP=B$,则称A.B合同,称可逆阵P为A到B的合同变换矩阵

(2)性质.

①若A.B合同,则A.B等价. 从而$R(A)=R(B)$.

②若对方阵A施以"成对"的任何一种初等变换(行.列变换)得到B,则A.B合同.

③任意实对称阵必(正交)合同于一对角阵.

2. $f(x)=X^TAX$,称实对称阵A为f的矩阵,二次型f与其矩阵A之间一一对应.

3.二次型的规范型唯一,但标准型不唯一

4.正定二次型等价结论(A实对称)

A正定⇔存在m×n列满秩阵使$A=P^TP$. (A与E合同)

⇔∃n阶可逆阵Q使$A=Q^TQ$.

⇔A的各阶(顺序)主子式全>0.

⇔A的特征值全>0.

⇔A的二次型标准型中,n个变量系数全为正数(正惯性指数为n,负惯性指数为0,秩为n).

5.半正定阵等价结论：

设A为n阶实对称阵,且$R(A)=r$,则A半正定⇔

∃r×n阶行满秩阵P.使$A=P^TP$

⇔A的各阶主子式都非负⇔A特征值非负

⇔A对应的二次型的标准型中n个变量的系数全非负(q=0).

A半正定，则$|A|\geq 0$

判断f是否为正定二次型 $\Longleftrightarrow$ 求A各阶顺序主子式：>0即可.

(e.g.) 将 $f=-2x_1x_2\cdots$ 化为标准形（求$X=PY$）.

① 写矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-1&-1&1\\-1&0&1&-1\\-1&1&0&-1\\1&-1&-1&0\end{bmatrix}$

② 求 $\lambda=-1,-1,-1,3$.

对$\lambda=-1$，求T_1,T_2,T_3，先正交化得P_1,P_2,P_3.

对$\lambda=3$，求T_4，单位化为P_4

③ 令$P=(P_1,P_2,P_3,P_4)$.

④ 在$X=PY$下，$D=\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&3\end{bmatrix}$

$f=Y^TDY=-y_1^2-y_2^2-y_3^2+3y_4^2$

3. 配方法化标准形.

(e.g.) $f=x_1^2+6x_1x_2+5x_2^2$ 化为标准型.

$f=(x_1+3x_2)^2-4(x_2)^2$

令 $Y_1=X_1+3X_2$

$Y_2=X_2$（或$2X_2$）

$\therefore f=Y_1^2-4Y_2^2$

$\therefore \begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}}_{C^{-1}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

$\therefore C=\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}$ $\therefore X=CY$

注：配方法求出C不唯一

而由 $\begin{cases}f=y_1^2-4y_2^2\\f=y_1^2-y_2^2\end{cases}$ 正负不变

注：(1) 配方法先将所有含x_1项的放在一起配方，这样剩下的未配方式中就不含x_1项，再继续考虑之后的项.

(2) 若二次型中不含平方项，可先用一个可逆变换把f化为含平方项的二次型.

(e.g.2) 化二次型并求f的秩：

$f=4x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-4x_1x_4+2x_2^2+4x_2(x_3-x_4)+x_3^2-2x_4^2-8x_3x_4$.

$\Rightarrow f=(2x_1+x_2+x_3-x_4)^2+\sim$

$=(2x_1+x_2+x_3-x_4)^2+(x_2+x_3-x_4)^2-(x_3+2x_4)^2$

$\therefore\begin{cases}y_1=2x_1+x_2+x_3-x_4\\y_2=x_2+x_3-x_4\\y_3=x_3+2x_4\\y_4=x_4\end{cases}$

即：$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2\\x_2=y_2-y_3+3y_4\\x_3=y_3-2y_4\\x_4=y_4\end{cases}$

(e.g.3) 化 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准形.

$\Rightarrow$ 令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ ① 代入f得：

$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$

$\therefore =2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2$

令 $\begin{cases}z_1=y_1-y_3\\z_2=y_2-2y_3\\z_3=y_3\end{cases}$ ② $\Rightarrow\begin{cases}y_1=z_1+z_3\\y_2=z_2+2z_3\\y_3=z_3\end{cases}$

线性变换①、②的矩阵为：

$C_1=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 和 $C_2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\therefore$ 总变换为$X=C_1Y=C_1(C_2Z)$

$\therefore C=C_1C_2=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&-1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$

由$|C|=-2\neq 0$ 知C可逆

$\therefore X=CZ$，$f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$

[结论].

1. A_1与B_1合同，A_2与B_2合同，证明$\begin{bmatrix}A_1&\\&A_2\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}B_1&\\&B_2\end{bmatrix}$合同.

$\Rightarrow$ 设 $B_1=C_1^TA_1C_1$

$B_2=C_2^TA_2C_2$

$\therefore$ 令$C=\begin{bmatrix}C_1&\\&C_2\end{bmatrix}$ 则有

$\begin{bmatrix}B_1&\\&B_2\end{bmatrix}=C^T\begin{bmatrix}A_1&\\&A_2\end{bmatrix}C$

2. A对称，B、A合同，则B对称

设$B=C^TAC$，求B^T即可.

3. 设A是n阶正定阵，B为n阶实对称阵，证明：存在n阶可逆阵P使P^TAP与P^TBP均为对角阵.

$\Rightarrow\because$A正定 $\therefore\exists$可逆阵M使$M^TAM=E$，记$B_1=M^TBM$

则B_1实对称. $\therefore\exists$正交阵Q使$Q^TB_1Q=D=diag(u_1,\cdots u_n)$

其中$u_1\cdots u_n$为$B_1=M^TBM$的特征值. 令$P=MQ$，则有：

$P^TAP=E$，$P^TBP=D$.

4. 设二次型$f=\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1+\cdots a_{in}x_n)^2$，令$A=(a_{ij})_{m\times n}$，则二次型f的秩等于$r(A)$.

$\Rightarrow$ 设$y_i=a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n$

$Y=(y_1,\cdots y_m)^T$ $\therefore Y=AX$

其中$X=(x_1,\cdots x_n)^T$

$\therefore f=y_1^2+\cdots y_m^2$

$=Y^TY$

$=X^T(A^TA)X$

而$R(A^TA)=R(A)$

5. 设A实对称，$|A|<0$，则存在非零列向量ξ使$\xi^TA\xi<0$.

法一：设$\forall x\neq 0$都有$x^TAx\geq 0$，则A半正定，则$|A|\geq 0$ 矛盾

法二：因A实对称，所以存在可逆阵P使$P^TAP=D=diag(\lambda_1,\cdots\lambda_n)$

由$|A|<0$ $\therefore$ D中至少有$\lambda_k<0$.

取$\xi=P\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ 第k个为1，其他为0

$\therefore\xi^TA\xi=\varepsilon^TD\varepsilon=\lambda_k<0$.

4.合同变换法化标准形.

$\Leftrightarrow$ 找 C 使:

$$C^TAC=\Lambda=\begin{bmatrix}k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n\end{bmatrix}$$

① $E^T(i,j)AE(i,j)=B$

$$A\xrightarrow[c_i\leftrightarrow c_j]{r_i\leftrightarrow r_j}B$$

② $E^T(i(k))AE(i(k))=B$

$$A\xrightarrow[k\times c_i]{k\times r_i}B$$

③ $E^T(j,i(k))AE(j,i(k))=B$

$\Downarrow$

$E(i,j(k))$

$$A\xrightarrow[c_i+kc_j]{r_i+kr_j}B$$

$$\therefore\begin{bmatrix}A\\E\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}C'AC\\C\end{bmatrix}.$$

当 $C'AC$ 是对角阵时,C 即为所求合同变换矩阵

对其每做一次列变换,同时对前 n 行 A 做一次相应的行变换.

(eg.) 将 $f=X'\begin{bmatrix}0&1&-3\\1&0&1\\-3&1&0\end{bmatrix}X$ 化为标准形.

$$\begin{bmatrix}A\\E\end{bmatrix}=[\ ]\xrightarrow[r_1+r_2]{c_1+c_2}[\ ]\xrightarrow[r_3+r_1]{c_3+c_1}[\ ]$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{c_2+c_3}[\ ]\longrightarrow\begin{bmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&0&-2\\\hline 1&1&1\\1&3&1\\0&2&1\end{bmatrix}$$

$\therefore f=2y_1^2+6y_2^2-2y_3^2$

$X=CY.$

三 正定实二次型.

1.惯性定律:

设 n 元实二次型 $f=X'AX$ 经实可逆线性变换 $X=C_1Y$, $X=C_2Z$ 分别化为 $\begin{cases}f=k_1y_1^2+\cdots k_ny_n^2\\f=l_1z_1^2+\cdots l_nz_n^2\end{cases}$,则

$k_1\cdots k_n$ 与 $l_1\cdots l_n$ 中:

正数个数相同、负数个数相同、0的个数也相同.

(1)正、负数的个数分别称之为正负惯性指数.

(2)设 f 矩阵为 A,则:

正惯指:A 正 λ 个数

负惯指:A 负特征值个数.

$\therefore$ 正惯指+负惯指 $=A$ 非零特征值个数 $=R(A)\neq n$.

2.任一实二次型都可经一适当的可逆线性变换化成规范形

$$f=y_1^2+\cdots y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots y_{p+q}^2$$

其中 p、q 分别为正负惯性指数.

3.正定二次型:

(1)定义:设有 n 元实二次型 $f=X'AX$,若对 R^n 中任何列向量 $X\neq0$,都有 $X'AX>0$,则称 f 为正定二次型,称正定二次型的矩阵为正定矩阵

$\Rightarrow$ 实质:对 $x_1,x_2\cdots x_n$ 不全为0时有 $f>0$.

(eg.) $f=x_1^2+x_2^2$ 是正定

(eg.) $f=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$ 不是正定.

☆正定阵必为实对称,反之未必.

若不对称,一定不正定.

(2)定理:

① f 为正定二次型 $\Leftrightarrow$ f 的标准形中的 n 个系数全为正数,即 f 的正惯指数为 n.

② $$A\sim\begin{bmatrix}E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0\end{bmatrix}$$

6.设 n 元实二次型 $f=X^TAX$,则 f 在条件 $x_1^2+\cdots x_n^2=1$ 下的最大值恰为方阵 A 的最大特征值.

$\Rightarrow$ 设 $\exists$ 正交变换 $X=PY$ 使

$f=Y^T(P^TAP)Y=\lambda_1y_1^2+\cdots\lambda_ny_n^2$

设 λ_k 是 $\lambda_1\sim\lambda_n$ 中最大值

$\because X^TX=Y^TP^TPY=Y^TY=y_1^2+\cdots y_n^2=1$

$\therefore f\leq\lambda_k(y_1^2+\cdots y_n^2)=\lambda_k$

这说明 f 不会超过 λ_k

设 $Y=(0,0\cdots1,0,0\cdots0)^T$ 第 k 个为1

则 $Y_0^TY_0=1$, $f=\lambda_k$

令 $X_0=PY_0$

$\therefore X_0^TX_0=Y_0^TY_0=1$

而 $f(X_0)=X_0^TAX_0=Y_0^T(P^TAP)Y_0=\lambda_k$

$\therefore f(x)$ 在 X_0 达到 λ_k.

7.A 正定,P 可逆,则 P^TAP 正定.

$\exists$ 可逆阵 Q 使 $A=Q^TQ$

$\therefore P^TAP=(QP)^TQP$

显然 QP 为可逆阵

8.A 实对称,则 A 可逆 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 实矩阵 B 使 $AB+B^TA$ 正定

"$\Rightarrow$":

取 $B=A^{-1}$

$\therefore AB+B^TA=2E$ 显然正定

"$\Leftarrow$" 反证法,

若 A 不可逆 则 $r(A)<n$.

$\therefore\exists X_0\neq0$ 使 $AX_0=0$.

$\therefore X_0^T(AB+B^TA)X_0$

$=(AX_0)^TBX_0+X_0^TB^T(AX_0)=0$

这与 $AB+B^TA$ 正定矛盾.

9.n 阶实对称阵 A、B 的 λ 全大于0,A 的特征向量都是 B 的特征向量,则 AB 正定.

$\because A$ 实对称 $\therefore\exists$ 正交 $P=(P_1\cdots P_n)$

使 $P^TAP=diag(\lambda_1\cdots\lambda_n)$

即:$AP_i=\lambda_iP_i$ 而 $BP_i=u_iP_i$

$\therefore(AB)P_i=Au_iP_i=(\lambda_iu_i)P_i$

$\therefore\lambda_iu_i$ 是 AB 特征值 且 $\lambda_iu_i>0$

$\therefore AB=P\,diag(\lambda_1u_1\cdots\lambda_nu_n)P^T$.

$\therefore AB$ 实对称且正定.

半正定 λ 均 ≥0　A实对称且 $A^2-6A+4E=0$，证明A正定 ⇒ 求 $\lambda^2-6\lambda+4=0$ 即可。
$y_1x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$　标准形中变量系数为二次型矩阵的特征值（×） ⇒ 正交变换

证：⇒ f 经 $X=CY$ 化为
$f=k_1y_1^2+\cdots+k_ny_n^2$
若 $k_1\cdots k_n$ 不全 >0，不妨设 $k_1\le0$。令 $\alpha_0=CY_0=C\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$
则 ∃ $X_0\ne0$ 使
$f(X_0)=(CY_0)^TA(CY_0)$
$=Y_0^T\begin{bmatrix}k_1&&\\&\ddots&\\&&k_n\end{bmatrix}Y_0=k_1\le0$.
矛盾。

⇐ ∵ $\forall x\in R^n$，$X\ne0$ 有 $Y=C^{-1}X\ne0$
$\therefore X^TAX=Y^T(C^TAC)Y$
$=Y^T\begin{bmatrix}k_1&&\\&\ddots&\\&&k_n\end{bmatrix}Y=$
$k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2>0$.

③ f为正定二次型 ⇔ A的特征值全 >0.

④ f正定二次型 ⇔ A与E合同 ⇔ ∃可逆Q使 $A=Q^TQ$

证：⇒ ∵ A实对称，∃正交阵P
使 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$
$\therefore A=(P\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix})\cdot(\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix})P^T$
令 $Q=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}P^T$ 则Q可逆
且 $A=Q^TQ$.
⇐ ∵ $\forall x\in R^n$，$X\ne0$，
∴ 有 $QX\ne0$.
$X^TAX=X^TQ^TQX=(QX)^TQX$
$=|QX|^2>0$
∴ f正定

⑤ f为正定二次型 ⇔ A的各阶顺序主子式全大于0.
$a_{11}>0$，$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0$；$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{13}\\\vdots&&\vdots\\a_{31}&\cdots&a_{33}\end{vmatrix}>0$
$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{14}\\\vdots&&\vdots\\a_{41}&\cdots&a_{44}\end{vmatrix}>0\cdots|A|>0$.

⑥ 二次型中但凡有一个平方项系数小于等于0，则必不是正定二次型。

4. 正定矩阵判别
① 首先是实对称阵。
② A的λ全 >0
A、E合同
A各阶顺序主子式 >0.
$X^TAX>0$ $(\forall x\in R^n, x\ne0)$.

5. 性质
① A正定，则 A^* 正定 （√）
证：∵ A实对阵 ∴ $A^T=A$
$\therefore (A^T)^*=A^*$ ∴ A^* 实对称
法一：λ为A特征值，则：
$\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 特征值。
法二：∃P使 $P^{-1}AP=\Lambda$
$\therefore A^*=|A|A^{-1}=|A|P\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\frac{1}{\lambda_n}\end{bmatrix}P^{-1}$
即：$\frac{|A|}{\lambda_1}\cdots\frac{|A|}{\lambda_n}$ 是 A^* 的n个特征值
∴ A^* 正定
法三：∃可逆Q使 $A=Q^TQ$
$\therefore A^*=|A|\ Q^{-1}\cdot(Q^{-1})^T$
$=(\sqrt{|A|}Q^{-1})^T(\sqrt{|A|}Q^{-1})$
② A正定，则 A^k 正定 （√）
$A\sim\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$ $\therefore A^k\sim\begin{bmatrix}\lambda_1^k&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^k\end{bmatrix}$
λ正负整数次幂均 >0.
③ A、B正定，则A+B正定
$(A+B)^T=A^T+B^T=(A+B)$
$\forall x\ne0$，$x\in R^n$ 有
$X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX>0$
∴ A+B正定
注：A−B不一定

[结论]
1. 设A是n阶正定阵，$B_{n\times m}$，则 $r(B^TAB)=r(B)$.
⇒ 考虑 $BX=0$ ① 与 $B^TABX=0$ ②
显然：①的解均为②的解。
反之：若 $B^TABX_0=0$
上式左乘 X_0^T 得：
$(BX_0)^TA(BX_0)=0$
∵ A正定 ∴ $BX_0=0$
∴ ②也是①的解
∴ ①、②同解，秩相等。
2. 设A为实对称阵，则∃实数k，使 $|A+kE|>0$.
⇒ $|A+kE|=(\lambda_1+k)(\lambda_2+k)\cdots(\lambda_n+k)$
∴ 取 $k=\max_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|+1\}$
则 $\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+k)>0$ ∴ $|A+kE|>0$
3. A为n阶正定矩阵，则对任意实数 $k>0$，均有 $|A+kE|>k^n$. （√）
A为半正定阵，则对任意实数 $k>0$，均有 $|A+kE|>0$. （√）
（从 $|A+kE|\ge k^n$ 即可）
4. A是m×n阶实矩阵，则 A^TA 正定 ⇔ A列满秩。
⇒ ∵ $\forall X_0\ne0$ 有
$X^T(A^TA)X=(AX_0)^TAX_0>0$
∴ $AX_0\ne0$ ∴ $AX=0$ 只有零解。
即：A列满秩。
法二：∵ A^TA 正定
∴ $r(A^TA)=n\le r(A)\le n$
∴ $r(A)=n$.
⇐ ∵ $r(A)=n$ ∴ $AX=0$ 只有零解
∴ $\forall X\ne0$，$AX\ne0$
∴ $X^T(A^TA)X=(AX,AX)>0$.
显然 A^TA 实对称
5. 设A、B都是n阶实对称阵且A、B特征值完全相同，则∃正交阵C使 $AC=CB$.
⇒ ∃正交P、Q使
$P^{-1}AP=Q^{-1}BQ=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$
$\therefore A(PQ^{-1})=(PQ^{-1})B$
$C=PQ^{-1}$

对称，则合同⟺正负惯性指数相同.
合同阵同时对称

④. A,B正定 ⟺ $\begin{bmatrix}A&\\&B\end{bmatrix}$正定

$\begin{bmatrix}A&\\&B\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}A^T&\\&B^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&\\&B\end{bmatrix}$

正向、反向显然对称阵.

$|\lambda E-\begin{bmatrix}A&\\&B\end{bmatrix}|=|\lambda E-A||\lambda E-B|$.

⑤ A,B正定，AB不一定正定

$(AB)^T=B^TA^T=BA$.

⑥ A,B正定，AB=BA，则AB正定.

证：$(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$

∴∃可逆阵P,Q使

$A=P^TP$, $B=Q^TQ$

~~$\begin{cases}AB=P^TPQ^TQ\\BA=Q^TQPP^T\end{cases}$~~

$\therefore AB=Q^{-1}(PQ^T)^T(PQ^T)Q$

∵PQ^T可逆，$(PQ^T)^T(PQ^T)$特征值全大于0，

又∵$AB\sim(PQ^T)^T(PQ^T)$

∴AB正定.

(e.g.) f的 $A=\begin{bmatrix}1&k&1\\k&2&0\\1&0&1-k\end{bmatrix}$正定，求k范围？

$\begin{cases}\begin{vmatrix}1&k\\k&2\end{vmatrix}>0\\|A|>0\end{cases}$ 即可. ∴$-1<k<0$.

⑦ A正定，则 $A^2+A^*+kA^{-1}$为正定阵

∵A正定，故A为实对称阵，且A的特征值全>0，易见A^2、A^*、A^{-1}均为实对称阵，且它们的特征值全大于0，故A^2、A^*、A^{-1}也正定.

$A^2+A^*+kA^{-1}$为实对称阵.

对任意$X\neq0$ 有 $X^T(A^2+A^*+kA^{-1})X=\cdots>0$ ∴正定

⑧ A正定，B半正定，则A+B正定

四. 负定二次型

1.定义：$f=X^TAX$，若对R^n中任意非零列向量X，都有$X^TAX<0$，则此二次型为负定二次型.

∴ A负定，则$-A$正定

2.判定：

① $f=X^TAX$负定.

⟺ f负惯性指数为n

⟺ A特征值全小于0.

⟺ A与$-E$合同

⟺ $-A$的各阶顺序主子式大于0.

⟺ A的奇数阶顺序主子式小于0，偶数阶顺序主子式大于0

四. 合同的判断

1. A,B均实对称阵，看正负惯性指数.

①正负惯性指数全相同，则合同.

②正负惯性指数不同，则不合同.

即：A,B均与$\begin{bmatrix}E_p&&\\&-E_q&\\&&0\end{bmatrix}$合同.

2. A,B一个实对称，另一个不是，则不合同.

$B=C^TAC$

$B^T=C^TA^TC=C^TAC=B$

∴A,B同时合同/不合同

3. A,B均不是实对称阵

$E(1,2)\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}E(1,2)=\begin{bmatrix}1&0\\&1\end{bmatrix}$.

(e.g.) $\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}a&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$

$a=3$：相似且合同

$a=5$：不相似但合同.

6. A正定，AB是实对称阵，则AB正定 ⟺ B特征值全大于0.

"⟹"设λ为B的任一特征值，对应的特征向量X，则$X\neq0$且有$BX=\lambda X$ 左乘X^TA得

$X^T(AB)X=\lambda X^TAX$

∵$\begin{cases}X^T(AB)X>0\\X^TAX>0\end{cases}$ ∴$\lambda>0$.

"⟸"∵A正定 ∴∃可逆P 使 $P^TAP=E$ ①

又∵$P^T(AB)P$也为实对称，故∃正交阵Q使$Q^T(P^T(AB)P)Q$ ②

$=D=diag(u_1,\cdots u_i\cdots u_n)$

①左乘Q^T右乘Q得：$(Q^TP^TA)(PQ)=E$.

而②中有：$Q^TP^TA(B)PQ=D$

∴$B\sim D$ ∴$u_i>0$

由②知AB与D合同

∴AB特征值全大于0

7.设A,B均为实正定阵，证明：$|\lambda A-B|=0$的根全大于0.

$|\lambda E-P_1^TBP_1|=0 \Leftrightarrow |\lambda A-B|=0$

其中$P_1^TBP_1$正定，它的特征值全>0.

∴$|\lambda A-B|=0$根全大于0.

8. A正定，则∃正定阵B 使$A=B^2$.

9. A为n阶可逆实方阵，则A可以表示为一个正定阵与一正交阵的积.

$x^2+y^2=r^2$ $\begin{cases}准：\begin{cases}x^2+y^2=r^2\\ z=0\end{cases}\\ 母：// z轴\end{cases}$ 即 z 任意在空间坐标系中表示柱面. 在 xoy 面投影：两个式一起看，注意范围.

五、空间中的曲面与曲线.

1.球面方程特点：

(1) 三元二次

(2) 二次项 $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$ 系数相同.

(3) 无 xy, yz, zx 之次项.

即：可化为：

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=K$.

2. 柱面.

$f(x,y)=0$.

如：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 椭 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

$x^2=2py\ (p>0)$ 在空间直角坐标系下分别表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面、双曲柱面、抛物柱面.

☆

$\begin{cases}准线：定曲线 C（一般为坐标面上的曲线）\\ 母线：动直线.\end{cases}$

3. 旋转曲面.

☆. 绕谁转，谁不动，另一个替换为 $\pm\sqrt{\circ^2+\triangle^2}$.

(e.g.). 求双曲线 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1\\ y=0\end{cases}$

分别绕 x 轴、z 轴旋转所得曲面方程

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ ①

$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$. ②

分别称①.②为旋转双叶双曲面和旋转单叶双曲面.

(e.g.) 椭圆 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴

得右旋转椭球面.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$

(e.g.) 求直线 $\begin{cases}z=ky\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周得到的曲面方程.

$\Rightarrow z=\pm k\sqrt{x^2+y^2}$

即 $z^2=k^2(x^2+y^2)$.

$\Rightarrow$ 得：顶点在原点，半顶角为 $\operatorname{arccot}|k|$ 的圆锥面：

☆ 将直线 L 绕另一条与 L 相交的直线 L' 旋转一周得圆锥面，L 与 L' 交点叫圆锥面的顶点，两直线夹角 α $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ 叫做圆锥面的半顶角.

4. 空间曲线.

(1) 空间曲线可视为两个曲面的交线 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$ (不唯一).

(2) 参数形式 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t).\end{cases}$

(e.g.).

螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos\omega t\\ y=b\sin\omega t\\ z=vt\end{cases}$

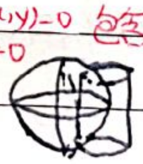
(3) 投影(曲线).

设曲线 C：$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\ F_2(x,y,z)=0.\end{cases}$

从方程组中消去 z 可得以 C 为准线，母线垂直于 xoy 面的投影 $\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$

$F(x,y)$ 仅表示柱面.

☆注：$\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$ 包含 C 在 xoy 面的投影.



$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ (x-1)^2+y^2=1\end{cases}$ 一般式

(包含)

(e.g.) 求 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\ (z\geq0)\\ x^2+y^2-x=0\end{cases}$ 投影.

① 在 xoy 面：

$\begin{cases}x^2+y^2-x=0\\ z=0.\end{cases}$

② 在 zox 面：

消 y 得 $z^2+x=1$ $(x\geq0,\ z\geq0)$.

$\therefore \begin{cases}z^2+x=1\ (x\geq0, z\geq0).\\ y=0\end{cases}$

Page:

(e.g.) 参数方程投影.

$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=t \end{cases}$ (螺旋线).

在xOy投影 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=0 \end{cases}$

即: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0. \end{cases}$

同理: 在yOz投影 $\begin{cases} y=\sin t \\ z=t \\ x=0 \end{cases}$

即: $\begin{cases} y=\sin z \\ x=0. \end{cases}$

六. 二次曲面 (三元二次方程确定的曲面).

1. 定义: 一般的三元2次方程都可写成 $x'Ax+v'x+a_{44}=0$

其中 $A=(a_{ij})_{3\times3}$, $a_{ij}=a_{ji}$

$x=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $v=\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$

∴存在正交变换 $x=Py$ 使

$x'Ax=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2$

意味着存在三维几何空间中适当的坐标系使原来的三元二次方程

$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z+a_{44}=0$

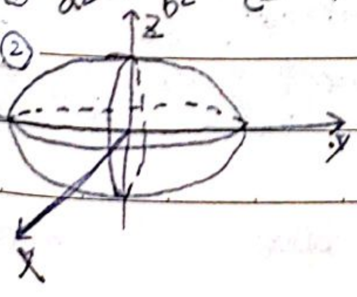
化成:

$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+a'_{14}x'+a'_{24}y'+a'_{34}z'+a'_{44}=0.$

2. 对 λ_i, a'_{ij} 的各种情况讨论,可得9种图形:

(1) 椭球面.

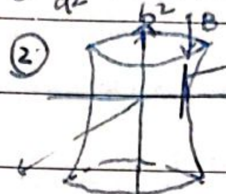
① $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

②


③ 椭球面过O怎么截都是椭圆,而旋转椭球面有一个截面是圆.

(2) 单叶双曲面.

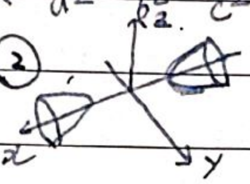
① $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. (两正一负)

②


在边缘处截面得2条相交直线

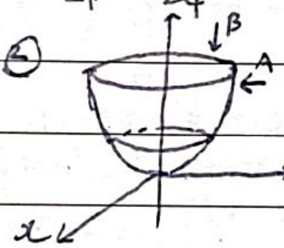
(3) 双叶双曲面.

① $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (一正两负).

②


(4) 椭圆抛物面(过原点)

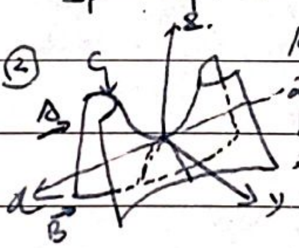
① $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$. (p,q同号).

②


A截为椭圆;
B截为抛物线.

(5) 双曲抛物面(马鞍面).

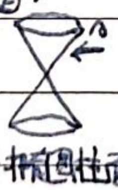
① $\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z$ (p,q同号).

②


A截关于x轴的双曲线
B截关于y轴的双曲线
C截抛物线

(6) 二次锥面.

① $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

②


A截为椭圆.

(7) 椭圆柱面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(8) 双曲柱面. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(9) 抛物柱面. $x^2=2py$; $y^2=2px$.

[判].

1. $f=x^TAx$ 为正定二次型 ⟺ ∃可逆阵P使 $A=P^TP$ (√)
2. A, B均为n阶正定,则 A+B正定 (√).
3. A^TA 正定 ⟺ A列满秩 (√)
4. A是n阶正定阵,则 $|A+2E|>2^n$ (√)
5. f中平方项系数均大于0,则f正定 (×)

⟹逆命题成立

6. 设A为n阶实阵,则: ⟹不一定对称
① 若对任意n维非零列向量x, $x^TAx>0$ 则A正定 (×)
② 若∃可逆阵P,使 $A=P^TP$,则A正定 (√)
③ A的各阶顺序主子式全大于0,则A正定 (×)
7. 二次型f经不同正交变换得到的标准型相同 (√).
(不考虑变量排列顺序).

正交阵 $(A^TA=E) \Rightarrow \lambda=\pm1$　若 $X=CY$，nd $f=\sim$ 化为 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$

设 $P^TAP=\Lambda$ 即可 (Λ 也正交) $\Rightarrow$ 找 C 使 $C^TAC=E$　法 $\begin{bmatrix}A\\E\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}E=C^TAC\\C\end{bmatrix}$

【例】设 A 为实对称可逆阵，$f=X^TAX$ 为实二次型，则 A 为正交阵 $\Leftrightarrow$ 可用正交变换将 f 化为标准形

"$\Rightarrow$"：设 λ_i 为 A 的 n 个特征值

$\because A$ 正交 实对称

$\therefore \exists$ 正交 P，使在 $X=PY$ 下

$f=Y^TP^TAPY=Y^TDY$

$=\lambda_1y_1^2+\cdots\lambda_ny_n^2$ ※

又 $\because A$ 正交 $\therefore D=P^TAP$ 也正交

又 $\because D$ 为对角阵 $\therefore \lambda_i^2=1$

$\therefore \lambda_i=\pm1 \therefore f=Y^TDY$ 为标准形

"$\Leftarrow$"：$\because A$ 为实对称可逆阵，故二次型 f 的秩为 n，设在正交变换 $X=QY$ 下 f 变成规范形，于是：

$f=X^TAX=Y^T(Q^TAQ)Y=Y^TDY$

$=y_1^2+\cdots y_r^2-y_{r+1}^2-\cdots y_n^2$

其中 r 为正惯指，D 为对角阵

显然 D 正交 又 $\because Q^TAQ=D$

$\therefore A=QDQ^T$ 且有 $A^TA=AA^T=E$

$\therefore A$ 为正交矩阵

【难】设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定，$b_1\cdots b_n$ 为非零实数，记 $B=(a_{ij}b_ib_j)_{n\times n}$ 则方阵 B 为正定阵

$\because A$ 是正定阵 $\therefore A$ 为对称阵

即 $a_{ij}=a_{ji}$ $\therefore a_{ij}b_ib_j=a_{ji}b_jb_i$

这说明 B 是对称阵

$B=\begin{bmatrix}a_{11}b_1^2 & a_{12}b_1b_2 & \cdots & a_{1n}b_1b_n\\ a_{21}b_2b_1 & a_{22}b_2^2 & \cdots & a_{2n}b_2b_n\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{n1}b_nb_1 & a_{n2}b_nb_2 & \cdots & a_{nn}b_n^2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}b_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & b_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & b_n\end{bmatrix}$

对任给的 n 维向量 $X=(x_1\cdots x_n)^T\neq0$，因 $b_1\cdots b_n$ 为非零实数，所以 $(b_1x_1,\cdots b_nx_n)^T\neq0$，又因为 A 正定，因此有 X^TBX

$=(b_1x_1,\cdots b_nx_n)[a_{ij}]\begin{bmatrix}b_1x_1\\ \vdots\\ b_nx_n\end{bmatrix}>0$

即，B 正定

法二：计算 $|B_k|=\prod_{i=1}^{k}b_i^2|A_k|>0$

【例】A 为 n 阶实矩阵，λ 为正实数，记 $B=\lambda E+A^TA$，则 B 正定。

首先，易证 $B^T=B$

而 $\forall X\neq0$，有 $(X,X)>0$，

$(AX,AX)\geq0$

$\therefore X^TBX=\lambda(X,X)+(AX,AX)>0$

【基础】设二次型 $f=X^TAX$ 的矩阵

$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 4 & a\\ 2 & a & 4\end{bmatrix}$，$f$ 经正交变换 $X=PY$ 后化为 $f=9y_3^2$，求 P？

解：由 f 标准型知 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=9$

代入 $|0E-A|=|A|=0$ 得 $a=-4$

① 对 $\lambda_1=\lambda_2=0$

解 $AX=0$ 得：$x_1-2x_2+2x_3=0$

$\therefore \varepsilon_1=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$　$\varepsilon_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}$

② 对 $\lambda_3=9$，得 $\varepsilon_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$

单位化得

$P=\frac{1}{3}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$

【基础】配方法化标准型

(1) $f=x_1^2+6x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2+4x_3^2$

$\Rightarrow=(x_1+3x_2-2x_3)^2-4(x_2-\frac{3}{2}x_3)^2+9x_3^2$

$\therefore C=\begin{bmatrix}1 & -3 & -\frac{5}{2}\\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$　$f=y_1^2-4y_2^2+9y_3^2$

(2) $f=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$

$\Rightarrow$ 令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\ x_2=y_1-y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$　$\therefore \begin{cases}y_1=\frac{x_1+x_2}{2}\\ y_2=\frac{x_1-x_2}{2}\\ y_3=x_3\end{cases}$

$f=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2$

$\therefore \begin{cases}z_1=y_1+y_3=\frac{x_1+x_2}{2}+x_3\\ z_2=y_2=\frac{x_1-x_2}{2}\\ z_3=y_3=x_3\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x_1=z_1+z_2-z_3\\ x_2=z_1-z_2-z_3\\ x_3=z_3\end{cases}$　$\therefore C=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$

【例】实对称阵 A 正定，则：

(1) A^{-1} 正定

$\Rightarrow$ 首先 A^{-1} 实对称，其次

A^{-1} 的 λ 为 A 的特征值倒数 故全都大于 0

(2) kA $(k>0)$ 正定

$\Rightarrow$ 看 $X^T(kA)X=kX^TAX>0$ 即可

(3) $A+2E$ 正定

首先实对称，其次

$\forall x\neq0$ 有：

$X^T(2E+A)X$

$=2X^TX+X^TAX>0$

$\therefore 2E+A$ 正定

【例】设 A 实对称，试证当实数 k 充分大时，$A+kE$ 正定

首先，易证 $A+kE$ 实对称

再 $\because P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$

$\therefore P^{-1}(A+\lambda E)P=\begin{bmatrix}\lambda_1+k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+k\end{bmatrix}$

$\therefore$ 当 $k>\max\{|\lambda_1|,\cdots|\lambda_n|\}$ 时，$A+kE$ 的特征值全 >0，故 $A+kE$ 正定

【难】$f(X)=X^TAX=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j$

(1) 写出 $f(X)$ 在正交变换下的一个标准形

$A=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & & \frac{1}{2}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{2} & \cdots & \cdots & 1\end{bmatrix}$

$|\lambda E-A|=(\lambda-\frac{n+1}{2})(\lambda-\frac{1}{2})^{n-1}$

$\therefore$ 经正交变换可化为

$f=\frac{1}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2\cdots-\frac{1}{2}y_{n-1}^2+\frac{n+1}{2}y_n^2$

(2) f 是(是/否)正定：合 λ

(3) $n=2$ 时，求正定阵 B 使 $A=B^2$

对 $\lambda=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ 求 $P=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

$\therefore P^{-1}AP=D=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$

$\therefore B=P\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2}\end{bmatrix}P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\sqrt{6}+\sqrt{2} & \sqrt{6}-\sqrt{2}\\ \sqrt{6}-\sqrt{2} & \sqrt{6}+\sqrt{2}\end{bmatrix}$

母线平行于哪个轴就消去哪个未知量

六.二次曲面一般方程.

1.一般方程:

$f(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z+a_{44}=0.$

可化为: $X'AX+V'X+a_{44}=0.$

其中 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$V=\begin{bmatrix}a_{14}\\a_{24}\\a_{34}\end{bmatrix}$ 作变换 $X=PY$

$\Rightarrow$ 对角阵 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$\therefore f(x)=Y'(P'AP)Y+(V'P)Y+a_{44}$

化为

$=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+a_{14}'x'+a_{24}'y'+a_{34}'z'+a_{44}=0$ *

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为A特征值

$V'P=\begin{bmatrix}a_{14}'\\a_{24}'\\a_{34}'\end{bmatrix}.$

这样:在 R^3 中坐标原点不变.

以A的正交化后特征向量 P_1, P_2, P_3 为基,将方程转化为*

对*配方得:

(eg). $f=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3=1$ 是何种曲面.

求A的 $\lambda=0, 4, 9$

$\therefore X=PY$ 下

$f=0y_1^2+4y_2^2+9y_3^2=1$

$\therefore$ 椭圆柱面.

(eg.) $ay=z$ 是?

$\begin{cases}x=x'+y'\\y=x'-y'\\z=z'\end{cases}$ $\therefore x'^2-y'^2=z'$

马鞍面

法二:

(e.g.) $f=6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+a=0$

图形

$\Rightarrow$ A的 $\lambda=8, 4, -2.$

(eg) 指出其表示图形.

(1) $4x+2y=1.$

平面上面: 直线

空间直角坐标系: 与z轴平行的平面

(2) 指出 $\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}-x=0$ 是由什么曲线什么旋转而来的?

$\because \frac{y^2+z^2}{2}=x$ 是旋转抛物面,是由 $\begin{cases}x=\frac{y^2}{2}\\z=0\end{cases}$ 绕x轴旋转成的.

(3) $z=(y-1)^2+x^2 \Rightarrow$ 旋转抛物面

(4) $x=(y+1)^2+\frac{z^2}{4} \Rightarrow$ 椭圆抛物面

(5) $x^2+4y^2-z^2+9=0 \Rightarrow$ 双叶双曲面.

$\Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9/4}-\frac{z^2}{9}=-1$

(6) $z=xy \Rightarrow$ 马鞍面

(7) $\begin{cases}x^2+4y^2+9z^2=36\\y=1.\end{cases}$

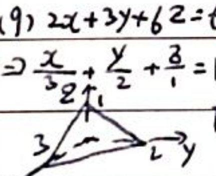
$\Rightarrow$ 表示平面 $y=1$ 上的椭圆 $\frac{x^2}{32}+\frac{z^2}{32/9}=1$

(8) $\begin{cases}\frac{y^2}{2}-z^2=1\\x-2=0.\end{cases}$

$\Rightarrow$ 平面 $x=2$ 上的双曲线 $\frac{y^2}{2}-z^2=1$

(9) $2x+3y+6z=6$ 与 $x=0, y=0, z=0$ 围成

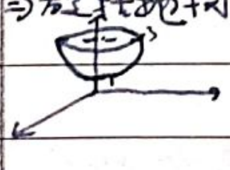
$\Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$ (截距式).



四面体.

(10) $x^2+y^2-z+1=0$, $z=3$ 围成.

$\Rightarrow$ 旋转抛物面部分



[例] 求母线平行于x轴,且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2-y^2+z^2=0.\end{cases}$ 的柱面方程.

$\Rightarrow$ 消去x即可: $3y^2-z^2=16$

[例] 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ $(0\le z\le 4)$ 在三个坐标面上的投影

① xoy面.

$\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\z=0.\end{cases}$

② yoz面

$\begin{cases}y^2\le z\le 4\\x=0.\end{cases}$

③ xoz面

$\begin{cases}x^2\le z\le 4\\y=0.\end{cases}$

[例] 求直线 $L: \frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 绕z轴旋转所生成的旋转曲面方程.

设 (X,Y,Z) 由 (x,y,z) 旋转得到

$\therefore Z=z$, $x^2+y^2=X^2+Y^2$

而 $L: \begin{cases}x=1 & ①\\y=z & ②\end{cases}$ ①+②得: $x^2+y^2-z^2=1$

$\therefore X^2+Y^2-Z^2=1.$

[例] 求以 $(0,0,0)$ 为顶点,通过 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\y=b\end{cases}$ 为准线的锥面方程.

设 $M_1(x,y,z)$ 是准线上任意点, $M(x,y,z)$ 是联结 OM_1 直线上锥面的任意点, $OM//OM_1$

显然有: $\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}$ 且 $y=b$

即: $\begin{cases}x=Xt\\y=Yt\\z=Zt\end{cases}$ $(-\infty<t<+\infty)$ 代入准线得

$\begin{cases}\frac{X^2}{a^2}t^2+\frac{Z^2}{c^2}t^2=1\\Y=\frac{b}{t}\end{cases}$ 联立消t得:

$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0.$ 为所求.

[例] $\begin{cases}z^2=x^2+y^2\\z^2=2y\end{cases}$ 在yoz投影.

$\Rightarrow \begin{cases}z^2=2y\\x=0.\end{cases}$

[例] $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\y^2+z^2=a^2\end{cases}$ $(a>0)$ 在xoy, xoz上投影

(1) xoy: $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\z=0\end{cases}$

(2) xoz: $\begin{cases}x^2=z^2\\y=0\end{cases}$ $(|x|\le a)$.

与正定阵合同的矩阵也正定.

[例] 用正交变换和坐标平移将下面的二次曲面方程化为标准方程

$f=x_1^2+x_2^2-2x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3+6x_1+6x_2+6x_3-\frac{15}{2}=0$

$\Rightarrow$ 记 f 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&4&-2\\4&1&-2\\-2&-2&-2\end{bmatrix}$

$\therefore \lambda_1=6,\ \lambda_2=\lambda_3=-3$

$\therefore \exists P$ 使 $P^TAP=\begin{bmatrix}6&&\\&-3&\\&&-3\end{bmatrix}$

$P=(P_1,P_2,P_3)=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{\sqrt2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{\sqrt2}{3}\\\frac{1}{3}&0&\frac{4}{3\sqrt2}\end{bmatrix}$

$\therefore$ 在 $X=PY$ 下，化为：

$6(y_1-\frac{1}{2})^2-3y_2^2-3(y_3-\sqrt2)^2=3$

$\therefore$ 作平移变换

$\begin{cases}z_1=y_1-\frac{1}{2}\\z_2=y_2\\z_3=y_3-\sqrt2\end{cases}$ 则化为

$\frac{z_1^2}{(\frac{1}{\sqrt2})^2}-\frac{z_2^2}{1}-\frac{z_3^2}{1}=1$

为双叶双曲面.

[例3] 求出二次型 $f=(-2x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-2x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-2x_3)^2$ 的标准形及相应的可逆线性变换.

展开整理得 $f=6(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)$

$=6(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{9}{2}(x_2-x_3)^2$

令 $\begin{cases}y_1=x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\y_2=x_2-x_3\\y_3=x_3\end{cases}$

$\therefore X=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}Y$ 下

$f=6y_1^2+\frac{9}{2}y_2^2$

[例3] 二次型 $f=(x_1+x_2)^2+(2x_1+3x_2+x_3)^2-5(x_2+x_3)^2$ 的规范形是 B

A. $y_1^2+y_2^2-5y_3^2$

B. $y_2^2-y_3^2$

C. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

$\Rightarrow f=5x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+14x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$

$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda+6)(\lambda-12)$

[例] 求一可逆线性变换 $X=PY$ 使：

$f=2x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-10x_2x_3$

化成 $g=2y_1^2+3y_2^2+6y_3^2-4y_1y_2-4y_1y_3+8y_2y_3$.

在 $X=C_1Z$ 下，$f=2z_1^2+z_2^2$

在 $Y=C_2Z$ 下，$g=2z_1^2+z_2^2$

$\therefore X=C_1Z=C_1C_2^{-1}Y$

$\therefore P=C_1C_2^{-1}=$

$\begin{bmatrix}1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3&-6\\0&0&3\\0&0&1\end{bmatrix}$

[例] 设 A、B 为 n 阶实正定阵，证明：$\exists$ 可逆阵 P 使 $P^TAP=E$ 且 $P^TBP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n>0$ 为 $|\lambda A-B|=0$ 的 n 个实根.

$\Rightarrow \because A$ 正定 $\therefore \exists$ 可逆 P_1 使 $P_1^TAP_1=E$

而 B 也正定 $\therefore \exists$ 可逆 P_2 使 $B=P_2^TP_2$

于是：$P_1^TBP_1=(P_2P_1)^T(P_2P_1)$

故 $P_1^TBP_1$ 正定，不妨设它的特征值为 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n>0$.

则 $|\lambda E-P_1^TBP_1|=|\lambda P_1^TAP_1-P_1^TBP_1|$

$=|\lambda A-B|$

$\therefore \lambda_1\cdots\lambda_n$ 为 $|\lambda A-B|=0$ 的 n 个实根

因 $P_1^TBP_1$ 正定 $\therefore \exists$ 正交 Q 使

$Q^T(P_1^TBP_1)Q=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

令 $P=P_1Q$ 则：$P^TAP=E$

$P^TBP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$.

[例3] $A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 非零实阵，二次型 $f=\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n)^2$ 正定

$\Leftrightarrow R(A)=n$.

证：$f=\sum_{i=1}^{m}(x_1\cdots x_n)\begin{bmatrix}a_{i1}\\\vdots\\a_{in}\end{bmatrix}(a_{i1}\cdots a_{in})\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$

$=X^T(A^TA)X$.

令 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_m\end{bmatrix}$ $A^T=(\alpha_1^T\cdots\alpha_m^T)$

$\therefore f=x^T(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^T\alpha_i)x$

法二：考虑 $AX=0$ $\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots a_{1n}x_n=0\\\vdots\\a_{m1}x_1+\cdots a_{mn}x_n=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall X\neq0,\ f(x)\neq0$.

$\Leftrightarrow \forall X\neq0,\ AX\neq0$

$\Leftrightarrow AX=0$ 仅有零解

[例3] $f=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots(x_n+a_nx_1)^2$ 正定，求 $a_1\cdots a_n$ 条件

$\Leftrightarrow$ 对 $\begin{cases}x_1+a_1x_2=0\\\vdots\\x_n+a_nx_1=0\end{cases}$ 只有零解

$\therefore \begin{vmatrix}1&a_1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&a_{n-1}\\a_n&&&1\end{vmatrix}\neq0$

$\therefore 1+(-1)^{n+1}a_1\cdots a_n\neq0$

哈工大网盘计划简介

1.项目初衷

鉴于（1）哈工大各类 QQ 群内学习资料多且繁杂，而文件文字太多会导致文件被 tx 屏蔽或者降低 QQ 群信用星级；（2）校内诚信复印和纸张记忆垄断；（3）很多营销号在卖资料且售价很高；（4）学长学姐的自编材料很好，还想分享给下一届；等问题，网盘计划应运而生！哈尔滨工业大学网盘计划**旨在将窝工的各类学习资料进行归类整理，并且以网盘的形式发出来**，历时一年，现已小成，扫描了上百份校内复印店试题文档，归类整理了近 40 个 G 的学习资料给大家，已经花费上千元，现入不敷出，如果您希望网盘计划继续运营下去的话，可通过以下方式进行捐赠。

QQ支付

推荐使用微信支付

2.网盘计划成就（密码 1920）

哈工大网盘计划

密码1920

微信公众号二维码

群名称:哈工大网盘计划（预）

群　号:953062322

腾讯自动屏蔽以上链接，请用浏览器扫一扫

$R(A)=R(A^TA)=R(AA^T)=R(A^T)$. A的n个值不同，则A可相似对角化. $\forall x$有$x^TAx=0$ 则A反对称.

A对称阵 ⇒ $R(A)$ = 非零特征值个数 $[A\sim\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}]$ 旋转曲面 切线//Z轴：消去Z

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 余子式

$M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$

期末复习.

一.第一章:n阶行列式.

1.自然排列 1…n是逆序数为0的偶排列.

2.在n个不同元素的排列中,奇偶排列各占一半. ($n!/2$)

3.n阶行列式共有n!项.

4. $\begin{vmatrix} & & & a_n \\ & * & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & 0 \\ a_1 & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1\cdots a_n$

判断:一个n阶行列式中如果等于0的元素比n^2-n还多,那么这个行列式必为0. (√)

5.行列式的任一行(列)元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为0.

$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}$

二.矩阵.

1. $kA=0 \Leftrightarrow k=0$或$A=0$

2.任何方阵都可以写成一个对称阵与一个反对称阵的和

$A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$

3. $A^3=0$

$\Rightarrow (E-A)(E+A+A^2)=E$

$(E+A)(E-A+A^2)=E$.

4. $|kA|=k^n|A|$

5.若A为奇数阶反对称阵,则$|A|=0$

$\Rightarrow |A|=|A^T|=|-A|=(-1)^n|A|$

6. $a_{ij}=A_{ij} \Leftrightarrow A^T=A^*$

7. $(A|E)$ 行变换 $(E|A^{-1})$. $|A|\neq 0$时

8. A.B中只要有一个不可逆, AB就不可逆.

A^*可逆 ⇔ A可逆

9. $A^k=0$

$\Rightarrow (E-A)(E+A+\cdots A^{k-1})=E$

10.对角线有0的矩阵必不可逆.

11. $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

12. $|A|=0 \Rightarrow$ A中必有一行是其余各行的线性组合.

13. $\begin{vmatrix}A & B \\ B & A\end{vmatrix}=|A+B||A-B|$

(A. B均为n阶方阵).

14.设A.D为方阵.若A可逆,则:

$\begin{vmatrix}A & B \\ C & D\end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|$

15.分块转置

$A=\begin{bmatrix}A_1 & & \\ & A_2 & * \\ & & \ddots \\ & & & A_k\end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}A_1^T & & \\ * & A_2^T & \\ & & \ddots \\ & & & A_k^T\end{bmatrix}$

16.有关A^*

$|A^*|=|A|^{n-1}$

$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

$(kA)^*=k^{n-1}A^*$

$(AB)^*=B^*A^*$

17. $\begin{cases}PQ可逆 \\ P可逆\end{cases} \Leftrightarrow Q可逆$

18.分块阵

$(A_1\cdots A_n)^T=\begin{bmatrix}A_1^T \\ \vdots \\ A_n^T\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_n^{-1}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} & & A_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ A_n & & \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} & & A_n^{-1} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ A_1^{-1} & & \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix}0 & A_m \\ B_n & 0\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$

$\begin{vmatrix}A_{m\times p} \\ B_{n\times p}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}B_{n\times p} \\ A_{m\times p}\end{vmatrix}$

19. R.

(1) $R(A|B)\leq R(A)+R(B)$

$R(A\pm B)\leq R(A)+R(B)$

(2) $R(A)+R(B)-n\leq R(AB)\leq \min\{R(A),R(B)\}$

20.降阶公式.

(1) $|E_m+kAB|=|E_n+kBA|$

(2) $|\lambda E_m-AB|=\lambda^{m-n}|E_n-BA|$

21.

$R(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n \\ 1, & R(A)=n-1 \\ 0, & R(A)<n-1.\end{cases}$

22. $\begin{cases}tr(A\pm B)=tr(A)\pm tr(B) \\ tr(kA)=k\,(tr A) \\ tr(AB)=tr(BA) \\ AB-BA\neq E_n\end{cases}$

$\begin{bmatrix}A & C \\ 0 & B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1}\end{bmatrix}$

23. A.B中只要有一个不可逆,则AB不可逆.

24.若A是二阶方阵,则$R(A)=R(A^*)$.

25. $(A+E)^m=0\ (m\geq 1) \Rightarrow$ A可逆 (证明了)

三.几何向量.

1.外积:

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$.

(方向: $\vec{a}$. $\vec{b}$. $\vec{a}\times\vec{b}$ 构成右手系).

(1)意义:

$|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以$\vec{a}$.$\vec{b}$为邻边的平行四边形面积.

$\vec{a}\times\vec{b}$与$\vec{b}\times\vec{a}$模相等,方向相反

(2)法则:

① $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}//\vec{b}$

② $\vec{a}\times\vec{a}=0$.

③ $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

④ $\vec{a}\times\vec{b}$与$k\vec{a}+l\vec{b}$ ⊥.

2.混合积

(1) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0 \Leftrightarrow$ 三向量共面

(2) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$表示以a.b.c为边的平行六面体V.

四面体 三角锥 $=\frac{1}{6}[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$.

(3) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}a_y & a_z \\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z \\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y \\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}$.

3.线与线关系

(1)重合 (2)平行

(3)交于一点 ⇔ $[\vec{s_1},\vec{s_2},\overrightarrow{M_1M_2}]=0$. 且$\vec{s_1}$,$\vec{s_2}$不平行.

(4)异面 ⇔ $[\vec{s_1},\vec{s_2},\overrightarrow{M_1M_2}]\neq 0$

4.直线与平面.平面与平面的夹角均为$[0,\frac{\pi}{2}]$

5.求L: $\begin{cases}\pi_1=0 \\ \pi_2=0\end{cases}$ 在π上投影直线L'?

设L': $\lambda\pi_1+\mu\pi_2=0$.

令其与π垂直得平面π_3

∴ L': $\begin{cases}\pi_3 \\ \pi\end{cases}$.

6.求L_1: $\begin{cases}\pi_1 \\ \pi_2\end{cases}$ 与L_2距离

令L_2与$\lambda\pi_1+\mu\pi_2=0$ //,求出入得平面,求L_2到平面距离.

Cramer法则: 系数行列式≠0,必有唯一零解
有非零解,则系数行列式=0.

$\begin{vmatrix}C & B_n \\ A_m & 0\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$. Page: Date:

左×列满秩;右×行满秩.

AB是对称阵 ⇔ AB=BA

数量阵=kE

$\begin{bmatrix}A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4\end{bmatrix}$

向量组或线性相关或无关,二者必居且仅居其一

$e_i^T A e_j = a_{ij}$. $|A|<0$ 且 $A^TA=E$，则 $|A+E|=0$. 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ λ 几何 = 代数 $n-R$

A^TA 正定 $\Leftrightarrow$ A 列满秩. 合同为等价 若 n 阶方阵 A 的行向量组线性相关，则 0 是 A 的一个 λ

四. n 维向量

1. 向量个数 > 向量维数 ⟹ 相关

2. 行变换 { R 不变；极大无关组位置不变；表示系数不变

3. 向量空间：非空集合（对 +、数乘封闭）

4. 若 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 为规范正交基，则：$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ 1, & i=j \end{cases}$

⟹ 求 α 在规范正交基 $(\alpha_1 \cdots \alpha_r)$ 下坐标

设 $\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r$

则 $k_i = (\alpha, \alpha_i)$.

5. 施密特正交化：

$\beta_1 = \alpha_1$

$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

6. 正交阵.

(1) A 正交，则 A^T、A^{-1}、A^* 正交

(2) $|AX| = |X|$

$(AX, AY) = (X, Y)$

(3) A、B 均正交，则 AB 正交.

(4) $A = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ 正交阵，则 ⟺ $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 是 A 的规范正交基.

7. 设向量 α 在正交基 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 下的坐标为 $(x_1 \cdots x_n)^T$，则

$x_i = \frac{(\alpha,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$

8. 注.

① 可逆 × 可逆 = 可逆.

② 正定 + 正定 = 正定

— " — " × " 均不一定.

③ 正交 × 正交 = 正交.

④ 对称 × 对称 ≠ 对称

9. n 何向量 r 与 Ox、Oy、Oz 轴的夹角依次为 α、β、γ，则

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$.

10. $r(A+B) \le r(A|B) \le r(A) + r(B)$

五. 线性方程组.

1. 下列说法等价

{ 方程组有解.

β 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 表示

$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 与 $\beta_1 \cdots \beta_n$、α_n 等价

$R(A) = R(A|\beta)$.

2. $AX=0$ 都是 $BX=0$ 的解，则 $R(A) \ge R(B)$

3. $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解 ⟺ $R(A)=R(B)$

且 $AX=0$ 的解是 $BX=0$ 的解.

⟺ $R(A)=R(B)=R\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$

4. 若 η_1、η_2 都是 $AX=\beta$ $(\beta\neq 0)$ 的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是 $AX=0$ 的解.

5. 对于 $\underset{m\times n}{A}X=\beta$.

① $R(A|\beta) \neq R(A)$：无解

② $R(A|\beta) = R(A) = n$ ⟺ 唯一解

③ $R(A|\beta) = R(A) < n$ ⟺ 无穷解

6. $\eta_1 \cdots \eta_r$ 是 $AX=\beta$ 的解.

(1) 若 $k_1 + \cdots k_r = 0$，则 $k_1\eta_1 + \cdots k_r\eta_r$ 是 $AX=0$ 的解.

(2) 若 $k_1 + \cdots k_r = 1$，则 $k_1\eta_1 + \cdots k_r\eta_r$ 是 $AX=\beta$ 的解

7. $\{x \mid AX=\beta\}$ 的秩为 $n-R(A)+1$.

8. β 可由 α_1、α_2、α_3 线性表示.

⟹ $AX=\beta$ 有解.

$A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

9. 求两条直线公垂线：

⟹ 用参数方程设出两个垂足.

再让这两个垂足所形成的向量与 s_1、s_2 ⊥ 即可

10. A 为 n 阶方阵，则 $A^T=A$ ⟺ ∃ n 阶方阵 B 使 $A=B+B^T$.

11. $(A-E)(A+E) = (A+E)(A-E)$

12. $AB=0$，则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$

13. $AB=E$，A 不一定可逆.

⟹ A 不一定是方阵

14. n 阶矩阵等价的充分必要条件是秩相等

15. A、B 合同，则 $|A|$、$|B|$ 同号且 $R(A)=R(B)$.

16. 下列矩阵中，不能相似对角化的矩阵是：__ ⟹ 先排除实对称阵

六.

1. λ 性质

(1) 和为迹，积为值.

(2) 0 不是 A 特征值 ⟺ A 可逆

0 是 A 特征值 ⟺ A 不可逆

2. 相似阵、特征向量、实对称阵

(1) 特征值不同的向量线性无关.

(2) A_n 可相似对角化 ⟺ A_n 有 n 个线性无关的特征向量

(3) 实对称正交阵 λ 为 1 或 -1

(4) A 可相似对角化 ⟺ A 每一个特征值代数重数均等于几何重数.

3. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 λ_1、λ_2、λ_3，对应的特征值分别为 ξ_1、ξ_2、ξ_3，又 $\beta = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3$，求 $A^n\beta$.

⟹ $A^n\beta = A^n(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= (\lambda_1^n\xi_1, \lambda_2^n\xi_2, \lambda_3^n\xi_3)\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= (2\lambda_1^n\xi_1, -2\lambda_2^n\xi_2, \lambda_3^n\xi_3)$.

4. 有关幂等阵 $(A^2=A)$.

① A 特征值只能是 0 或 1

② A 可相似对角化.

证 $R(A) + R(E-A) = n$

考虑 $\begin{cases} AX = 0 \\ (E-A)X = 0 \end{cases}$

∴ $\lambda=0$ 时，$n-R(A)$ 个特征向量

$\lambda=1$ 时，$n-R(E-A)$ 个特征向量

∴ A 有 n 个线性无关的特征向量，

∴ A 可对角化

③ $R(A) = tr(A)$. ⟹ $\lambda = 1$ 或 0

∃ 可逆 T 使 $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$

∴ $R(A) = r = tr(T^{-1}AT) = tr(A)$

④ $(A+E)^k = E + (2^k-1)A$.

左 $= E^k + kE^{k-1}A + \cdots A^k$

$= E - A + A + kA + \frac{k(k-1)}{2}A + \cdots kA + A$

$= E - A + 2^kA$

B^TB 半正定. 设 $\exists X\neq0$ 使 $B^TBX=\lambda X$ $\therefore X^TB^TBX=\lambda X^TX$ $\therefore \lambda=\frac{|BX|^2}{|X|^2}\geq0$.

$tr(\beta^T\alpha)=tr(\alpha\beta^T)$

$AX=\beta$ 有3个无关解向量: $n-R(A)+1=3$. $A^2=E\Rightarrow(A^{-1})^2=E$.

正定必可逆. λ 均相同不一定相似.

八. 二次型

1. A 与 B 合同, C 与 D 合同, 则 $\begin{bmatrix}A&0\\0&C\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}B&0\\0&D\end{bmatrix}$ 合同.

$\Rightarrow P^TAP=B$

$Q^TCQ=D$

$\therefore$ 令 $T=\begin{pmatrix}P&0\\0&Q\end{pmatrix}$ 则

$T^T\begin{pmatrix}A&0\\0&C\end{pmatrix}T=\begin{bmatrix}P^TAP&0\\0&Q^TCQ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B&0\\0&D\end{bmatrix}$

2. 合同判断.

(1) ~~A.B 均为实对称, 看正负惯指~~

(2) A.B 一个实对称, 另一个不是, 则不合同

(3) ~~都不是, 不一定~~

3. ~~$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 到 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 的过渡矩阵:~~

~~$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$~~

4. 设 $A_{m\times n}$, 且 $R(A)=n$, 证明: A^TA 正定.

~~$\Rightarrow$ 先证是对称~~

$\forall X\neq0$ 有 $X^TA^TAX=(AX)^TAX$

$\because R(A)=n$ $\therefore AX=0$ 只有零解

$\therefore AX\neq0$

$\therefore X^TA^TAX>0$.

5. $R[(A^TA)^k]=R(A)$

~~$\because R(A^TA)=R(A)$~~

令 $B=A^TA$ $\therefore R(B^TB)=R(B)$

即: $R((A^TA)^2)=R(A^TA)=R(A)$

~~依此类推, 对k命题成立~~

6. A.B.C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB=C$, 且 B 可逆, 则 ~~C 的行向量组与 A 的列向量组等价~~

7. 正定充要条件.

① $a_{ii}>0$ ② $|A|>0$.

8. $\begin{vmatrix}E_m&A\\B&E_n\end{vmatrix}=|E_m-AB||E_n-BA|$

9. $R(A)=n-1$, A 各行元素均为 0, 求 $AX=0$ 解.

$X=k(1,1\cdots1)$, $k\neq0$.

10. ~~A_n 的行向量组线性相关则~~ 0 是 A 的一个特征值.

11. $AB\sim BA\Leftrightarrow |A|\neq0$.

【填选】

~~(1). 设 A.B 都是 n 阶方阵, 满足对任意 n 维列向量 X, 都有 $X'AX=X'BX$, 则~~ D

对角线元素相同

A. 若 $R(A)=R(B)$, 则 $A=B$.

B. 若 $A'=A$, 则 $B'=B$

C. 若 $B'=B$, 则 $A=B$

D. 若 $A'=A$, $B'=B$, 则 $A=B$

$\hookrightarrow$ 证D: $X^T(A-B)X=0$

则 $(A-B)^T=-(A-B)$

$\therefore A^T-A=B^T-B$.

~~☆ 二次型矩阵与成对称阵时唯一~~

☆ 对 $\forall X\in R^n$ 有 $X^TAX=0$, 则 A 为反对称阵.

~~(2) 若 A 经初等行变化成 B, 则~~ $A^{-1}=B^{-1}$. (×).

$PA=B\Rightarrow A^{-1}P^{-1}=B$.

若 A 经行的初等变化成 B, 则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解 (√).

若 A 经列初等变换成 B, 则 A ~~的列向量组与 B 的列向量组~~ 等价 (√).

(3) 二次型 $f=X'AX$ 经 $X=PY$ 正交变换 变为 $f=y_2^2+2y_3^2$, $A=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{bmatrix}$, 求 P:

$\Rightarrow f=X'AX=Y'BY$, $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

$\therefore A\sim B$

$\therefore |\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

~~$\lambda^3-3\lambda^2+(2-a^2-b^2)\lambda+(a-b)^2=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda$~~

比较系数得 $a=0$, $b=0$.

~~☆ 特征值不同的向量线性无关~~

☆ 实对称阵对应于不同 λ 的实特征向量为正交.

~~将 A 正交对角化得~~ $P=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\\0&1&0\\-\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$

(4) A 为 n 阶矩阵, $|A|=a$, $\begin{vmatrix}A&\beta\\\beta^T&b\end{vmatrix}=0$, 求 $\begin{vmatrix}A&\beta\\\beta^T&c\end{vmatrix}$?

$=\begin{vmatrix}A&\beta\\\beta^T&b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A&\beta\\0&c-b\end{vmatrix}$

$=|A|(c-b)=a(c-b)$

(5) A, B 均为 n 阶方阵, $|A^{-1}B|=a$, $|A^{-1}B^{-1}|=b$, $b\neq0$, 则 $|AB|=-\frac{a}{b}$

【填选】

(1) 若 4 阶行列式 D 的某一行的所有元素与其余子式都相等, 则 $|D|=0$.

(2) ~~在一个 n 阶行列式中, 如果等于零的元素多于 n^2-n 个, 那么这个行列式 D=0.~~

~~(3) 若 n 阶方阵 A.B 满足 $AB=B$, $A+AB=E$~~ $|A-E|\neq0$, 则 $B=0$ (√)

$\Rightarrow (A-E)B=0$.

~~(4) 若 A.B 都是 n 阶方阵, $|A|=1$, $|B|=-3$, 则~~ $|3A^{-1}B^{-1}|=-3^{n-1}$

(5) $|A_m|=a$, $|B_n|=b$, 则 $\begin{vmatrix}0&A\\B&C\end{vmatrix}=(-1)^{mn}ab$.

~~(6) 矩阵 $A_{m\times n}$ 满足 $m<n$, $|AA'|\neq0$, 则 $AX=0$ 的基础解系一定由 $n-m$ 个线性无关的解向量构成.~~

$R(A)=R(AA^T)=m$.

~~(7) 已知 2 是 A 的一个特征值,~~ 则 $|A^2+A-6E|=0$.

$\Rightarrow$ 等于 $|A+3E||A-2E|$

(8) 设 $\alpha.\beta$ 是 n 维列向量, $\beta'\alpha=0$, 则 $\alpha\beta'=0$ 的特征值为 0 (n重)

$\Rightarrow|\lambda E-\alpha\beta'|=\lambda^{n-1}|\lambda E|=\lambda^n$

(9) 设 $P=(X,AX,A^2X)$, $R(P_3)=3$, 且 $A^3X=3AX-2A^2X$, 求 $P^{-1}AP$.

$\because AP=P\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$

(10) ~~设非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的系数行列式为零, 则~~ B

A. 方程组有无穷多解

~~B. 若方程组有解, 则有无穷多解~~

~~(11). A.B 是 2 个 n 阶实对称阵, 则 A 与 B 相似的充要条件是 A 与 B 的特征多项式相等.~~

(12) 设 A 为 n 阶矩阵, 则 A^*A 中位于 (i,j) 的元素为 B

A. $\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{ki}$ B. $\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{ki}$

C. $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}$ D. $\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}$

证明——无关 设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$，证k即可.

若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的向量空间维数为2 $\Leftrightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$

A为n阶阵，A^nX 与 $A^{n+1}X$ 同解.

$|A^{-1}+B|=\frac{|B|}{|A|}|A+B^{-1}|$

$\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix}O&|A|B^*\\|B|A^*&O\end{bmatrix}$

[例] 设数列 $a_0=0,a_1=1,a_2=1,\cdots$ 斐波那契，求 a_{1000}？

⟹ 由 $\begin{bmatrix}a_n\\a_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{n-1}\\a_{n-2}\end{bmatrix}$

⟹ $\begin{bmatrix}a_{1000}\\a_{999}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}}_{A}^{999}\begin{bmatrix}a_1\\a_0\end{bmatrix}$

$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2}&0\\0&\frac{1-\sqrt5}{2}\end{bmatrix}$，$T=\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt5}{2}&\frac{1-\sqrt5}{2}\\1&1\end{bmatrix}$

∴ $A^{999}=T^{-1}[\quad]T=\sim$

∴ $a_{1000}=\frac{\sqrt5}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{1000}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{1000}\right]$

[例] 设A为2阶方阵，证明：若存在大于等于2的自然数m使 $A^m=0$，则 $A^2=0$.

∵ $|A|^m=|A^m|=0$.

∴ $R(A)=0$ 或 1，0时显然成立，$R(A)=1$ 时，∃可逆P,Q使

$A=P\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}Q$

令 $U=P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$V'=(1,0)Q$

∴ $A=UV'$，令 $V'U=k$

∴ $\begin{cases}A^m=k^{m-1}A=0\\A^2=kA\end{cases}$ ∴ $k=0$ ∴ $A^2=0$

[例] A、B为n阶正定阵，证明AB的特征值全>0.

⟹ ∃可逆P、Q 使 $A=P^TP$，$B=Q^TQ$

∴ $Q(AB)Q=(PQ^T,PQ^T)$

∴ $Q^{-1}(AB)Q=(PQ')'(PQ')$ 正定

∴ AB正定，λ全大于零.

[例] 设A为n阶方阵，试证：

(1) 若 $A^{k+1}\alpha=0$ 且 $A^k\alpha\neq0$，则 $A^k\alpha,A^{k-1}\alpha,\cdots,A\alpha,\alpha$ 无关.

~~⟹ 设∃ $l_0\cdots l_{k+1}$ 不全为0，使 $=0$~~

~~$l_0\alpha+\cdots+l_{k+1}A^k\alpha=0$~~

~~∴ $l_1A\alpha+\cdots+l_kA^k\alpha=0$~~ P163

~~∴ $l_0\cdots A^k\alpha$ 相关~~

(2) $A^{n+1}X=0$ 的解一定是 $A^nX=0$ 的解.

(3) $R(A^{n+1})=R(A^n)$.

[例] 设 $A=\begin{bmatrix}1&a\\1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，若∃矩阵C使 $AC-CA=B$，则 $a=$ _-1_. 列方程.

[例] 设 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$ 是n阶方阵A的分别属于不同特征值的特征向量，$\alpha=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n$，试证：$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$ 线性无关.

⟹ $A^{n-1}\alpha=\lambda_1^{n-1}\varepsilon_1+\cdots+\lambda_n^{n-1}\varepsilon_n$

设 $k_0\alpha+k_1A\alpha+\cdots+k_{n-1}A^{n-1}\alpha=0$

即：$\sim\varepsilon_1+\sim\varepsilon_2+\cdots\varepsilon_n=0$

∴ $\begin{cases}k_0+k_1\lambda_1+\cdots+k_{n-1}\lambda_1^{n-1}=0\\k_0+k_1\lambda_2+\cdots+k_{n-1}\lambda_2^{n-1}=0\\\vdots\\k_0+k_1\lambda_n+\cdots+k_{n-1}\lambda_n^{n-1}=0\end{cases}$

即：$\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{n-1}\\\vdots&&&\\1&\lambda_n&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_0\\\vdots\\k_{n-1}\end{bmatrix}=0$

又由于 $\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\\vdots&&&\\1&\lambda_n&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(\lambda_i-\lambda_j)\neq0$

∴ $k_0=k_1=\cdots=k_{n-1}=0$

即 ～ 无关.

[例] 若任意n维列向量都是 A_n 的特征向量，证明A为数量阵.

先证A的特征值均相等

设 $AX=\lambda_1X$，$AY=\lambda_2Y$

∴ $A(X+Y)=\lambda_3(X+Y)$

∴ $k=\lambda_1=\lambda_2$

而 $Ae_j=\lambda e_j$ ∴ $AE=\lambda E$

∴ $A=\lambda E$

[例] 设A为n阶方阵，β为n维列向量，$B=\begin{pmatrix}A&\beta\\\beta'&0\end{pmatrix}$，若 $R(A)=R(B)$，则 $AX=\beta$ 有解

⟹ 由于 $\begin{cases}R(A\ \beta)\le R(B)=R(A)\\R(A)\le R(A\ \beta)\end{cases}$

所以 $R(A\ \beta)=R(A)$ 即：

$AX=\beta$ 有解

[例] 设A为n阶方阵，且 $R(A)=r$，证明：存在两个列满秩的n×r矩阵F、H使 $A=FH^T$.

⟹ $A=P\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix}E_r\\0\end{bmatrix}[E_r\ 0]Q$

[例] 设 α_i $(i=1\cdots r<n)$ 为n维列向量 $=(a_{i1}\cdots a_{in})'$，α_i 是r个线性无关的n维实向量，$\beta=(b_1\cdots b_n)'$ 是线性方程组

$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+\cdots a_{2n}x_n=0\\\vdots\\a_{r1}x_1+\cdots a_{rn}x_n=0\end{cases}$

的某非零解向量，试证：$\alpha_1\cdots\alpha_r,\beta$ 无关

⟹ 设 $\beta=k_1\alpha_1+\cdots k_r\alpha_r$

∴ $(\beta,\alpha_i)=0$

∴ $(\beta,\beta)=0$ ∴ $\beta=0$，矛盾

∴ β不可由 $\alpha_1\cdots\alpha_r$ 表示

∴ 无关.

[例] 设A、B是2个n阶正定阵，若A的特征向量都是B的特征向量，则AB正定.

⟹ $p_1\cdots p_n$ 为A的n个标准正交的特征向量.

设 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$

$P^{-1}BP=\begin{bmatrix}k_1&&\\&\ddots&\\&&k_n\end{bmatrix}$

∴ $P^{-1}ABP=\begin{bmatrix}\lambda_1k_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_nk_n\end{bmatrix}$

∴ AB合同于 $\begin{bmatrix}\lambda_1k_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_nk_n\end{bmatrix}$ 正定阵

∴ AB正定

[例] 设 $A_{m\times n}$，$R(A)=r$，证明A可表示为r个秩为1的矩阵之和.

⟹ 存在可逆P、Q使

$PAQ=\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}$

令 $B_i=(b_{ii}=1$，其他为0)

∴ $r(B_i)=1$

且 $A=P^{-1}(B_1+\cdots B_r)Q^{-1}$

$=P^{-1}B_1Q^{-1}+\cdots P^{-1}B_rQ^{-1}$

其中 $r(P^{-1}B_iQ^{-1})=1$

$Ax=\beta$ 有3个线性无关的解，则 $Ax=0$ 至少有2个无关的解

二次型 f 的秩为1，A 各行元素和为3，则 ⇒ $\lambda=3,0,0$.

$x^T(A^TA)x$ 秩为2 ⇒ A 秩为2

可逆+可逆 不一定可逆.

[例] 设向量组 I：$\alpha_1\cdots\alpha_r$ 可由向量组 II：$\beta_1\cdots\beta_s$ 线性表示，则下列正确的是 $\underline{A}$

A. 当 $r>s$ 时，向量组 I 相关

B. 当 $r<s$ 时，向量组 I 相关

C. $r>s$ 时，II 相关

D. $r<s$ 时，II 相关

[例] 设3阶矩阵 A. $A-E$. $A+2E$ 均不可逆，求 $|3A-E|$？ 14.

令 $A=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}$ 即可

[例] 设有三个平面

$$\begin{cases}\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ \pi_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ \pi_3: a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$$

如果 $R\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\end{bmatrix}$

$=2$，则三个平面 $\underline{B}$

A. 相交于一点 B. 相交于一条直线

C. 重合 D. 无公共面.

∵ $R<n$ 有无数组解.

[例] 设向量组(I)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且可由向量组(II)：$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 表示，求证.

(1) (II) 线性无关

$4=R(\alpha_1\cdots\alpha_4)\le R(\beta_1\cdots\beta_4)\le 4$

∴ $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 无关

(2) 二者等价

⇒ ∃ $K_{4\times4}$ 使

$(\alpha_1,\cdots\alpha_4)=(\beta_1\cdots\beta_4)K$

由(I).(II)都无关知：K 可逆

∴ $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1\cdots\alpha_4)K^{-1}$

∴ (I).(II)等价

[例] $|A_n|=1$，α 为 n 维非零实列向量，求 $R\begin{bmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&\alpha^T(A^*+E_n)\alpha\end{bmatrix}$？

$R: R\begin{bmatrix}A&\alpha\\0&\alpha^T\alpha\end{bmatrix}=\underline{n+1}$

[例] A 是 n 阶正定阵，α 是 n 维非零实列向量，则 $R\begin{bmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{bmatrix}=\underline{n+1}$

⇒ $R=R\begin{bmatrix}A&0\\0&-\alpha^TA^{-1}\alpha\end{bmatrix}$

$=R(A)+R(-\alpha^TA^{-1}\alpha)$

[例] 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，X 为 n 维列向量，$\beta=(b_1\cdots b_m)^T\neq0$，则必有 $\underline{B}$

A. 若 $AX=0$ 有解，则 $AX=\beta$ 有解

B. 若 $R(A)=m$，则 $AX=\beta$ 有解.

C. 若 $AX=\beta$ 有解，则 $AX=0$ 有非零解.

D. 若 $R(A)=n$，则 $AX=\beta$ 有解.

[较难] 已知矩阵 $A=\alpha_1\beta_1^T+\alpha_2\beta_2^T$，其中列向量 α_1,α_2 线性无关，列向量 β_1,β_2 也线性无关，证明 $R(A)=2$

⇒ 由 $A=\alpha_1\beta_1^T+\alpha_2\beta_2^T=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\end{bmatrix}$

及线性无关性知：

$2=R(\alpha_1,\alpha_2)+R(\beta_1,\beta_2)-2\le R(A)$

$R(A)\le R(\alpha_1\beta_1^T)+R(\alpha_2\beta_2^T)=2$

∴ $R(A)=2$.

[例] $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\3&4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&2\end{bmatrix}$，$A=BC$，求 C^{10}.

⇒ 可看出 $C=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

∴ $C^{10}=\begin{bmatrix}1&10\\0&1\end{bmatrix}$

[例] 设 A 为3阶实对称阵，如果二次曲面在正交变换下为 双叶双曲面，则 $f=1$ 中 A 正特征值个数为 $\underline{1}$.

[例] 设 A 为2阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的2维列向量，$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 A 的特征值为 $\underline{0,1}$

① $A\alpha_1=0\alpha_1$

② 设 $A\xi=\lambda\xi$

$\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$

$(\lambda_2k_1-2k_2)\alpha_1+(\lambda_2k_2-k_2)\alpha_2=0$

∴ $\lambda_2=1$.

[例] φ 在 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ 下矩阵为 $\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$ 求 φ 关于 $(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ 下矩阵？

⇒ $(\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2))\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=(\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2))$

$=(\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2))=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{bmatrix}&\\&\end{bmatrix}$

而 ~~$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$~~

$(\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$

[例] 设 α,β 为3维列向量，矩阵 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，求证：

(1) 秩 $r(A)\le2$.

⇒ $r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)$

$\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\le r(\alpha)+r(\beta)\le2$

(2) 若 α,β 线性相关，则 $r(A)<2$

⇒ 设 $\alpha=k\beta$

∴ $r(A)=r((1+k^2)\beta\beta^T)\le r(\beta)\le1<2$

[例] A 为3阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 α_3 满 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$

(1) 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关.

⇒ 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ ①

同时左乘 A

∴ $-2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$ ②

由②知 $k_1=k_3=0$ 代入①知 $k_2=0$

∴ 无关

(2) 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 求 $P^{-1}AP$

$AP=P\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

[例] 设 α,β 为3维列向量，$\alpha\beta^T\sim\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，求 $\beta^T\alpha$？ $\underline{2}$.

⇒ $tr(\alpha\beta^T)=tr(\beta^T\alpha)=2$

[例] 设 $A_{m\times n}$，$B_{n\times m}$ 若 $AB=E$，则 $R(A)=R(B)=m$

$m=r(AB)\le r(A)\le m$.

[例] 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是4阶矩阵，A^* 是 A 的伴随阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为 $\underline{D}$

A. α_1,α_3 B. α_1,α_2

C. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ D. $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

⇒ 可知 $r(A)=3$，$r(A^*)=1$

∴ $A^*x=0$ 基础解系为3个

而 $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=0$ ∴ $\alpha_1+\alpha_3=0$.

实对称阵有n个线性无关的特征向量． 对角阵：左×行 右×列． x.列P应该 $(\alpha)=(\beta)$ C

可相似对角化 ⟺ n个线性无关的

n-重根次 三个无关解向量：$n-R(A)+1=3$

[证]. ~~AX=0~~

$R(A_{m\times n})=n$，则 ∃ $R(B_{n\times m})=n$ 使 $BA=E_n$

$A \xrightarrow{行} \begin{bmatrix}B\\C\end{bmatrix} \xrightarrow{行} \begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix} \xrightarrow{行} \begin{bmatrix}E_n\\0\end{bmatrix}$

∴ ∃ 可逆 P 使 $PA=\begin{bmatrix}E_n\\0\end{bmatrix}$

$(E_n,0)PA=E$

∴ 令 $B=(E_n,0)P$ 即可．

则 $R(B_{n\times m})=n$．

[例] A_n．$r\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{pmatrix}=r(A)$．则：

① $Ax=\alpha$ 必有解

$\Rightarrow r(A)\le r(A|\alpha)\le r\begin{bmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{bmatrix}=r(A)$

∴ $r(A)=r(A|\alpha)$

∴ $Ax=\alpha$ 有解．

② $\begin{bmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$ 必有非零解

$r(左)=r(A)\le n<n+1$

∴ 不满秩

[例] 设A为n阶方阵且 $|A|\neq0$，B-E 可逆，满足 $(B-E)^{-1}=(A-E)^T$，证明B可逆．

$\Rightarrow (B-E)(A^T-E)=E$

∴ $B=(B-E)A^T$

∴ $|B|=|B-E||A^T|\neq0$．

∴ B可逆

[例]. 求行列式．

(1) $\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2^2&2^3\cdots&2^n\\3&3^2&\cdots&3^n\\\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n}k!$

(2) 已知n阶方阵A的 A^*，求A．

$\Rightarrow A=|A|\cdot(A^*)^{-1}$

而 $|A^*|=|A|^{n-1}$

∴ $A=\sqrt[n-1]{|A^*|}\cdot(A^*)^{-1}$

(3) $A-2B=AB$．已知B，求 $(A+2E)^{-1}$

$\Rightarrow B(A+2E)B=A$

左右+2E得：$(A+2E)(E-B)=2E$

∴ $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{2}(E-B)$

[例]. $A_3=(a_{ij})$ $B=\begin{bmatrix}a_{11}-2a_{13}&a_{12}&a_{12}+a_{13}\\a_{21}-2a_{23}&a_{22}&a_{22}+a_{23}\\a_{31}-2a_{33}&a_{32}&a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}$

$|A|=2$，求 $(A^*B)^{-1}$．

设 $B=AP$

∴ $A^*B=2P=2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\-2&0&1\end{bmatrix}$

∴ $(A^*B)^{-1}=\frac{1}{2}P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&-1\\2&0&1\end{bmatrix}$．

[例] 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&1&a\\-1&a&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$

不等价，求a？ 3或4．

$\Rightarrow |A|=-(a+1)(a-3)$

$|B|=(a+1)(4-a)$

∴ $a=3$ 时，$r(A)=2$，$r(B)=3$

$a=4$ 时，$r(A)=3$，$r(B)=2$

[例] 若n维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足 $2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3=0$，β是任意n维向量．若 $\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,a\beta+\alpha_3$ 线性相关，则a= ____．

$k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+k_3(a\beta+\alpha_3)=0$

∴ $(k_1+k_2+k_3a)\beta+(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3)=0$

∴ 令 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3a=0\\k_1=2,\ k_2=-1,\ k_3=3\end{cases}$

∴ $a=-\frac{1}{3}$

[例].

1.化 $f=x_3^2+4x_4^2+2x_1x_2+4x_3x_4$ 为规范形

$\Rightarrow \lambda=1,5,-1,0$

∴ $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$．

2. $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2ax_2x_3$ 的规范形是 $y_1^2+y_2^2$，求a？

$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda^2-3\lambda+2-2a^2)$

∵ λ为 +，+．0

∴ $f(0)>0$ ∴ $2-2a^2>0$

∴ $a\in(-1,1)$

3. 设 $\alpha=(1,0,1)^T$，$A=\alpha\alpha^T$，若 $B=(kE+A)^2$ 正定，求k？（$k\neq0$ 且 $k\neq-2$）

$\lambda_A=2,0,0$

∴ $B(\lambda)=(k+2)^2,k^2,k^2$

4. $A_{m\times n}$，$B=-aE+A^TA$ 正定，求a？

$x^TBx=-ax^Tx+x^TA^TAx$

∵ $(Ax,Ax)\ge0$ $(x,x)>0$

∴ $-a>0$ ∴ $a<0$

[例] 已知向量组 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{bmatrix}$

$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1&1&a\\-1&a&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$ 不等价，

求a？ 3或4或-1

[例] $A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\2&1&5\\0&1&1\end{bmatrix}$ 求 $A^*X=0$ 通解．

$R(A)=2$．$A^*A=0$．

∴ A列向量组即为解

∴ $X=k_1\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$

[例]. $A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$ 求 $A^nX=0$ 通解．

$\Rightarrow A^n=2^{n-1}A$

∴ 解 $AX=0$．

∴ $X=k_1\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

[例] A是行列式为0的三阶实对称矩阵，并且

$A\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\2&-1\\4&1\end{bmatrix}$，解 $AX=0$．

设 $\alpha_1=(1,1,2)^T$，$\alpha_2=(1,1,-1)^T$

则有 $A\alpha_1=2\alpha_1$，$A\alpha_2=-\alpha_2$

∴ A的 $\lambda=2,-1,0$．$R(A)=2$

设 $AX=0$ 解为 $k(x_1,x_2,x_3)^T$

由正交知 $(1,-1,0)^T$

∴ 解为 $k(1,-1,0)$

[例] 设 $\alpha_1=(6,-1,1)^T$，$\alpha_2=(-7,4,2)^T$ 是线性方程组

$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=a\\x_1+3x_2-2x_3=1\\2x_1+5x_2+x_3=8\end{cases}$ 的

两个解，求通解．

$\Rightarrow 3-R(A)\ge1$ ∴ $R(A)\le2$

∵ ∃ 2阶子式不为0 ∴ $R(A)\ge2$

∴ $R(A)=2$

∴ $AX=0$ 基础解系由一个向量组成

$X=(6,-1,1)^T+k(13,-5,-1)^T$

$AX=0$ 解空间2维 $\Leftrightarrow n-R(A)=2$. $|A|$ 主代余线代数余子式之和 $=A^*$ 特征值之和

$\Leftrightarrow$ 基础解系由2个线性无关的解向量构成. 已知 λ, 求 A 中参数: 和为迹, 积为值. 正定 顺序主子式 >0, $\lambda_i>0$

[例] 设 A 是三阶实对称阵, 正交阵 $Q=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, 使 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, 求 $B=A-\varepsilon_1\varepsilon_1^T$ 的特征值.

$\Rightarrow \lambda_A=1,2,3.$

$\therefore A\varepsilon_i=i\varepsilon_i$

$\because Q$ 正交.

$\therefore \varepsilon_i^T\varepsilon_j=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$

$\therefore B\varepsilon_i=A\varepsilon_i-\varepsilon_1(\varepsilon_1^T\varepsilon_i)$

$=\begin{cases}0, & i=1\\ i\varepsilon_i, & i=2,3.\end{cases}$

$\therefore \lambda=0,2,3.$

[例] 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&a\\1&3&5\\0&0&2\end{bmatrix}$ 只有一个线性无关的特征向量, 求 A 的 λ 及 a.

$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^3 \quad \therefore \lambda_3=2.$

$r(2E-A)=2 \quad \therefore a\neq5.$

[例] 已知 $P^{-1}AP=B$, 其中 $B=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\4&-1&2\end{bmatrix}$ $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 求 A 关于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量

$|\lambda E-B|=\lambda^2(\lambda-1)$

$\because AP=PB,\ B\alpha=\lambda\alpha$

$\therefore A(P\alpha)=\lambda(P\alpha)$

而 B, $\lambda=0$ 的 $X=k_1\beta_1+k_2\beta_2$

$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ $\beta_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$

$\therefore A$ 关于 $\lambda=0$ 的特征向量是: $P\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $P\beta_2=-2\alpha_1+\alpha_3$

$\therefore$ 所求 $=k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(-2\alpha_1+\alpha_3)$ $(k_1^2+k_2^2\neq0)$

[例]. $(A+B)^2=E$, 求 $(E+BA^{-1})^{-1}$.

$=[(A+B)A^{-1}]^{-1}$

$=A(A+B)^{-1}=A(A+B)$

$\because (A+B)^2=E$, 则

$(A+B)^{-1}=A+B$

[例] 已知 $A=\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}$ 合同, 求可逆 C 使 $C^TAC=B$.

$\Rightarrow$ 令 $X^TAX=2x_1x_3+x_2^2$

令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_3\\x_2=y_2\\x_3=y_1-y_3\end{cases}$

$\therefore f=2y_1^2+y_2^2-2y_3^2$

$\therefore$ 经 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$ 即合同

$\therefore C=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow X^TAX$ 经 $X=CY$ 得 Y^TBY 就有 A、B 合同. 且其中 $B=C^TAC$

[例] 已知 A 是 n 阶矩阵, α、β 都是 n 维列向量, $|A|=a$, $\begin{vmatrix}A&\alpha\\\beta^T&c\end{vmatrix}=0$, 求 $\begin{vmatrix}A&\alpha\\\beta^T&b\end{vmatrix}=\underline{a(b-c)}$.

$=\begin{vmatrix}A&\alpha\\\beta^T&c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A&0\\\beta^T&b-c\end{vmatrix}=|A|(b-c)$

[例] 设 n 阶方阵 $A=[\alpha_1,\cdots\alpha_n]$, $B=[\alpha_n,\alpha_1,\cdots\alpha_{n-1}]$, 若 $|A|=1$, 求 $|A-B|$?

$|A-B|=|\alpha_1-\alpha_n,\alpha_2-\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_n-\alpha_{n-1}|$

把每一列加到第一列.

$=|0,\alpha_2-\alpha_1,\cdots\ \alpha_n-\alpha_{n-1}|=0$

[例] 设 A 是三阶矩阵, A 每行元素和为 k, A^* 每行元素之和为 m, 求 $|A|$

$\because A\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ 左乘 A^* 得

$|A|\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=kA^*\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=km\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

$\therefore |A|=km.$

[例] 设 $J=\begin{bmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{bmatrix}$ 和 $A=[a_{ij}]$ 都是 n 阶矩阵, 求 AJ.

$=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&&1\\&&&0\end{bmatrix}=(0,\alpha_1\cdots\alpha_{n-1})$

$=\begin{bmatrix}0&a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}\\0&a_{21}&\cdots&a_{2,n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}\end{bmatrix}$

[例] 设 $J=\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{bmatrix}$ 是 n 阶矩阵, 记 $A=E+J+J^2+\cdots J^{n-1}$, 求 A^{-1}?

$\Rightarrow J^n=0$

$\therefore (E-J)(E+J+\cdots J^{n-1})=E-J^n=E$

$\therefore A^{-1}=E-J=\begin{bmatrix}1&-1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&-1\\&&&1\end{bmatrix}$

[例] 设 A、B 均为 n 阶方阵, 且 $AB=A+B$, 判断.

① 若 A 可逆, 则 B 可逆. ✓

$(A-E)(B)=A$

$\therefore |A-E|\,|B|=|A|\neq0$

$\therefore |B|\neq0.$

$\therefore A-E$、B 均可逆

② 若 B 可逆, 则 $A+B$ 可逆. ✓

$\Rightarrow B$ 可逆 $\Rightarrow A$ 可逆 $\Rightarrow AB$ 可逆

$\Rightarrow A+B=AB$ 可逆

③ $A-E$ 恒可逆 ✓

$(A-E)(B-E)=E$

[例] $A=\begin{bmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{bmatrix}$ 若 A、A^* 等价, 则 $\underline{D}$

A. $a-b\neq0$ 且 $a+3b\neq0$

B. $a+3b\neq0$ 或 $a-b\neq0$

C. $a=b=0$

D. $a\neq b$ 且 $a+3b\neq0$ 或 $a=b=0$.

[例] 已知 A、B 是 n 阶等价方阵, 则必有 $\underline{D}$

A. $A+kE$ 和 $B+kE$ 等价

B. A^2、B^2 等价

C. AB 与 BA 等价

D. $5A$ 与 $-4B$ 等价

$\Rightarrow$ 秩相等 + 同型 $\rightarrow$ 等价.

[例] $A=\begin{bmatrix}a&2&-1&3\\2&4&-2&6\\-1&-2&a&-3\end{bmatrix}$ B 是 4×2 非零矩阵, 且 $AB=0$, 则 $\underline{C}$

A. $a=1$ 时, B 的秩必为2.

B. $a=1$ 时, B 的秩必为1

C. $a\neq1$ 时, B 的秩必为1

D. $a\neq1$ 时, B 的秩必为2.

$\Rightarrow\begin{vmatrix}a&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&a\end{vmatrix}=4(a-1)^2\neq0.$

$\therefore$ ① $a=1$ 时, $r(A)=1$, $r(A)+r(B)\leq3$

$\therefore r(B)=1$ 或 $2.$

② $a\neq1$ 时, $r(A)=3$, $r(B)=1$.

$\alpha_1\cdots\alpha_s$无关$\Leftrightarrow\alpha$推任一组不全为0的数$k_1\cdots k_s$有$k_1\alpha_1+\cdots k_s\alpha_s\neq 0$

$\Leftrightarrow\alpha_1\cdots\alpha_s$中每一个向量都不能由其余$s-1$个向量线性表出

$AB=C$, C相关, 则$A.B$至少一个相关

判$A.B$是否相似:看$R.tr.$ 叫是否同

[例] A是$m\times n$矩阵,B是$n\times m$矩阵且满足$AB=E$,则.

$\{$A行向量组无关
B列向量组无关.

① $r(A)\geq r(AB)=m$
$\therefore r(A)=m$

② 同理 $r(B)\geq m$
$\therefore r(B)=m$

$\therefore R(A)=R(B)=m$.

[例] 设A是n阶实对称阵,将A的i列和j列对换得到B,再将B的i行和j行对换得到C.则A与C __D__

A.等价但不相似
D.等价合同且相似.

$\Rightarrow E_{ij}=E_{ij}^T=E_{ij}^{-1}$

$C=E_{ij}AE_{ij}=E_{ij}^TAE_{ij}=E_{ij}^{-1}AE_{ij}$

[例] 设A是n阶实对称阵,下列错误的是 __D__

A.若A可逆,则A^{-1}与A^T合同

B.若A与单位矩阵合同,则$|A|>0$

C.若A可逆,则A^2与单位阵合同

D.若$|A|>0$,则A与单位阵合同

A $\Rightarrow A^T=A^TA^{-1}A$

$\therefore A^{-1}$与A^T合同.

D $\Rightarrow |A|>0$, λ不一定都>0.

[例] $f=(x_1+2x_2+ax_3)(x_1-x_2+bx_3)$
正惯指p与负惯指q为?

$f=x^T\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}(1\ -1\ b)X$

$\therefore|\lambda E-A|=\lambda^2|\lambda-(a+b-1)|$
$=\lambda^2(\lambda+1-a-b)$

[例] 对X^TAX,则 __D__

A.化为标准形的坐标变换是唯一的.

B.化规范形变换唯一

C.X^TAX标准形是唯一的

D.X^TAX规范形唯一的.

[例] A是3阶矩阵,$r(A)=1$,则$\lambda=0$至少是A的二重特征值(√).

代 ≥ 几何 = 2

$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\lambda=0$为三重特征值.

[例] 三阶矩阵A的特征值全为0,则必有 __D__

A. $r(A)=0$ B $r(A)=1$

C. $r(A)=2$ D.无法确定.

$\Rightarrow AX=0$,

$n-R(A)=$几何≤ 3

$\therefore$不确定

如 0. $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

[例] n阶矩阵A与B有相同的特征向量是A与B相似的.

既不充分也不必要条件.

$\Rightarrow P^{-1}AP=B$, $A\alpha=\lambda\alpha$,则:

$B(P^{-1}\alpha)=P^{-1}A\alpha=\lambda(P^{-1}\alpha)$

$\therefore P^{-1}\alpha$为B特征向量.

反之,若A.B有相同特征向量,但它们可以属于不同特征值.

$\therefore$ A.B不相似

[例] 已知$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&5&\\&&5\end{bmatrix}$, α_1是矩阵A属于特征值$\lambda=1$的特征向量,$\alpha_2.\alpha_3$是矩阵A属于$\lambda=5$的特征向量,那么P不能是 __D__

A. $[\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3]$

B. $[\alpha_1, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_2-2\alpha_3]$

C. $[\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2]$

D. $[\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1-\alpha_2, \alpha_3]$

[例] 设A是n阶矩阵,下列命题正确的是 __D__

A.若α是A^T的特征向量,那么α是A特征向量.

B.若α是A^*的特征向量,那么α是A的特征向量.

C.若α是A^2的特征向量,那么α是A的特征向量.

D.若α是2A的特征向量,那么α是A的特征向量.

[例] A_n, P_n可逆, α是A的属于λ的特征向量,那么在下列矩阵中:

① A^2 ② $P^{-1}AP$ ③ A^T ④ $E-\frac{1}{2}A$.
α肯定是其特征向量的矩阵共有 __2__ 个 $\Rightarrow$ ③④

[例] 三个平面

$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\\a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0\end{cases}$

交于三条平行直线的充要条件 C

A. $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1$,
$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=2$

B. $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$
$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=3$

C. $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$中任意2个均线性无关,且$\alpha$不能由$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$线性表出.

D. $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$相关. α不能由$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$表出.

$\Rightarrow$ A中$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$表示三个平面法向量平行. $\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=2$.
故三个平面两两平行,且有两个重合.

B 当两两相交成三条平行直线时必有$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$,
$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha)=3$ 但反之不成立(有可能$\neq$).

C: $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$中任意2个均无关.
$\Leftrightarrow$任何两个都不平行,相交成一条直线

α不能由$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$表出,即三个平面无公共点.

[例] $R(A_{m\times n})=r$,则$Ax=b(\neq 0)$有解的充分条件是$r(A)=m$.

$A_{m\times n}$, 非齐次$Ax=b$有解的充分条件是 __B__

A. $R(A)=\min\{m,n\}$

B. A行向量组无关

C. $m<n$

D. A列向量组无关.

Date:

$P^{-1}AP=B$，求A的α_i？

$B\alpha=\lambda\alpha$ ∴ $A(P\alpha)=\lambda(P\alpha)$

[例] 设$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$经行变换成$B=[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]$ 且$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$无关，$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3.\alpha_4$相关，

则：β_4可由$\beta_1.\beta_2.\beta_3$唯一表示(√)

⇒ $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

⇓

有非零解．．

∴ $Bx=0$ 有非零向解

∴ $\beta_1.\beta_2.\beta_3.\beta_4$ 相关

令$A_1=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$

∴ $A_1x=0$ 与 $B_1x=0$ 同解

∴ $R(A_1)=R(B_1)$

∴ $\beta_1.\beta_2.\beta_3$ 也无关．

[例] 设A.B为n阶方阵，P.Q为n阶可逆阵，则下列正确的是 ④C

A.若$B=AQ$，则A列向量组与B列向量组等价

B.若$B=PA$．则A行.B行等价

C.若$B=PAQ$．则A行(列)与B的行(列)等价

D.若A的行(行列)与B的行(列)等价，则A.B等价．

↳向量组等价说明R相同．

(C⇒) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ $Q=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

[例] 向量组(I) $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3$ 和 (II) $\beta_1.\beta_2.\beta_3.\beta_4$ 都是4维非零列向量，若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关且和每个$\beta_j$都正交．求$R(I)+R(II)$？

⇒令$A=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\end{bmatrix}$ ∴ $A\beta_j=0$

∴ $R(II)\le n-R(A)=4-3=1$

∴ $r(II)=1$

∴ $r(I)+r(II)=4$