A是$m\times n$矩阵,若对任意$n\times 1$矩阵X都有$AX=O_{m\times 1}$

不可逆

试证 $A=O$

反证法：假设 $A\neq 0$

$$A\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to j$$

$$AX=\begin{bmatrix} a_{ij} \\ a \\ \vdots \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{矛盾}, \quad A=0$$

或 $$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$AX=\begin{bmatrix} a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1+a_{m2}b_2+\cdots+a_{mn}b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad A=[0]$$

设A是n阶实对称矩阵，且$A^2=0$，证明$A=0$

$AA=0 \qquad AA=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}=0$

$A=A' \Rightarrow a_{kj}=a_{jk}$ （对称）

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}=0 \qquad i=j$

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2=0 \qquad a_{ik}=0$

$A=[0]$

计算 $\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&4\end{bmatrix}^n$ => 非计算的证明题

当n=1时 原式 $=\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&4\end{bmatrix}$

设当n=k时 $\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&4\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}2^k&&\\&3^k&\\&&4^k\end{bmatrix}$

当n=k+1时 $\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&4\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}2^k&&\\&3^k&\\&&4^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{k+1}&&\\&3^{k+1}&\\&&4^{k+1}\end{bmatrix}$

由归纳可得

$\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&4\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}2^n&&\\&3^n&\\&&4^n\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n$$

当 $n=1$ 时 $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

当 $n=2$ 时 $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

当 $n=3$ 时 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]$

原式 $= \begin{cases} \cdots & n=1 \\ \cdots & n=2 \\ \cdots & n\geq 3 \end{cases}$

C_n^i 为组合数

证明：如果 $AB=BA$，则 $(A+B)^n = \sum_{i=1}^{n} C_m^i A^i B^{m-k}$ $(m\geq 1)$

1) $m=1$ 时

$$\sum_{k=0}^{1} C_1^k A^k B^{1-k} = C_1^0 A^0 B^1 + C_1^1 A^1 B^0 = A+B$$

2) 当 $m=l$ 成 $\Rightarrow$ $m=l+1$ 成立

$$(A+B)^l = \sum_{k=0}^{l} C_l^k A^k B^{l-k}$$

$$(A+B)^{l+1} = (A+B)^{l}(A+B) = \left(\sum_{k=0}^{l} C_l^k A^k B^{m-k}\right)(A+B)$$

$$= (三项 \cdots\cdots 三项)$$

$$= \sum_{k=0}^{l+1} C_{l+1}^k A^k B^{l+1-k}$$

[注]:(个人写法,仅参考)

对 $(A+B)^m = \underbrace{(A+B)(A+B)(A+B)\cdots(A+B)}_{m}$

$$= \underbrace{AAA\cdots A}_{m个A} + ABA\cdots A + \cdots + \underbrace{BBBBB\cdots B}_{m个B}$$

又 $AB=BA$

对 $ABABA\cdots A$ 可转化为 $\underbrace{AAA\cdots BBB}_{共m个}$

由二项式定理展开

故原式 $= \sum_{k=0}^{l} C_l^k A^k B^{l-k}$

计算 $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$

① $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(A+B)^n = \sum_{i=1}^{n} C_n^k \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{n-k}$ 当 $n \geq 3$ 时

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n+1)}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

②

$n=1$ $\quad$ $n=2$ $\quad$ $n=3$ $\quad$ $n=4$ $\quad$ $n=5$

$$\begin{bmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2a&a^2\\0&1&2a\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&3a&3a^2\\0&1&3a\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&4a&6a^2\\0&1&4a\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&5a&10a^2\\0&1&5a\\0&0&0\end{bmatrix}$$

找到规律后数学归纳法

求 $\begin{bmatrix}1&-\tan\frac{\pi}{3}\\\sqrt{3}&1\end{bmatrix}^n$，其中 n 为正整数

$$-\tan\frac{\pi}{3}=-\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\quad\cdots\cdots$$

$$2^n\begin{bmatrix}\cos\frac{n\pi}{3}&-\sin\frac{n\pi}{3}\\\sin\frac{n\pi}{3}&\cos\frac{n\pi}{3}\end{bmatrix}$$

计算 $\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}^n$

$n=1$ $\quad$ $n=2$ $\quad$ $n=3$ $\quad$ $n=4$

$$\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}\quad 5^2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad 5^2\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}\quad 5^4\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots$$

计算 $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(2\ 1\ 2)\right]^n$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left[(2\ 1\ 2)\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\right]\quad\cdots\cdots$$

计算 $\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}^4 \right|$

$$= \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \right|^4$$

算

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 求逆矩阵 (先判断是否可逆)

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 求X

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

试证：若对某正整数 k，方阵 $A^k=0$

则 $(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}$

$$(E-A)(E+A+\cdots+A^{k-1})=E$$

$$(E+A+\cdots+A^{k-1})(E-A)=E$$

设 A 为 n 阶方阵，$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$a_0\neq 0$，

且 $f(A)=0$，试证 A 可逆，并用 A 表示 A^{-1}

$$f(A)=0$$

补E

$$A^n+a_{n-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E=0$$

$$A^m+a_{n-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A=-a_0E$$

除

$$\underbrace{-\frac{1}{a_0}\left(A^{m-1}+a_{n-1}A^{m-2}+\cdots+a_1E\right)}_{A^{-1}}A=E$$

B为4×3的非零矩阵，且 $BA=0$，求 t.

设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&t\\3&1&1\end{pmatrix}$

$BA=0$

当 A 可逆 $BAA^{-1}=0$

$B=0$

当 A 不可逆 $|A|=0$

$t=\cdots$

25. 设A为n阶可逆方阵，$n \geq 2$，A^*为A的伴随矩阵，试证：

(1) $A^* = |A| A^{-1}$

由$AA^* = |A|E$（推论）

又A可逆

$A^* = |A| E A^{-1} = |A| A^{-1}$

(2) $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A = (A^{-1})^*$

$A^* \left(\frac{1}{|A|} A\right) = \left(\frac{1}{|A|} A\right) A^* = E_n$

$(A^{-1})^* A^{-1} = |A^{-1}| E_n$

$(A^{-1})^* = |A^{-1}| A = \frac{1}{|A|} A$

(3) $(-A)^* = (-1)^{n-1} A^*$

$(-A)^*(-A) = |-A| E_n = (-1)^n |A| E_n$

$\Rightarrow (-A)^* = (-1)^{n-1} |A| E_n$

$= (-1)^{n-1} |A| A^{-1} = (-1)^{n-1} A^*$

设3阶方阵A的行列式 $|A|=4$，求

(3) $\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-\frac{1}{2}A^*\right|$；

$\left|\frac{1}{4}A\right|^{-1}-\frac{1}{2}A^*\right|$

$=\left|4A^{-1}-\frac{1}{2}A^*\right|$

$=\left|\frac{4A^*}{|A|}-\frac{1}{2}A^*\right|=\left|\frac{1}{2}A^*\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^3|A^*|=\frac{1}{8}|A|^{3-1}=2$

$R(A)=2$ $|3A^*-2A|$

铁

$A_{孩}$ $3,4=0$ $=0$