线性代数

基本运算

① $A+B=B+A$

② $(A+B)+C=A+(B+C)$

③ $c(A+B)=cA+cB \quad (c+d)A=cA+dA$

④ $c(dA)=(cd)A$

⑤ $cA=0 \Leftrightarrow c=0$ 或 $A=0$。

$\left(A^T\right)^T=A$

$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$

$(cA)^T=c\left(A^T\right)$。

$(AB)^T=B^TA^T$

$\tau(n(n-1)\cdots 21)=C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$

$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+\cdots+a_{2n}A_{2n}$

转置值不变 $\left|A^T\right|=|A|$

逆值变 $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$

$|cA|=c^n|A|$

$|\alpha,\beta_1+\beta_2,\gamma|=|\alpha,\beta_1,\gamma|+|\alpha,\beta_2,\gamma|$

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，3 阶矩阵

$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$|A+B|\neq|A|+|B|$

$A+B=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3)$

$|A+B|=|\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3|$

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$|E(i, j(c))| = 1$$

有关乘法的基本运算

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

线性性质　$(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$，

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$$

$$(cA)B = c(AB) = A(cB)$$

结合律　$(AB)C = A(BC)$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$|AB| = |A||B|$$

$$A^k A^l = A^{k+l}$$

$$(A^k)^l = A^{kl}$$

$(AB)^k = A^k B^k$ **不一定成立！**

$AE = A$，$EA = A$

$A(kE) = kA$，$(kE)A = kA$

$AB = E \Leftrightarrow BA = E$

与数的乘法的不同之处

$(AB)^k = A^k B^k$ **不一定成立！**

无交换律　因式分解障碍是交换性

一个矩阵 A 的每个多项式可以因式分解，例如

$$A^2 - 2A - 3E = (A - 3E)(A + E)$$

无消去律（矩阵和矩阵相乘）

当 $AB = 0$ 时 $\nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$

由 $A \neq 0$ 和 $AB = 0 \nRightarrow B = 0$

由 $A \neq 0$ 时 $AB = AC \nRightarrow B = C$（无左消去律）

特别的　设 A 可逆，则 A **有消去律**。

左消去律：$AB = AC \Rightarrow B = C$。

右消去律：$BA = CA \Rightarrow B = C$。

如果 A 列满秩，则 A 有左消去律，即

① $AB = 0 \Rightarrow B = 0$

② $AB = AC \Rightarrow B = C$

可逆矩阵的性质

i）当 A 可逆时，

A^T 也可逆，且 $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$。

A^k 也可逆，且 $\left(A^k\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^k$。

数 $c\neq 0$，cA 也可逆，$(cA)^{-1}=\frac{1}{c}A^{-1}$。

ii）A，B 是两个 n 阶可逆矩阵 $\Leftrightarrow AB$ 也可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

推论：设 A，B 是两个 n 阶矩阵，则 $AB=E\Leftrightarrow BA=E$

命题：初等矩阵都可逆，且

$$(E(i,j))^{-1}=E(i,j)$$

$$(E(i(c)))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{c}\right)\right)$$

$$(E(i,j(c)))^{-1}=E(i,j(-c))$$

命题：准对角矩阵

$$A=\begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk} \end{vmatrix} \text{可逆} \Leftrightarrow \text{每个 } A_{ii} \text{ 都可逆，记 } A^{-1}=\begin{vmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk}^{-1} \end{vmatrix}$$

伴随矩阵的基本性质：

$$AA^*=A^*A=|A|E$$

当 A 可逆时，$A\frac{A^*}{|A|}=E$　　得 $\boxed{A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}}$，　（求逆矩阵的伴随矩阵法）

且得：$\boxed{(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}=\left(A^{-1}\right)^*}$　　$\left(\left(A^{-1}\right)^*=\left|A^{-1}\right|\left(A^{-1}\right)^{-1}=\frac{A}{|A|}\right)$

伴随矩阵的其他性质

① $\boxed{|A^*|=|A|^{n-1}}$，　$A^*=|A|A^{-1}$

②$\left(A^{T}\right)^{*}=\left(A^{*}\right)^{T}$，

③$\boxed{(cA)^{*}=c^{n-1}A^{*}}$,

④$(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$,

⑤$\left(A^{k}\right)^{*}=\left(A^{*}\right)^{k}$，

⑥$\boxed{(A^{*})^{*}=|A|^{n-2}A}$。　　$n=2$ 时，　$(A^{*})^{*}=A$　　$A^{*}=\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$

关于矩阵右上肩记号：T，k，-1，*

i) 任何两个的次序可交换，

如$\left(A^{T}\right)^{*}=\left(A^{*}\right)^{T}$，

$\left(A^{*}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{*}$等

ii) $(AB)^{T}=B^{T}A^{T},(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，

$(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$

$\boxed{\text{但}(AB)^{k}=B^{k}A^{k}\text{不一定成立！}}$

线性表示

$0\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

$\alpha_i\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

$\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta$ 有解

$\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)x=\beta$ 有解$\left(x=(x_1,\cdots,x_s)^{T}\right)$

$Ax=\beta$ 有解，即 β 可用 A 的列向量组表示

$AB=C=(r_1,r_2,\cdots,r_s)$，　$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，

则 $r_1,r_2,\cdots,r_s\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$。

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，

则存在矩阵 C，使得 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)C$

线性表示关系有传递性　　当 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\to r_1,r_2,\cdots,r_p$，

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\to r_1,r_2,\cdots,r_p$。

等价关系：如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 互相可表示 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s \rightleftarrows \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$

记作 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s \cong \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$。

线性相关

$s=1$，单个向量 α，$x\alpha=0$ 　　α 相关 $\Leftrightarrow \alpha=0$

$s=2$，α_1,α_2 相关 $\Leftrightarrow$ 对应分量成比例　α_1,α_2 相关 $\Leftrightarrow a_1:b_1=a_2:b_2=\cdots=a_n:b_n$

①向量个数 s =维数 n，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相（无）关 $\Leftrightarrow \left|\alpha_1\cdots\alpha_n\right|=(\neq)0$

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$

如果 $s>n$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 一定相关

$Ax=0$ 的方程个数 $n<$ 未知数个数 s

②如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关，则它的每一个部分组都无关

③如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 相关，则 $\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

证明：设 $c_1,\cdots,c_s,c$ 不全为 0，使得 $c_1\alpha_1+\cdots+c_s\alpha_s+c\beta=0$

则其中 $c\neq0$，否则 $c_1,\cdots,c_s$ 不全为 0，$c_1\alpha_1+\cdots+c_s\alpha_s=0$，与条件 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 无关矛盾。于是 $\beta=-\dfrac{c_1}{c}\alpha_1-\cdots-\dfrac{c_s}{c}\alpha_s$。

④当 $\beta\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 时，表示方式唯一 $\Leftrightarrow \alpha_1\cdots\alpha_s$ 无关

（表示方式不唯一 $\Leftrightarrow \alpha_1\cdots\alpha_s$ 相关）

⑤若 $\beta_1,\cdots,\beta_t\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，并且 $t>s$，则 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 一定线性相关。

证明：记 $A=\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_s\right)$，$B=\left(\beta_1,\cdots,\beta_t\right)$，

则存在 $s\times t$ 矩阵 C，使得 $B=AC$。

$Cx=0$ 有 s 个方程，t 个未知数，$s<t$，有非零解 η，$C\eta=0$。

则 $B\eta=AC\eta=0$，即 η 也是 $Bx=0$ 的非零解，从而 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性相关。

各性质的逆否形式

①如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关，则 $s\le n$。

②如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 有相关的部分组，则它自己一定也相关。

③如果 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 无关，而 $\beta\not\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s\beta$ 无关。

⑤如果 $\beta_1\cdots\beta_t\to\alpha_1\cdots\alpha_s$，$\beta_1\cdots\beta_t$ 无关，则 $t\le s$。

推论：若两个无关向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 与 $\beta_1\cdots\beta_t$ 等价，则 $s=t$。

极大无关组

一个线性无关部分组 (I)，若 $\#(I)$ 等于秩 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_6\to(I)$，$(I)$ 就一定是极大无关组

① $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关 $\Leftrightarrow\gamma\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)=s$

② $\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\Leftrightarrow\gamma\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\right)=\gamma\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_s\right)$

另一种说法： 取 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大无关组 (I)

(I) 也是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 的极大无关组 $\Leftrightarrow(I),\beta$ 相关。

证明：$\beta\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s\Leftrightarrow\beta\to(I)\Leftrightarrow(I),\beta$ 相关。

$$\boxed{\gamma\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta\right)=\begin{cases}\gamma\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_s\right),\beta\to\alpha_1\cdots\alpha_s\\ \gamma\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_s\right)+1,\beta\not\to\ \alpha_1,\cdots,\alpha_s\end{cases}}$$

③ β 可用 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 唯一表示 $\Leftrightarrow\gamma\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta\right)=\gamma\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_s\right)=s$

④ $\beta_1,\cdots,\beta_t\to\alpha_1,\cdots,\alpha_s\Leftrightarrow\gamma\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\right)=\gamma\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_s\right)$

$$\Rightarrow \gamma\left(\beta_1,\cdots,\beta_t\right) \le \gamma\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_s\right)$$

⑤$\alpha_1,\cdots,\alpha_s \cong \beta_1,\cdots,\beta_t \Leftrightarrow \gamma\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_s\right) = \gamma\left(\alpha_1\cdots\alpha_s,\beta_1\cdots\beta_t\right) = \gamma\left(\beta_1,\cdots,\beta_t\right)$

矩阵的秩的简单性质

$0 \le r(A) \le \min\{m,n\}$

$r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$

A 行满秩：$r(A) = m$

A 列满秩：$r(A) = n$

n 阶矩阵 A 满秩：$r(A) = n$

A 满秩 $\Leftrightarrow$ A 的行（列）向量组线性无关

$\Leftrightarrow |A| \ne 0$

$\Leftrightarrow$ A 可逆

$\Leftrightarrow$ $Ax = 0$ 只有零解，$Ax = \beta$ 唯一解。

矩阵在运算中秩的变化

初等变换保持矩阵的秩

①$r\left(A^T\right) = r(A)$

②$c \ne 0$ 时，$r(cA) = r(A)$

③$r(A \pm B) \le r(A) + r(B)$

④$r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$

⑤A 可逆时，$r(AB) = r(B)$

弱化条件：如果 A 列满秩，则 $\gamma(AB) = \gamma(B)$

证：下面证 $ABx = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解。

η 是 $ABx = 0$ 的解 $\Leftrightarrow AB\eta = 0$

$$\Leftrightarrow B\eta = 0 \Leftrightarrow \eta \text{ 是 } Bx = 0 \text{ 的解}$$

B 可逆时，$r(AB) = r(A)$

⑥若 $AB = 0$，则 $r(A) + r(B) \le n$（A 的列数，B 的行数）

⑦ A 列满秩时 $r(AB)=r(B)$

B 行满秩时 $r(AB)=r(A)$

⑧ $r(AB)+n\ge r(A)+r(B)$

解的性质

1． $Ax=0$ 的解的性质。

如果 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_e$ 是一组解，则它们的任意线性组合 $c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_e\eta_e$ 一定也是解。

$$\forall_i, A\eta_i=0\Rightarrow A(c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_e\eta_e)=0$$

2． $Ax=\beta(\beta\ne 0)$

①如果 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_e$ 是 $Ax=\beta$ 的一组解，则

$c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_e\xi_e$ 也是 $Ax=\beta$ 的解 $\Leftrightarrow c_1+c_2+\cdots+c_e=1$

$c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_e\xi_e$ 是 $Ax=0$ 的解 $\Leftrightarrow c_1+c_2+\cdots+c_e=0$

$$A\xi_i=\beta\cdot\forall i$$

$$A(c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_e\xi_e)=c_1A\xi_1+c_2A\xi_2+\cdots+c_eA\xi_e$$

$$=(c_1+c_2+\cdots+c_e)\beta$$

特别的： 当 ξ_1,ξ_2 是 $Ax=\beta$ 的两个解时， $\xi_1-\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的解

②如果 ξ_0 是 $Ax=\beta$ 的解，则 n 维向量 ξ 也是 $Ax=\beta$ 的解 $\Leftrightarrow \xi-\xi_0$ 是 $Ax=0$ 的解。

解的情况判别

方程： $Ax=\beta$ ，即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$

$\boxed{\text{有解}}\Leftrightarrow \beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

$$\Leftrightarrow\gamma(A|\beta)=\gamma(A)\Leftrightarrow\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)=\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

$\boxed{\text{无解}}\Leftrightarrow\gamma(A|\beta)>\gamma(A)$

$\boxed{\text{唯一解}}\Leftrightarrow\gamma(A|\beta)=\gamma(A)=n$

$\boxed{\text{无穷多解}}\Leftrightarrow\gamma(A|\beta)=\gamma(A)<n$

方程个数 m ：

$\gamma(A\mid\beta)\le m,\gamma(A)\le m$

①当$\gamma(A)=m$时，$\gamma(A\mid\beta)=m$，有解

②当$m<n$时，$\gamma(A)<n$，不会是唯一解

对于齐次线性方程组 $Ax=0$，

只有零解$\Leftrightarrow\gamma(A)=n$（即$A$列满秩）

（有非零解$\Leftrightarrow\gamma(A)<n$）

特征值特征向量

λ是A的特征值$\Leftrightarrow\lambda$是A的特征多项式$|xE-A|$的根。

两种特殊情形：

（1）A是上（下）三角矩阵，对角矩阵时，特征值即对角线上的元素。

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

$$|xE-A|=\begin{vmatrix}x-\lambda_1 & -* & -* \\ 0 & x-\lambda_2 & -* \\ 0 & 0 & x-\lambda_3\end{vmatrix}=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$$

（2）$r(A)=1$时：A的特征值为$0,0,\cdots,0,tr(A)$

特征值的性质

命题：n阶矩阵A的特征值λ的重数$\ge n-r(\lambda E-A)$

命题：设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

①$\boxed{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|}$

②$\boxed{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=tr(A)}$

命题：设η是A的特征向量，特征值为λ，即$A\eta=\lambda\eta$，则

①对于A的每个多项式$f(A)$，$f(A)\eta=f(x)\eta$

②当A可逆时，$A^{-1}\eta=\dfrac{1}{\lambda}\eta$，$A^*\eta=\dfrac{|A|}{\lambda}\eta$

命题：设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

①$f(A)$的特征值为$f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$

② A 可逆时，A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$

A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda_1},\frac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}$

③ A^T 的特征值也是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

特征值的应用

①**求行列式** $|A|=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

②**判别可逆性**

λ 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda E-A|=0 \Leftrightarrow A-\lambda E$ 不可逆

$A-\lambda E$ 可逆 $\Leftrightarrow \lambda$ 不是 A 的特征值。

当 $f(A)=0$ 时，如果 $f(c)\neq 0$，则 $A-cE$ 可逆

若 λ 是 A 的特征值，则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值 $\Rightarrow f(\lambda)=0$。

$f(c)\neq 0 \Rightarrow c$ 不是 A 的特征值 $\Leftrightarrow AcE$ 可逆。

n 阶矩阵的相似关系

当 $AU=UA$ 时，$B=A$，而 $AU\neq UA$ 时，$B\neq A$。

相似关系有 i）**对称性**：$A\sim B \Leftrightarrow B\sim A$

$U^{-1}AU=B$，则 $A=UBU^{-1}$

ii）**有传递性**：$A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$

$U^{-1}AU=B$，$V^{-1}BV=C$，则

$$(UV)^{-1}A(UV)=V^{-1}U^{-1}AUV=V^{-1}BV=C$$

命题　当 $A\sim B$ 时，A 和 B 有许多相同的性质

① $|A|=|B|$

② $\gamma(A)=\gamma(B)$

③ A，B 的特征多项式相同，从而特征值完全一致。

A 与 B 的特征向量的关系：η 是 A 的属于 λ 的特征向量 $\Leftrightarrow U^{-1}\eta$ 是 B 的属于 λ 的特征向量。

$$\begin{array}{ccc} A\eta=\lambda\eta & \Leftrightarrow & B(U^{-1}\eta)=\lambda(U^{-1}\eta) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ U^{-1}A\eta=\lambda U^{-1}\eta & \Leftrightarrow & U^{-1}AUU^{-1}\eta=\lambda(U^{-1}\eta) \end{array}$$

正定二次型与正定矩阵性质与判别

可逆线性变换替换保持正定性

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$变为$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则它们同时正定或同时不正定

$A \simeq B$，则A，B同时正定，同时不正定。

例如$B=C^TAC$。如果A正定，则对每个$x\neq 0$

$$x^TBx=x^TC^TACx=(Cx)^TACx>0$$

（C可逆，$x\neq 0$，$\therefore Cx\neq 0$！）

我们给出关于正定的以下性质

A正定$\Leftrightarrow A\simeq E$

$\Leftrightarrow$存在实可逆矩阵C，$A=C^TC$。

$\Leftrightarrow A$的正惯性指数$=n$。
$\Leftrightarrow A$的特征值全大于0。
$\Leftrightarrow A$的每个顺序主子式全大于0。

判断A正定的三种方法：

①顺序主子式法。
②特征值法。
③定义法。

基本概念

对称矩阵$A^T=A$。

反对称矩阵$A^T=-A$。

简单阶梯形矩阵：台角位置的元素都为1，台角正上方的元素都为0。
如果A是一个n阶矩阵，A是阶梯形矩阵$\Rightarrow A$是上三角矩阵，反之不一定
矩阵消元法：（解的情况）

①写出增广矩阵$(A|\beta)$，用初等行变换化$(A|\beta)$为阶梯形矩阵$(B|\gamma)$。

②用$(B|\gamma)$判别解的情况。

i）如果$(B|\gamma)$最下面的非零行为$(0,\cdots,0|d)$，则无解，否则有解。

ii）如果有解，记γ是$(B|\gamma)$的非零行数，则

$\gamma=n$时唯一解。
$\gamma<n$时无穷多解。

iii）唯一解求解的方法（初等变换法）

去掉$\left(B|\gamma\right)$的零行，得$\left(B_0\,|\,\gamma_0\right)$，它是$n\times\left(n+c\right)$矩阵，$B_0$是$n$阶梯形矩阵，从而是上三角矩阵。

则$b_{n\,n}\neq 0\Rightarrow b_{n-1\,n-1}\neq 0\Rightarrow\cdots b_{ii}$都不为$0$。

$\left(A|\beta\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(B|r\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(E|\eta\right)$　　　η就是解。

一个n阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$的值：

①是$n!$项的代数和

②每一项是n个元素的乘积，它们共有$n!$项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 其中$j_1 j_2\cdots j_n$是$1,2,\cdots,n$的一个全排列。

③$a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$　前面乘的应为$\left(-1\right)^{\tau\left(j_1 j_2\cdots j_n\right)}$　　$\tau\left(j_1 j_2\cdots j_n\right)$的逆序数

$$\begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix}=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}\left(-1\right)^{\tau\left(j_1 j_2\cdots j_n\right)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$\tau\left(n\left(n-1\right)\cdots 21\right)=C_n^2=\frac{n\left(n-1\right)}{2}$$

代数余子式

M_{ij}为a_{ij}的余子式。

$$A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}M_{ij}$$

定理：一个行列式的值D等于它的某一行（列），各元素与各自代数余子式乘积之和。

$$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+\cdots+a_{2n}A_{2n}$$

一行（列）的元素乘上另一行（列）的相应元素代数余子式之和为0。

范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_1 & \cdots & a_n \\ & & & \end{vmatrix}=\prod_{i<j}(a_j-a_i)\qquad C_n^2\text{个}$$

乘法相关

AB的$\left(i,j\right)$位元素是A的第i行和B的第j列对应元素乘积之和。

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

乘积矩阵的列向量与行向量

（1）设 $m\times n$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$， n 维列向量 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，则

$$A\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n$$

矩阵乘法应用于方程组

方程组的矩阵形式

$$Ax=\beta,\ \left(\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T\right)$$

方程组的向量形式

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

（2）设 $AB=C$，

$$AB=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s)$$

$$r_i=A\beta_i=b_{1i}\alpha_1+b_{2i}\alpha_2+\cdots+b_{ni}\alpha_n$$

AB 的第 i 个列向量是 A 的列向量组的线性组合，组合系数是 B 的第 i 个列向量的各分量。

AB 的第 i 个行向量是 B 的行向量组的线性组合，组合系数是 A 的第 i 个行向量的各分量。

矩阵分解

当矩阵 C 的每个列向量都是 A 的列向量的线性组合时，可把 C 分解为 A 与一个矩阵 B 的乘积

特别的在有关对角矩阵的乘法中的若干问题

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&\lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n)$$

对角矩阵从右侧乘一矩阵 A，即用对角线上的元素依次乘 A 的各列向量

对角矩阵从左侧乘一矩阵 A，即用对角线上的元素依次乘 A 的各行向量

于是 $AE=A$， $EA=A$

$$A(kE)=kA,\ (kE)A=kA$$

两个对角矩阵相乘只须把对角线上对应元素相乘

对角矩阵的 k 次方幂只须把每个对角线上元素作 k 次方幂

对一个 n 阶矩阵 A，规定 $tr(A)$ 为 A 的对角线上元素之和称为 A 的迹数。

于是 $(\alpha\beta^T)^k=(\beta^T\alpha)^{k-1}\alpha\beta^T=\left[tr(\alpha\beta^T)\right]^{k-1}\alpha\beta^T \qquad \alpha^T\alpha=tr(\alpha\alpha^T)$

其他形式方阵的高次幂也有规律

例如：$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

初等矩阵及其在乘法中的作用

（1）$E(i,j)$：交换 E 的第 i,j 两行或交换 E 的第 i,j 两列

（2）$E(i(c))$：用数 $c(\neq 0)$ 乘 E 的第 i 行或第 i 列

（3）$E(i,j(c))$：把 E 的第 j 行的 c 倍加到第 i 行上，或把 E 的第 i 列的 c 倍加到第 j 列上。

初等矩阵从左（右）侧乘一个矩阵 A 等同于对 A 作一次相当的初等行（列）变换

乘法的分块法则

一般法则：在计算两个矩阵 A 和 B 的乘积时，可以先把 A 和 B 用纵横线分割成若干小矩阵来进行，要求 A 的纵向分割与 B 的横向分割一致。

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & n_3 \end{array}\\ \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ \hline A_{31} & A_{32} & A_{33}\\ \hline A_{41} & A_{42} & A_{43}\end{array}\right)\end{array} \qquad \begin{array}{cc}\left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13}\\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23}\\ \hline B_{31} & B_{32} & B_{33}\end{array}\right) & \begin{array}{c} n_1\\ n_2\\ n_3\end{array}\end{array}$$

两种常用的情况

（1）A,B 都分成 4 块

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$$

其中 A_{i1} 的列数和 B_{1j} 的行数相等，A_{i2} 的列数和 B_{2j} 的行数相关。

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\ A_{21}A_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}$$

（2）准对角矩阵

$$\begin{pmatrix}A_{11}&0&\cdots&0\\0&A_{22}&\cdots&0\\&&\ddots&\\0&0&\cdots&A_{kk}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A_{11}&0&\cdots&0\\0&A_{22}&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\\0&0&\cdots&A_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&0&\cdots&0\\0&B_{22}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&B_{kk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}&0&\cdots&0\\0&A_{22}B_{22}&\cdots&0\\&&\ddots&\\0&0&&A_{kk}B_{kk}\end{pmatrix}$$

矩阵方程与可逆矩阵

两类基本的矩阵方程 （都需求A是方阵，且$|A|\neq 0$）

$(I)Ax = B$ $(II)xA = B$

（I）的解法：

$$(A|B)\xrightarrow{行}(E|x)$$

（II）的解法，先化为$A^T x^T = B^T$。

$$(A^T|B^T)\rightarrow(E|x^T)。$$

通过逆求解：$Ax = B$，$x = A^{-1}B$

可逆矩阵及其逆矩阵

定义：设A是n阶矩阵，如果存在n阶矩阵H，使得$AH = E$，且$HA = E$，则称A是可逆矩阵，称H是A的逆矩阵，证作A^{-1}。

定理：n阶矩阵A可逆$\Leftrightarrow |A|\neq 0$

求A^{-1}的方程（初等变换法）

$$(A|E)\xrightarrow{行}(E|A^{-1})$$

伴随矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ij})^T$$

线性表示

β可以用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，即$\beta$可以表示为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的线性组合，

也就是存在$c_1,c_2,\cdots,c_s$使得 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_s\alpha_s = \beta$

记号：$\beta \rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

线性相关性

线性相关：存在向量α_i可用其它向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$线性表示。

线性无关：每个向量α_i都不能用其它向量线性表示

定义：如果存在不全为0的$c_1,c_2,\cdots,c_s$，使得$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s=0$则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，否则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关。

即：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相（无）关$\Leftrightarrow x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s=0$有（无）非零解

$\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)x=0$有（无）非零解

极大无关组和秩

定义：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个部分组$(I)$称为它的一个极大无关组，如果满足：

i）(I)线性无关。

ii）(I)再扩大就相关。

$$(I)\rightleftarrows\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s \quad (II)\cong\alpha_1\cdots\alpha_s\cong(I)$$

定义：规定$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩$\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\#(I)$。

如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$每个元素都是零向量，则规定其秩为0。

$$0\le\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\le\min\{n,s\}$$

有相同线性关系的向量组

定义：两个向量若有相同个数的向量：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，并且向量方程

$x_1,\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$与$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$同解，则称它们有相同的线性关系。

①对应的部分组有一致的相关性。

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$的对应部分组$\beta_1,\beta_2,\beta_4$，

若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$相关，有不全为0的$c_1,c_2,c_4$使得

$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_4\alpha_4=0$，

即$(c_1,c_2,0,c_4,0,\cdots,0)$是$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$的解，

从而也是$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$的解，则有

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_4\beta_4 = 0,$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也相关。

②极大无关组相对应，从而秩相等。

③有一致的内在线表示关系。

设：$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$，$B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$，则

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 即 $Ax = 0$，

$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_s\beta_s = 0$ 即 $Bx = 0$。

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 有相同的线性关系即 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解。

反之，当 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解时，A 和 B 的列向量组有相同的线性关系。

矩阵的秩

定理：矩阵 A 的行向量组的秩=列向量组的秩

规定 $r(A) =$ 行（列）向量组的秩。

$r(A)$ 的计算：用初等变换化 A 为阶梯形矩阵 B，则 B 的非零行数即 $r(A)$。

命题：$r(A) = A$ 的非零子式阶数的最大值。

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

方程组的表达形式

1. $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

2. $Ax = \beta$ $\quad$ η 是解 $\Leftrightarrow A\eta = \beta$

3. $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ $\quad$ 有解 $\Leftrightarrow \beta \to \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$

基础解系和通解

1. $Ax = 0$ 有非零解时的基础解系

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_e$是$Ax=0$的基础解系的条件：

①每个η_i都是$Ax=0$的解

②$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_e$线性无关

③$Ax=0$的每个解$\eta\to\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_e$

③′ $l=n-\gamma(A)$

通解

①如果$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_e$是$Ax=0$的一个基础解系，则$Ax=0$的通解为

$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_e\eta_e$，$c_i$任意

②如果ξ_0是$Ax=\beta(\beta\neq 0)$的一个解，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_e$是$Ax=0$的基础解系，则$Ax=\beta$的通解为

$\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_e\eta_e$，$c_i$任意

特征向量与特征值

定义：如果$\eta\neq 0$，并且$A\eta$与η线性相关，则称η是A的一个特征向量。此时，有数λ，使得$A\eta=\lambda\eta$，称λ为η的特征值。

设A是数量矩阵λE，则对每个n维列向量η，$A\eta=\lambda\eta$，于是，任何非零列向量都是λE的特征向量，特征值都是λ。

①特征值有限特征向量无穷多

若$A\eta=\lambda\eta$，$A(c\eta)=cA\eta=c\lambda\eta=\lambda(c\eta)$

$$\left.\begin{array}{l}A\eta_1=\lambda\eta_1\\A\eta_2=\lambda\eta_2\end{array}\right\}\Rightarrow A(c_1\eta_1+c_2\eta_2)=c_1A\eta_1+c_2A\eta_2=\lambda(c_1\eta_1+c_2\eta_2)$$

②每个特征向量有唯一特征值，而有许多特征向量有相同的特征值。

③计算时先求特征值，后求特征向量。

特征向量与特征值计算

$A\eta=\lambda\eta,\eta\neq 0$

$\Leftrightarrow(\lambda E-A)\eta=0,\eta\neq 0$

$\Leftrightarrow\eta$是$(\lambda E-A)x=0$的非零解

命题：①λ是A的特征值$\Leftrightarrow\left|\lambda E-A\right|=0$

②η是属于λ的特征向量$\Leftrightarrow\eta$是$(\lambda E-A)x=0$的非零解

称多项式$\left|xE-A\right|$为A的特征多项式。

λ是A的特征值$\Leftrightarrow\lambda$是A的特征多项式$\left|xE-A\right|$的根。

λ的重数：λ作为$\left|xE-A\right|$的根的重数。

n阶矩阵A的特征值有n个：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，可能其中有的不是实数，有的是多重的。

计算步骤：

①求出特征多项式$\left|xE-A\right|$。

②求$\left|xE-A\right|$的根，得特征值。

③对每个特征值λ_i，求$(\lambda_i E-A)x=0$的非零解，得属于λ_i的特征向量。

n 阶矩阵的相似关系

设A，B是两个n阶矩阵。如果存在n阶可逆矩阵U，使得$U^{-1}AU=B$，则称A与B相似，记作$A\sim B$。

n 阶矩阵的对角化

基本定理 A可对角化$\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量。

设可逆矩阵$U=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，则

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&\lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=U\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&\lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1\eta_1,\lambda_2\eta_2,\cdots,\lambda_n\eta_n)$$

$$\Leftrightarrow A\eta_i=\lambda_i\eta_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

判别法则

A可对角化$\Leftrightarrow$对于A的每个特征值λ，λ的重数$=n-\gamma(\lambda E-A)$。

计算：对每个特征值λ_i，求出$(\lambda_i E-A)x=0$的一个基础解系，把它们合在一起，得到n个线

性无关的特征向量，$\eta_1,\cdots,\eta_n$。令$U=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，则

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$$，其中λ_i为η_i的特征值。

二次型（实二次型）

二次型及其矩阵

一个n元二次型的一般形式为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j$$

只有平方项的二次型称为标准二次型。

形如：$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$的$n$元二次型称为规范二次型。

对每个n阶实矩阵A，记$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，则x^TAx是一个二次型。

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$$

称A的秩$\gamma(A)$为这个二次型的秩。

标准二次型的矩阵是对角矩阵。

规范二次型的矩阵是规范对角矩阵。

可逆线性变量替换

设有一个n元二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，引进新的一组变量$y_1,y_2,\cdots,y_n$，并把$x_1,x_2,\cdots,x_n$用它们表示。

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n\\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n\\ \cdots\\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n\end{cases}$$ （并要求矩阵$C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}$是可逆矩阵）

代入$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,得到$y_1,\cdots,y_n$的一个二次型$g(y_1,\cdots,y_n)$这样的操作称为对$f(x_1\cdots x_n)$作了一次可逆线性变量替换。

设$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，则上面的变换式可写成

$$\boxed{x=CY}$$

则$f(x_1\cdots x_n)=x^TAx=Y^TC^TACY=g(y_1,\cdots,y_n)$

于是$g(y_1,\cdots y_n)$的矩阵为C^TAC

$$\left(C^T AC\right)^T = C^T A^T C^T = C^T AC$$

实对称矩阵的合同

两个n阶实对称矩阵A和B，如果存在n阶实可逆矩阵C，值得$C^T AC = B$。称A与B合同，

记作$A \simeq B$。

命题：二次型$f\left(x_1 \cdots x_n\right) = x^T Ax$可用可逆线性变换替换化为

$$g\left(y_1 \cdots y_n\right) = Y^T BY \Leftrightarrow A \simeq B$$

二次型的标准化和规范化

1．每个二次型都可以用可逆线性变量替换化为标准二次型和规范二次型。

也就是每个实对称矩阵都会同于对角矩阵和规范对角矩阵。

设A是一个实对称矩阵，则存在正交矩阵Q，使得$D = Q^{-1}AQ$是对角矩阵。

$$Q^T AQ = Q^{-1}AQ = D \qquad A \sim D，\ A \simeq D$$

2．标准化和规范化的方法

①正交变换法

② 配方法

3．惯性定理与惯性指数

定理：一个二次型用可逆线性变换替换化出的标准形的各个平方项的系数中，大于 0 的个数和小于 0 的个数是由原二次型所决定的，分别称为原二次型的正、负惯性指数。

一个二次型化出的规范二次型在形式上是唯一的，也即相应的规范对角矩阵是唯一的。

用矩阵的语言来说：一个实对称矩阵A合同于唯一规范对角矩阵。

定理：二次型的正、负惯性指数在可逆线性变量替换下不变；两个二次型可互相转化的充要条件是它们的正、负惯性指数相等。

实对称矩阵的正（负）惯性指数就等于正（负）特征值的个数。

正定二次型与正定矩阵

定义：一个二次型$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$称为正定二次型，如果当$x_1, \cdots, x_n$不全为 0 时，

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) > 0。$$

例如，标准二次型$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$正定$\Leftrightarrow d_i > 0$，$i = 1, \cdots, n$

（必要性“$\Rightarrow$”，取$x_1 = 1$，$x_2 = \cdots = x_x = 0$，此时$f\left(1,0,\cdots,0\right) = d_1 > 0$同样可证每个$d_i > 0$）

实对称矩阵正定即二次型 $x^T Ax$ 正定，也就是：当 $x \neq 0$ 时，$x^T Ax > 0$。

例如实对角矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ 正定 $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$，$i = 1, \cdots, n$

定义：设 A 是一个 n 阶矩阵，记 A_r 是 A 的西北角的 r 阶小方阵，称 $\left|A_r\right|$ 为 A 的第 r 个顺序主子式（或 r 阶顺序主子式）。

附录一　内积，正交矩阵，实对称矩阵的对角化

一．向量的内积

1．定义

两个 n 维实向量 α, β 的内积是一个数，记作 (α, β)，规定为它们对应分量乘积之和。

设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则 $(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \ = \alpha^T \beta$

2．性质

①对称性：$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

②双线性性质：$(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$

$$(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha, \beta_1) + (\alpha, \beta_2)$$

$$(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta) = (\alpha, c\beta)$$

③正交性：$(\alpha, \alpha) \geq 0$，且 $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$　　$(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

3．长度与正交

向量 α 的长度 $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$

$\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

$\|c\alpha\| = |c| \|\alpha\|$

单位向量：长度为1的向量

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，

若$\alpha \neq 0$，则$\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$是单位向量，称为$\alpha$的**单位化**。 $\left\|\frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right\| = \frac{1}{\|\alpha\|}\|\alpha\| = 1$

两个向量α, β如果内积为 0：$(\alpha, \beta) = 0$，称它们是**正交**的。

如果n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$两两正交，并且每个都是单位向量，则称为单位**正交向量组**。

例 1．如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$两两正交，并且每个向量都不为零向量，则它们线性无关。

证：记$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$，则

$$A^T A = \begin{pmatrix} \|\alpha_1\|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \|\alpha_2\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \|\alpha_s\|^2 \end{pmatrix}$$

则$r(A^T A) = s, \Rightarrow r(A) = s$即$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = s$。

例 2．若A是一个实的矩阵，则$r(A^T A) = r(A)$。

二．正交矩阵

一个实n阶矩阵A如果满足$AA^T = E$，就称为正交矩阵。$A^T = A^{-1}$

定理　A是正交矩阵$\Leftrightarrow A$的行向量组是单位正交向量组。
$\Leftrightarrow A$的列向量组是单位正交向量组。

例 3．正交矩阵A保持内积，即

$(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$

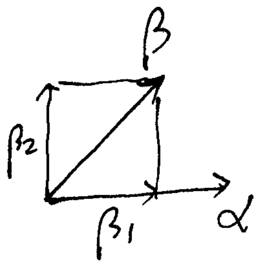
$\|A\alpha\| = \|\alpha\|$

证：$(A\alpha, A\beta) = \alpha^T A^T A\beta = \alpha^T \beta = (\alpha, \beta)$

例 4．（04）A是 3 阶正交矩阵，并且$a_{11} = 1$，求$Ax = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$的解。

三．施密特正交化方法

这是把一个线性无关的向量组改造为与之等价的单位正交向量组的方法。



$\beta_2 = \beta - \beta_1 = \beta - c\alpha$

设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关

①正交化：令$\beta_1 = \alpha_1$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

（设$\beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1$，$(\beta_2, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_1) - k(\beta_1, \beta_1)$

当$k = \dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}$时，$\beta_2, \beta_1$正交。）

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\beta_1, \alpha_3)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\beta_2, \alpha_3)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

②单位化：令$\eta_1 = \dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$，$\eta_2 = \dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$，$\eta_3 = \dfrac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$

则η_1, η_2, η_3是与$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$等价的单位正交向量组。

四．实对称矩阵的对角化

设A是一个实的对称矩阵，则

①A的每个特征值都是实数。

②对每个特征值λ，重数$= n - r(\lambda E - A)$。即A可以对角化。

③属于不同特征值的特征向量互相正交。

于是：存在正交矩阵Q，使得$Q^{-1}AQ$是对角矩阵。

对每个特征值λ，找$(\lambda E - A)x = 0$的一个单位正交基础的解，合在一起构造正交矩阵。

设A是6阶的有3个特征值λ_1（二重），λ_2（三重），λ_1（一重）

找λ_1的2个单位正交特征向量η_1, η_2。

找λ_2的3个单位正交特征向量η_3, η_4, η_5。

找λ_3的一个单位特征向量η_6。

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5,\eta_6)$$

例 5.（04） A 是 3 阶实对称矩阵，$r(A)=2$，6 是它的一个二重特征值，

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ 都是属于 6 的特征向量。

（1）求 A 的另一个特征值。

（2）求 A。

解：（1）另一个特征值为 0。

（2）设 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 是属于 0 的特征向量，则

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\2x_1+x_2+x_3=0\\x_1-2x_2+3x_3=0\end{cases}$$

此方程组 $n=3$，$r(A)=2$，$n-r(A)=1$，基础解系包含一个解，任何两个解都相关。

于是，每个非零解都是属于 0 的特征向量。

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\1&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \eta=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\text{是一个解。}$$

$$A\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&12&0\\6&6&0\\0&6&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&6&6&0\\2&1&1&12&6&6\\1&-1&-1&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&4&2&2\\0&1&0&2&4&-2\\0&0&1&2&-2&4\end{array}\right)$$

$$A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$$

附录二　向量空间

1．n 维向量空间及其子空间

记为 R^n 由全部 n 维实向量构成的集合，这是一个规定了加法和数乘这两种线性运算的集合，我

们把它称为n维向量空间。

设V是R^n的一个子集，如果它满足

（1）当α_1,α_2都属于V时，$\alpha_1+\alpha_2$也属于V。

（2）对V的每个元素α和任何实数c，$c\alpha$也在V中。

则称V为R^n的一个子空间。

例如n元齐次方程组$AX=0$的全部解构成R^n的一个子空间，称为$AX=0$的解空间。

但是非齐次方程组$AX=\beta$的全部解则不构成R^n的子空间。

对于R^n中的一组元素$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，记它们的全部线性组合的集合为

$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\{c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s \mid c_i\text{任意}\}$，它也是$R^n$的一个子空间。

2．基，维数，坐标

设V是R^n的一个非0子空间（即它含有非0元素），称V的秩为其维数，记作$\dim V$。

称V的排了次序的极大无关组为V的基。

例如$AX=0$的解空间的维数为$n-r(A)$，它的每个有序的基础解系构成基。

又如$\dim[L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)]=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的每个有序的极大无关组构成基。

设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$是$V$的一个基，则$V$的每个元素$\alpha$都可以用$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$唯一线性表示：

$$\alpha=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_k\eta_k$$

称其中的系数$(c_1,c_2,\cdots,c_k)$为α关于基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$的坐标，它是一个$k$维向量。

坐标有线性性质：

（1）两个向量和的坐标等于它们的坐标的和：

如果向量α和β关于基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$的坐标分别为$(c_1,c_2,\cdots,c_k)$和$(d_1,d_2,\cdots,d_k)$，则$\alpha+\beta$关于基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$的坐标为

$$(c_1+d_1,c_2+d_2,\cdots,c_k+d_k)=(c_1,c_2,\cdots,c_k)+(d_1,d_2,\cdots,d_k)$$

（2）向量的数乘的坐标等于坐标乘数：

如果向量α关于基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$的坐标为$(c_1,c_2,\cdots,c_k)$，则$c\alpha$关于基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$的坐标为$(cc_1,cc_2,\cdots,cc_k)=c(c_1,c_2,\cdots,c_k)$。

坐标的意义：设V中的一个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$关于基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$的坐标依次为$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$和$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$有相同的线性关系。

于是，我们可以用坐标来判断向量组的相关性，计算秩和极大无关组等等。

3．过渡矩阵，坐标变换公式

设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$和$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$都是$V$的一个基，并设$\xi_1$在$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$中的坐标为$(c_{1i},c_{2i},\cdots,c_{ki})$，构造矩阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix},$$

称C为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$到$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$的过渡矩阵。

$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k)C$。

如果V中向量α在其$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$和$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$中的坐标分别为

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_k)^T$和$y=(y_1,y_2,\cdots,y_k)^T$，则

$$\alpha=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k)x$$

$$\alpha=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)\,y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k)Cy$$

于是关系式：

$$x=Cy$$

称为坐标变换公式。

4．规范正交基

如果V的一基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k$是单位正交向量组，则称为规范正交基。

两个向量的内积等于在规范正交基下的它们坐标的内积。

设α的坐标为$(c_1,c_2,\cdots,c_k)$，β的坐标为$(d_1,d_2,\cdots,d_k)$，

则$(\alpha,\beta)=c_1d_1+c_2d_2+\cdots+c_kd_k$

两个规范正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵。

做题思路

先化简再计算

例 5．（03）设n维列向量$\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T$，$a<0$。规定$A=E-\alpha\alpha^T$，$B=E-\frac{1}{a}\alpha\alpha^T$。已知$AB=E$，求$a$。

注意化简技巧（中间过程也很重要）

例 13．（00）已知$A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，求矩阵$B$，使得$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$.

证明一个矩阵可逆切入点　　行列式=0 ，证明 Ax=E ，

证明两式相等切入点　AB=某个等式=BA

（从对称性想到 AB 可逆 BA 也可逆的着手点$AB=E\Leftrightarrow BA=E$）

例 20．设n阶矩阵A和B满足等式$AB=aA+bB$，$ab\neq 0$，证明：$AB=BA$