1.

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ x & 4 & 6\\ 3 & y & 9\end{bmatrix}$$

$$C\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4-2x & 6-3x\\ 0 & y-6 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}=0 & x=2\\ =0 & y=6\end{matrix}$$ 讨论

2. 设 A 是 n 阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，

试证

$$R(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n \text{ 时}\\ 1, & R(A)=n-1 \text{ 时}\\ 0, & R(A)<n-1 \text{ 时}\end{cases}$$

(1) 当 $R(A)=n$ 时，

$|A|\neq 0$

$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$

$R(A^*)=n$

(2) 当 $R(A)=n-1$ 时，在 $|A|=0$

$AA^*=|A|E=0$

$AA^*=0$

$R(A)+R(A^*)\leq n$

$R(A^*)\leq n-(n-1)=1$

又 $R(A^*)\neq 0$（在 $R(A)=n-1$ 时）

$R(A^*)=1$

(iii) 当 $R(A)<n-1$ 时

$A^* = [0]$

$R(A^*) = 0$

3. 设 $A=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 矩阵，称

$tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 为 A 的迹

设 A, B 都是 $n\times n$ 矩阵，证明：

(1) $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$

(2) $tr(kA)=k\,tr(A)$

(3) $tr(AB)=tr(BA)$

(4) $AB-BA\neq E_n$

(5) 若 A 还是可逆矩阵，则 $tr(ABA^{-1})=tr(B)$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(1) $$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$\therefore tr(A+B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=tr(A)+tr(B)$

(2) $tr(kA) = \sum_{i=1}^{n} k a_{ii} = k\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = k\,tr(A)$

(3) $tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$

$tr(BA) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$

(4) $tr(AB-BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0$

$tr(E_n) = n,\ n \neq 0$

$\therefore AB-BA \neq E_n$

(5) $tr(ABA^{-1}) = tr[(BA^{-1})A]$

$= tr(BE) = tr(B)$

4. 设$A^2=E_n$，证明 $R(A+E_n)+R(A-E_n)=n$.

$(A+E)+(A-E)=2A$

$n=R(A)=R(2A) \leq R(A+E)+R(A-E)$

$A^2=E_n$

$(A+E)(A-E)=0$

$0=R[(A+E)(A-E)] \geq R(A+E)+R(A-E)-n$

$n \geq R(A+E)+R(A-E)$

$\therefore R(A+E_n)+R(A-E_n)=n$.

5. 设A是 $m\times n$ 矩阵，B是 $n\times p$ 矩阵，$R(A)=n$，

试证：$R(AB)=R(B)$

$$R(AB)\le \min\{n, R(B)\}\le R(B)$$

$$R(AB)\ge R(B)+R(A)-n=R(B)$$

$$\therefore R(AB)=R(B)$$

6. 设A，B都是 $m\times n$ 矩阵，A经初等行变换

可化成B，若记 $A=(a_1, a_2\cdots a_n)$ $B=(\beta_1, \beta_2\cdots\beta_n)$

则当 $\beta_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} k_j\beta_j$ 时，$a_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} k_j a_j$

$$\beta_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} k_i\beta_j$$

$$Pa_i=\beta_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}} k_i\beta_j=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} k_j Pa_j$$

初行

$$a_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} k_j a_j$$

7.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{2n}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}^{2n} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{2n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix} 5^{2n} & 0 \\ 0 & 5^{2n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{n}$$

$n=2$ $\begin{bmatrix} 1 & 1+4 \\ 0 & 4^2 \end{bmatrix}$

$n=3$ $\begin{bmatrix} 1 & 1+4+4^2 \\ 0 & 4^3 \end{bmatrix}$

数学归纳法

$\cdots$ $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3}(4^n-1) \\ 0 & 4^n \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5^{2n} & 0 & & \\ 0 & 5^2 & & \\ & & 1 & \frac{1}{3}(4^n-1 \\ & & 0 & 4^n \end{bmatrix}$$

8. 设A是n阶方阵，证明：若对任意$n\times1$矩阵B，$AX=B$都有解，则A是可逆矩阵

取 $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ......

存在 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 使

$$AX_i = a_n$$

令 $C = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$$AC = (AX_1, AX_2, \cdots AX_n]$$

$$= (a_1, a_2, \cdots a_n] = E_n$$

$\therefore$ A可逆

9. 设 A, B 都是 $m\times n$ 矩阵，证明：A经初等变换可以化为B的充要条件是 $R(A) = R(B)$

$R(A) = R(B)$

$$P_1AQ_1 = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$P_2BQ_2 = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$P_1AQ_1 = P_2BQ_2 \Rightarrow P_2^{-1}P_1AQ_1Q_2^{-1} = B$$

10 $\begin{vmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{vmatrix} = |E_m - AB| = |E_n - BA|$ (X)

11. 若A是n阶方阵，$A^2=A$，$A=0$ 或 $A=E_n$ (×)

$$A(A-E)=0$$

$(A-E)^{-1}$ $\quad A^{-1} \Rightarrow A\neq 0$

$A-E\neq 0$

$A\neq E$

12. 设A是 $m\times n$ 矩阵，B是 $n\times m$ 矩阵，若 $m>n$，则 $|AB|=0$

(√)

$|AB|=0$

$AB \quad m\times m$

$R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}=n$

$|AB|=0$

13. $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=0$，$i=1,2,\cdots,n$，则A不可逆 (√)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times X = AX = \begin{bmatrix} a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}+\cdots+a_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} =0 \\ \\ =0 \end{matrix}$$

$X=\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ 又由"$AX=b$ 有唯一解则 $|A|\neq 0$"

故 A可逆

14 略

15. $A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ 矩阵B满足$AB=A+B$，求B

$A+B=A+B$

$AB-A-B+E_4=E_4$

$(A-E_4)(B-E_4)=E_4$

$(B-E_4)=(A-E_4)^{-1}$

算...

求逆：$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ 分别求A_{11}^{-1} A_{12}^{-1} A_{22}^{-1}

$\left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & E_2 & \\ 0 & A_{22} & & E_2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} E_2 & & A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ & E_2 & 0 & A_{22}^{-1} \end{array}\right]$