$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ A、B为矩阵

定义 $f(A)\triangleq a_0E_n+a_1A+\cdots a_mA^m$

$f(A)g(A)=g(A)f(A) \Leftarrow A^kA^l=A^{k+l}=A^lA^k$

$\Rightarrow$

$f(A)g(B)\neq g(B)f(A)$ $(a_0E_n+\cdots+a_mA^m)(b_0E_n+\cdots+b_pA^p)$

$=a_mb_pA^{m+p}$ ……

方阵 $A_{n\times n}=\overset{n\times 1}{\alpha}\overset{1\times n}{\beta^T}$ $\alpha,\beta\in F^{n\times 1}$ (秩为1)

$\Rightarrow$数

$A^m=(\alpha\beta^T)^m=\underbrace{(\alpha\overbrace{\beta^T)(\alpha}^{1\times n\ n\times 1\Rightarrow 1\times 1}\beta^T)\cdots(\alpha\beta)^T}_{m个}$

$=\alpha(\beta^T\alpha)^{m-1}\beta^T$

$=(\beta^T\alpha)^{m-1}\alpha\beta^T$

例：A为n阶方阵 $A^k=0$，k为正整数

证明：$E-A$可逆

分析：$x^k=0$

$1-x\neq 0$

$(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1})$

$=1+x+\cdots+x^{k-1}-(x+x^2+\cdots+x^{k-1}+x^k)$

$=1-x^k$

[证]

$A^k=0$

$(E-A)(E_n+A+\cdots+A^{k-1})=E_n-A^k=E_n$

$(E-A)^{-1}=E_n+A+\cdots+A^{k-1}$ $E-A$ 可逆

例2. A为n阶方阵

$f(x)=a_0+a_1A+\cdots+a_{m-1}A^{m-1}+A^m$

$f(A)=0$，证明：A可逆

分析：$A(\quad)=E_n$

$\Downarrow$

[证] $A(a_1+\cdots+a_{m-1}A^{m-2}+A^{m-1})$

$=f(A)-a_0E_n$

$A(\quad)=-a_0E_n$ => 可逆

=> A可逆 且 $A^{-1}=-a_0^{-1}(a_1+\cdots+a_{m-1}A^{m-2}+A^{m-1})$

3. A、B为n阶方阵，且满足 $AB=A+B$

证明：$AB=BA$

分析 $ab=a+b$

$\Rightarrow (a-1)(b-1)=1$

$\downarrow$

$(A-E)(B-E)=E$

$AB=BA$

$(B-E)(A-E)$

$=BA-B-A+E$

[证] $AB=A+B$

$(A-E)(B-E)=E$

$A-E$、$B-E$ 都可逆

又 $(B-E)(A-E)$

$=BA-B-A+E$

又 $(A-E)(B-E)=(B-E)(A-E)$

$AB=BA$

例4. 思考：若 $h(x)=x^{-1}+x$，什么是 $h(A)$