No. psp_dada

Date

线性代数与空间解析几何

第一章 行列式

行 row 列 column

1.逆序数 ·把n个不同元素不重不漏地排成一列,叫这n个元素的全排列(排列)

·给定n个不同元素的排列共有$n!$种 (奇、偶排列各为$\frac{n!}{2}$种)

·对排列$p_1p_2\cdots p_n$, p_i的逆序数:排在p_i前且比p_i大的数的个数t_i

排列的逆序数: $t(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n$

2、一个排列中任意两个数经过一次对换,排列/逆序数的奇偶性改变一次

3、$D_n=|a_{ij}|_{n\times n}=\sum(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$

$=\sum\limits_{p_1\cdots p_n}(-1)^{t(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=\sum\limits_{p_1\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$

行列式的性质

1、$D=D^T$ 行列式与它的转置行列式相等 对方阵A,有$|A|=|A^T|$

⇒对行列式关于"行"成立的性质,对于"列"同样成立

2、互换行列式的两行(列),行列式变号 △换法变换使行列式变号

⇒若行列式两行(列)完全相同,则行列式为0

3、$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\underline{k}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ 行列式一行(列)的公因子可以外提

$\alpha_i\in F^n$, $|\alpha_1,\cdots,k\alpha_i,\cdots,\alpha_n|=k|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n|$

⇒若行列式两行(列)元素成比例,则行列式为0

4、$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

即$|\alpha_1,\cdots,\beta_1+\beta_2,\cdots,\alpha_n|$

$=|\alpha_1,\cdots,\beta_1,\cdots,\alpha_n|+|\alpha_1,\cdots,\beta_2,\cdots,\alpha_n|$

☆5、消法变换不改变行列式的值 (即:把行列式一行的倍数加到另一行,行列式不变)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

6、行列式按行(列)展开法则

定义: a_{ij}的余子式M_{ij},

代数余子式$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

按行展开 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

按列展开 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

7、拉普拉斯展开定理

KOKUYO

No.

Date

特殊行列式

1、一阶行列式 $D=|a|=a$

2、二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

3、三阶行列式 对角线法则求解

4、对角形行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \; a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$

5、上(下)三角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \; a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ * & & \ddots \; a_{nn} \end{vmatrix}=\prod\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$

6、次对角线，$D=\begin{vmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & \\ \lambda_n & & 0 \end{vmatrix}=\underline{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$

$t(n\ n-1\ n-2\cdots 2\ 1)=1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$

$\begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & \\ a_{n1} & & * \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} * & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix}=\underline{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}a_{i,n-i+1}$

7、Vandermonde(范德蒙德)行列式

$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$，$n\ge 2$

←第一行(列)全为1

eg. $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 9 \\ 3\sqrt{3} & -1 & 8 & 27 \\ 9 & 1 & 16 & 81 \end{vmatrix}=-6\sqrt{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 9 \\ 3\sqrt{3} & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$

$=-6\sqrt{3}(3-2)(3+1)(3-\sqrt{3})(2+1)(2-\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})$

8、箭型行列式 化为上三角

$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_2 & & & \\ 1 & & x_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & x_n \end{vmatrix}\xrightarrow[i=2,3\cdots n]{c_1+(-\frac{1}{x_i})c_i}\begin{vmatrix} x_1-\frac{1}{x_2}-\cdots-\frac{1}{x_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 & & & \\ 0 & & x_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & x_n \end{vmatrix}=\left(\prod\limits_{i=2}^{n}x_i\right)\left(x_1-\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{1}{x_j}\right)$

9、各行(列)元素和相等的行列式 ⇒ 构造行(列)和 累加法

eg. $D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & 1+x_2 & & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i & 1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i & \cdots & 1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i \\ x_2 & 1+x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}=\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & 1+x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}$

$\xrightarrow[i=2,3\cdots n]{r_1+(-x_i)r_1}\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix}=1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$

或 $\xrightarrow[i=2,3\cdots n]{c_i-c_1}\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\begin{vmatrix} 1 & & \\ x_2 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \\ x_n & 0 & \cdots \; 1 \end{vmatrix}=1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$

10、两三角型行列式　　特征为对角线上方元素均为a,下方元素均为b

① a=b时,化为箭型行列式计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & b & b & \cdots & b \\ b & x_2 & b & \cdots & b \\ b & b & x_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3\cdots n]{r_i+(-1)r_1} \begin{vmatrix} x_1 & b & b & \cdots & b \\ b-x_1 & x_2-b & & & \\ b-x_1 & & x_3-b & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b-x_1 & & & & x_n-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+b\left(\frac{x_1-b}{x_2-b}+\frac{x_1-b}{x_3-b}+\cdots+\frac{x_1-b}{x_n-b}\right) & b & b & \cdots & b \\ 0 & x_2-b & & & \\ 0 & & x_3-b & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & x_n-b \end{vmatrix}$$

$$\therefore D_n=\left[\prod_{i=2}^{n}(x_i-b)\right]\left[x_1+b(x_1-b)\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{x_j-b}\right]$$

② a≠b时采用拆行法,目的是降阶　拆行降阶

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a+0 \\ b & x_2 & a & \cdots & a+0 \\ b & b & x_3 & \cdots & a+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_n+b-b \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & b \end{vmatrix}}_{D'} + \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & 0 \\ b & x_2 & a & \cdots & 0 \\ b & b & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_n-b \end{vmatrix}}_{D''}$$

$$D''\xlongequal{按第n列展开}(x_n-b)\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_{n-1} \end{vmatrix}=(x_n-b)D_{n-1}$$

$$D'\xlongequal[i=1,2\cdots n-1]{c_i+(-1)c_n}\begin{vmatrix} x_1-a & 0 & 0 & \cdots & a \\ b-a & x_2-a & 0 & \cdots & a \\ b-a & b-a & x_3-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}\xlongequal{按第n行展开}b\begin{vmatrix} x_1-a & & & 0 \\ & x_2-a & & \\ & & x_3-a & \\ * & & & \ddots \ x_{n-1}-a \end{vmatrix}=b\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-a)$$

$\therefore D_n=b\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-a)+(x_n-b)D_{n-1}$,再由行列式转置不变性,交换式子的a,b得

$$D_n=a\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-b)+(x_n-a)D_{n-1}$$

联立,解得 $D_n=\frac{1}{a-b}\left[a\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)-b\prod_{j=1}^{n}(x_j-a)\right]$

③ 经变换可化为两三角型行列式:

$$\text{eg. } D_n=\begin{vmatrix} d & b & b & \cdots & b \\ c & x & a & \cdots & a \\ c & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}\xlongequal[c_1\times\frac{a}{c}]{r_1\times\frac{a}{b}}\frac{bc}{a^2}\begin{vmatrix} \frac{a^2d}{bc} & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}\longrightarrow 箭型\longrightarrow 上三角$$

④ 无法提出公因子的,采用升阶法　加边升阶

$$\text{eg. } D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & \cdots & x_2x_n \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & \cdots & x_3x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & \cdots & x_2x_n \\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & \cdots & x_3x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3\cdots n+1]{r_i+(-x_{i-1})r_1}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & & & & \\ -x_2 & & 1 & & & \\ -x_3 & & & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ -x_n & & & & & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & & 1 & & & \\ 0 & & & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\text{eg. } D_4=\begin{vmatrix} a+1 & b & c & d \\ a & b+2 & c & d \\ a & b & c+3 & d \\ a & b & c & d+4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & d \\ 0 & a+1 & b & c & d \\ 0 & a & b+2 & c & d \\ 0 & a & b & c+3 & d \\ 0 & a & b & c & d+4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & b & c & d \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & & 2 & & \\ -1 & & & 3 & \\ -1 & & & & 4 \end{vmatrix}=24+24a+12b+8c+6d$$

No.

Date

11. 两条线型行列式

特征：只有主（次）对角线与其相邻的一条斜线，加上四个顶点 可能有元素

方法：直接展开降阶

$$\text{eg. } D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & a_3 & \ddots & \\ \vdots & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第1列展开}} a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ & a_3 & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & a_n \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b_n \begin{vmatrix} b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & \\ & a_3 & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n} a_i+(-1)^{n+1}\prod_{j=1}^{n} b_j$$

12. 范德蒙德型行列式

特征：有元素逐行（列）按幂递增（减）

方法：转化为范德蒙德行列式计算

$$\text{eg. } D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^n & a_n^{n-1}b_n & \cdots & a_nb_n^{n-1} & b_n^n \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2\cdots n+1]{\text{每行提出}a_i^n} \prod_{i=1}^{n+1}a_i^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n} \\ 1 & & \cdots & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & & \cdots & & \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n} \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n+1}a_i^n\cdot\prod_{1\le i<j\le n+1}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right)=\prod_{1\le i<j\le n+1}(a_ia_j)\cdot\prod_{1\le i<j\le n+1}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right)$$

$$=\prod_{1\le i<j\le n+1}(a_ib_j-b_ia_j)$$

13. Hessenberg 型行列式

特征：只有主（或次）对角线与其相邻的斜线，再加上第1或n行（列）有非0元素

方法：累加消点法　将某一行（列）都化简到只有一个非0元素，以便于降阶

$$\text{eg. } D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & & & & \\ & 2 & -2 & & & \\ & & 3 & \ddots & & \\ & & & n-2 & 2-n & \\ & & & & n-1 & 1-n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3\cdots n]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ & -1 & & & & \\ & 2 & -2 & & & \\ & & 3 & \ddots & & \\ & & & n-2 & 2-n & \\ & & & & n-1 & 1-n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第1列展开}} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & & & & \\ 2 & -2 & & & \\ & 3 & \ddots & & \\ & & n-2 & 2-n & \\ & & & n-1 & 1-n \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{n-1}(1\times2\times3\cdots(n-2)\cdot(n-1))=(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}$$

No.

Date

14、三对角型行列式

特征：主对角线与相邻的两条斜线有非0元素，是一种递推结构行列式，

即所有主子式有相同的结构，从而按列展开后再展开即得递推公式

方法：递推法（特征方程法）

eg. $D_n=\begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & c & a & \ddots & \\ & & & \ddots & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一列}} a\begin{vmatrix} a & b & & \\ c & a & b & \\ & & \ddots & \\ & & a & b \\ & & c & a \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} b & & & \\ c & a & b & \\ & c & a & \ddots \\ & & & a & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}$

$\therefore D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$

希望上式能变成 $D_n-x_1D_{n-1}=x_2(D_{n-1}-x_1D_{n-2})$

即 $D_n=(x_1+x_2)D_{n-1}-x_1x_2D_{n-2}$

$\therefore x_1+x_2=a$，$x_1x_2=bc$，为求出 x_1、x_2，我们构造特征方程：

$x^2-ax+bc=0$，

x_1，x_2为其两根，解之得：$x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}$　$x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}$

$\because D_1=a$，$D_2=a^2-bc$　$\therefore D_2-x_1D_1=a(a-x_1)-bc=ax_2-ax_2+x_2^2=x_2^2$

$\therefore D_n-x_1D_{n-1}=x_2(D_{n-1}-x_1D_{n-2})=\cdots=x_2^{n-2}(D_2-x_1D_1)=x_2^n$ ⋯①

同理，$D_n-x_2D_{n-1}=x_1^n$ ⋯②

联立①，②，得 $\frac{D_n-x_2^n}{x_1}=\frac{D_n-x_1^n}{x_2}$

化简得：$D_n=\frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2}$　其中，$x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}$　$x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}$

15、相邻两行对应元素相差K倍型行列式

方法：步步差法

①元素为数字，且相邻两行对应元素相差1，采用逐步作差法，出现大量±1，进而出现大量0

eg. $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{用前一行减去后一行}]{\text{从第一行开始，依次}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3\cdots n]{c_i+c_1} \begin{vmatrix} -1 & & & & & \\ -1 & -2 & & & & \\ -1 & -2 & -2 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ -1 & -2 & -2 & \cdots & -2 & \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & \cdots & n & n-1 \end{vmatrix}$

$=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$

No.

Date

②若邻两行相差k倍,采用逐步作k倍差,即可出现大量0

eg. $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a^2 & a^3 & a^4 & \cdots & 1 & a \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} & 1 \end{vmatrix}$ 从第一行开始,依次用前一行加上后一行的(-a)倍

$$\xrightarrow[i=1,2\cdots(n-1)]{r_i+(-a)r_{i+1}} \begin{vmatrix} 1-a^n & & & & & \\ & 1-a^n & & & & \\ & & 1-a^n & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1-a^n & \\ a^1 & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} & 1 \end{vmatrix} = (1-a^n)^{n-1}$$

Cramer 法则

设含有n个未知数、n个方程的线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

记其系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Cramer 法则:若 $D\neq 0$,则上述方程组有唯一解:$x_i = \frac{D_i}{D}$ 即解 $X = (\frac{D_1}{D} \cdots \frac{D_n}{D})^T$

其中:

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i=1,2\cdots n$$

第i列被替换

行列式乘法

记 $D_1=|a_{ij}|_{n\times n}$, $D_2=|b_{ij}|_{n\times n}$; $D=|c_{ij}|_{n\times n}$

若 $D=D_1\cdot D_2$ 则 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

构造行列式

行列式第i行(列)所有元素的M与A都与该行(列)元素无关⇒改变第i行(列)元素,该行(列)任一元素的M.A都不会变

eg.已知 $D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$,则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

这些是 D_4 的

定义 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

eg. 设 $D=\begin{vmatrix} 1&2&3&4&5\\ 1&1&1&3&3\\ 3&2&5&4&2\\ 2&2&2&1&1\\ 4&6&5&2&3 \end{vmatrix}$，求 $A_{31}+A_{32}+A_{33}$；$A_{34}+A_{35}$ 是第3行的A，则可改变第3行元素

解：记 $D_1=\begin{vmatrix} 1&2&3&4&5\\ 1&1&1&3&3\\ 1&1&1&3&3\\ 2&2&2&1&1\\ 4&6&5&2&3 \end{vmatrix}$，$A_{31}+A_{32}+A_{33}+3(A_{34}+A_{35})=D_1=0\cdots①$

记 $D_2=\begin{vmatrix} 1&2&3&4&5\\ 1&1&1&3&3\\ 2&2&2&1&1\\ 2&2&2&1&1\\ 4&6&5&2&3 \end{vmatrix}$，$2(A_{31}+A_{32}+A_{33})+A_{34}+A_{35}=D_2=0\cdots②$

联立①.②，得 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=0$，$A_{34}+A_{35}=0$

一种常用展开

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11}&a_{12}&&\\ a_{21}&a_{22}&\multicolumn{2}{c}{O}\\ &&a_{33}&a_{34}\\ \multicolumn{2}{c}{*}&a_{43}&a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}&a_{12}&\multicolumn{2}{c}{*}\\ a_{21}&a_{22}&&\\ &&a_{33}&a_{34}\\ \multicolumn{2}{c}{O}&a_{43}&a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33}&a_{34}\\ a_{43}&a_{44} \end{vmatrix}$$

定理：设 $f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ 为一个非零 $n-1$ 次多项式，

则 $f(x)$ 最多有 $n-1$ 个不同的根

第二章 矩阵 Matrix

矩阵的运算 线性运算=加法+数乘

1.加法：$A+B=B+A$ $A+(-B)=A-B$

只有同型矩阵才能相加减

$(A+B)+C=A+(B+C)$ $A+B=C \Leftrightarrow A=C-B$

$A+O=A$

$A+(-A)=O$

2.数乘：$1A=A$ $(-1)A=-A$ $0A=O$ 数 矩阵

·矩阵提公因子：所有元素均有公因子外提一次

·行列式提公因子：一行(列)提一次；所有元素均有公因子，外提n次

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

则 $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$

$k(lA)=(kl)A$

$(k+l)A=kA+lA$

$k(A+B)=kA+kB$

$\triangle$ $kA=O \Leftrightarrow k=0$ 或 $A=O$

3.乘法：$A(BC)=(AB)C$ $F^{m\times p}\times F^{p\times n}=F^{m\times n}$

口诀：中间相等取两头

定义：$C=AB$

$\Rightarrow c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$

$k(AB)=(kA)B=A(kB)$

$A(B+C)=AB+AC$ $(A+B)C=AC+BC$

$\triangle EA=A$，$AE=A$

$OA=O$，$AO=O$

矩阵乘法不满足交换律、消去律

注：一般情况下：$AB\neq BA$，$AB=AC \not\Rightarrow B=C$，

$AB=O \not\Rightarrow A=O$ 或 $B=O$，$AB=O$ 且 $A\neq O \not\Rightarrow B=O$

矩阵乘法有零因子

4.转置：$(A^T)^T=A$

$(A+B+\cdots+C)^T=A^T+B^T+\cdots+C^T$

$(kA)^T=kA^T$

$(A_1A_2\cdots A_n)^T=A_n^T\cdots A_2^TA_1^T$

$|A^T|=|A|$

注意 AA^T 的对角线元素都是平方和

$$AA^T=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}^2 & & * \\ & \sum_{j=1}^{n}a_{2j}^2 & \\ * & & \ddots \; \sum_{j=1}^{n}a_{nj}^2\end{pmatrix}$$

$AA^T=O\Rightarrow A=O$；$R(AA^T)=R(A)$

5.方阵的行列式 $A、B\in F^{n\times n}$，A 的行列式记作 $\det A$ 或 $|A|$

$|kA|=k^n|A|$

$|AB|=|A||B|$ 前提：$A、B$ 为同阶方阵

$\triangle\Rightarrow|A^m|=|A|^m$，$\triangle$ $|AB|=|BA|$

一般地，$|A+B|\neq|A|+|B|$

No.

Date

6、方阵的幂 $A\in F^{n\times n}$, $k,l\in N$

$A^0=E_n$, $A^1=A$, $A^2=A\cdot A$ ...

$A^kA^l=A^{k+l}=A^lA^k$

$(A^k)^l=A^{kl}$ $(A^m)^T=(A^T)^m$

一般来说, $(AB)^k\neq A^kB^k$

求法① 拆分法求方阵的幂:

$(E+A)^m=E+C_m^1A+C_m^2A^2+\cdots+C_m^mA^m$

$=E+\sum_{k=1}^{m}C_m^kA^k$ 一般有 $A^i=0$

② 归纳法：观察规律

③ 相似矩阵法 $P^{-1}AP=\Lambda\Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

④△分解法：若 $A=\alpha\beta^T$, 且 $\beta^T\alpha=k$ (实数)

则: $A^n=\alpha(\beta^T\alpha)^{n-1}\beta^T=k^{n-1}A$

秩为1的矩阵都能写成 $\alpha\beta^T$ 的形式

且 $k=tr(A)$, 故 $A^n=tr^{n-1}(A)A$

7、共轭矩阵 $A\in C^{m\times n}$

$A^H=(\bar{A})^T=\overline{(A^T)}$

$\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B}$ $(A+B)^H=A^H+B^H$

$\overline{kA}=\bar{k}\bar{A}$ $(kA)^H=\bar{k}A^H$

$\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$ $(AB)^H=B^HA^H$

$|\bar{A}|=\overline{|A|}$ $|A^H|=\overline{|A|}$

$\overline{(\bar{A})}=A$ $(A^H)^H=A$

8、逆矩阵 $A\in F^{n\times n}$, 若A可逆, 则:

$(A^{-1})^{-1}=A$, $AA^{-1}=A^{-1}A=E_n$ ∴ $|A|\neq0$

☆ $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ ($k\neq0$), $A^{-m}=(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$ ($m\in N$)

☆ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, $(A_1A_2\cdots A_3)^{-1}=A_3^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$, ☆ $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

△一般来说, $(A\pm B)^{-1}\neq A^{-1}\pm B^{-1}$

$$\begin{cases}\text{若}A.B\in F^{n\times n},\ AB\text{可逆}\Rightarrow A\text{可逆}.\ B\text{可逆}\\ \text{若}A.B\in F^{n\times n},\ AB=E\Rightarrow A^{-1}=B\end{cases}$$

前提

9.乘积可换 $AB=BA$

$\Rightarrow (A+B)(A-B)=A^2-B^2$, $(A\pm B)^2=A^2\pm2AB+B^2$,

$(A+B)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^kA^kB^{m-k}$ $(AB)^k=A^kB^k$

★伴随矩阵 对 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 有 $A^*=(A_{ji})_{n\times n}$ 代数余子式的一个转置

逆/转置与伴随可换

$$△R(A^*)=\begin{cases}n & R(A)=n\\ 1 & R(A)=n-1\\ 0 & R(A)<n-1\end{cases}$$

由 $AA^*=A^*A=|A|E_n\Rightarrow(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\frac{1}{|A|}A$ $(A^*)^T=(A^T)^*$

$A^*=|A|A^{-1}$ △$(kA)^*=k^{n-1}A^*$ △$|A^*|=|A|^{n-1}$

△$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$ $(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$

二、判断矩阵可逆的方法

对 $A\in F^{n\times n}$

△1. $|A|\neq 0$

2. $\exists B\in F^{n\times n}$，$AB=E_n$（或 $BA=E_n$）　　2'. $A、B\in F^{n\times n}$，则 AB 可逆 $\Rightarrow$ $A、B$ 均可逆

△3. $R(A)=n$

4. 不存在非零矩阵 B，使 $AB=0$（或 $BA=0$）　$\Rightarrow AX=0$ 只有零解 $\Rightarrow A$ 可逆

5. A 与 E_n 等价（即 A 经有限次初等变换化为 E_n）

6. 存在可逆阵 $P、Q$，使 $PAQ=E_n$　或 $A=PEQ=PQ$

7. A 可表示成有限个初等矩阵的乘积　$P_1\cdots P_k$ 为初等矩阵，$A=P_1P_2\cdots P_k$

8. A^* 可逆　　初等阵之积为可逆阵，可逆阵之积仍为可逆阵

9. A 的行(列)向量组线性无关

10. A 的特征值不为0　$(\lambda E-A)X=0$

三、求逆矩阵的方法

已知 $A\in F^{n\times n}$，A 可逆

1. 定义：$\exists B\in F^{n\times n}$，$AB=E_n$（或 $BA=E_n$），则 $A^{-1}=B$

2. 推论：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

3. 初等变换法：

$$(A\,\vdots\,E)\xrightarrow{\text{行}}(E\,\vdots\,A^{-1})\qquad \begin{pmatrix}A\\ E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{pmatrix}E\\ A^{-1}\end{pmatrix}$$

$$(A\,\vdots\,B)\xrightarrow{\text{行}}(E\,\vdots\,A^{-1}B)\qquad \begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{pmatrix}E\\ BA^{-1}\end{pmatrix}$$

4. 二阶可逆阵的逆矩阵

对 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，$|A|\neq 0$，则 $A^*=\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}$$

5. 利用分块阵的初等变化求逆　　分块初等变换不改变分块矩阵的秩

对 $A\in F^{m\times m}$ 可逆，$B\in F^{n\times n}$ 可逆，$C\in F^{m\times n}$，$D\in F^{n\times m}$，有：

$$\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\\0&B^{-1}\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}A&0\\D&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\-B^{-1}DA^{-1}&B^{-1}\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}C&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\end{pmatrix}$$

eg. $$\left(\begin{matrix}A&C\\&B\end{matrix}\middle|\begin{matrix}E&\\&E\end{matrix}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{matrix}A&\\&B\end{matrix}\middle|\begin{matrix}E&-CB^{-1}\\&E\end{matrix}\right)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{matrix}E&\\&E\end{matrix}\middle|\begin{matrix}A^{-1}&-A^{-1}CB^{-1}\\&B^{-1}\end{matrix}\right)$$

No.

Date

四、求矩阵的秩的方法

1.定义法：若A中存在一个r阶非零子式，且A的所有$r+1$阶子式都为0 $\Rightarrow R(A)=r$

2.初等变换法：将A化为行阶梯矩阵，$R(A)$=行阶梯矩阵的非零行数

五、矩阵的秩的性质　秩：非零子式的最高阶数

1、$A\in F^{m\times n}$，$P\in F^{m\times m}$可逆，$Q\in F^{n\times n}$可逆，则：

$R(A)=R(PA)=R(AQ)=R(PAQ)$

2、初等变换不改变矩阵的秩

3、对分块矩阵进行分块初等变换，也不改变分块矩阵的秩

对$A\in F^{m\times n}$

4. $0\le R(A)\le \min\{m,n\}$

5. $R(A^T)=R(A)$　、$R(AA^T)=R(A)$

6. $R(kA)=\begin{cases}0 & k=0\\ R(A) & k\neq 0\end{cases}$

7. 对A任意一个子矩阵A_1，有$R(A_1)\le R(A)$

8. $R\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=R(A)+R(B)$　　$R\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}\ge R(A)+R(B)$

9. $R(A\vdots B)\le R(A)+R(B)$，$\triangle\ R(A+B)\le R(A)+R(B)$

10. $R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$

11. $A\in F^{m\times n}$，$B\in F^{n\times p}$ 则 $R(AB)\ge R(A)+R(B)-n$　n为左矩阵列数右矩阵行数

$\triangle$特别地，当$AB=0$时，$R(A)+R(B)\le n$

夫逼：$\underline{R(A)+R(B)-n\le R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}}$

$AB=0$时，$^{\triangle}R(A\pm B)\le R(A)+R(B)\le n$

$\triangle$若A、$B\in F^{n\times n}$，满足$AB=0$且$A+B$可逆，则$R(A)+R(B)=n$

12. 若A的r阶子式全为零，则$R(A)<r$

13. $R(ABC)\ge R(AB)+R(BC)-R(B)$

六、分块矩阵的性质

△1、幂　若 A_1、$A_2 \cdots A_s$ 都为方阵，则

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} A_1^m & & & \\ & A_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^m \end{pmatrix}$$

2、转置

对 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$　则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}' & A_{21}' & \cdots & A_{s1}' \\ A_{12}' & A_{22}' & \cdots & A_{s2}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1t}' & A_{2t}' & \cdots & A_{st}' \end{pmatrix}$

特别地：$(A_1, A_2, \cdots, A_t)' = \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ \vdots \\ A_t' \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_t \end{pmatrix}' = (B_1', B_2', \cdots, B_t')$

3、行列式　方阵才有行列式　消法变换不改变分块矩阵的行列式的值 △

设 $A_{11}, A_{22} \cdots A_{ss}$ 都为方阵，则：

$$\begin{vmatrix} A_{11} & & & * \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_{ss} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & & & O \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & A_{ss} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}|\cdots|A_{ss}|$$

△4、逆矩阵

设 A_1、$A_2 \cdots A_s$ 都为可逆矩阵，则

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

5、对 $A \in F^{m \times m}$，$D \in F^{n \times n}$　注：n不一定等于m，不能合并

若A可逆，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$

若D可逆，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D||A - BD^{-1}C|$

特别地，①当ABCD为同阶方阵，②A可逆，③AC=CA，则：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$

6、对 $A \in F^{s \times n}$，$B \in F^{s \times m}$，且 $m+n=s$，则

$$|A \vdots B| = (-1)^{mn} |B \vdots A|$$

故 $\begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & A \\ B & \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \cdot |A| \cdot |B|$

No.

Date

7.降阶公式 $A\in F^{m\times n}$，$B\in F^{n\times m}$ 且 $m>n$，$\forall\lambda\in R$，有：$AB\in F^{m\times m}$ $BA\in F^{n\times n}$

$$|\lambda E_m-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda E_n-BA|$$

当 $n=1$ 时，即对 $\alpha、\beta\in F^{m\times 1}$，有：

$$|\lambda E_m-\alpha\beta^T|=\lambda^{m-1}(\lambda-\beta^T\alpha)$$ 对秩为1的矩阵 $\alpha\beta^T$ 求特征值

取 $\lambda=1$，得：

$$|E_m-AB|=|E_n-BA|$$

即 E_m-AB 可逆 $\Leftrightarrow$ E_n-BA 可逆

另：当 $m=n$ 时，$\forall\lambda\in R$，有：

$$|\lambda E_m-AB|=|\lambda E_n-BA|$$

七、特殊矩阵

1、零矩阵 $O_{m\times n}$ 或 O，两个零矩阵不一定相等

2、行矩阵（行向量）$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 列矩阵（列向量）$B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$

3、置换矩阵：每行每列中，只有一个元素为1，其余为0，是一种二进制方阵

eg. 3阶置换矩阵 $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}&1&\\&&1\\1&&\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}&&1\\1&&\\&1&\end{pmatrix}$

4、方阵、上（下）三角形矩阵、对角矩阵、标量矩阵、单位矩阵

标量矩阵参与乘法：

$$\begin{pmatrix}k_1&&\\&k_2&\\&&k_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1a&k_1d\\k_2b&k_2e\\k_3c&k_3f\end{pmatrix}、\quad \begin{pmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1&\\&k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1a&k_2d\\k_1b&k_2e\\k_1c&k_2f\end{pmatrix}$$

5、设 $A=(a_{ij})\in F^{n\times n}$，

△ $A^T=A\Rightarrow$ 对称矩阵，有 $a_{ij}=a_{ji}$，$i,j=1,2\cdots n$

△ $A^T=-A\Rightarrow$ 反称矩阵，有 $a_{ii}=0$，$i=1,2\cdots n$，且以主对角线为轴，对称的元互为相反数 $a_{ij}=-a_{ji}$

性质：① $\forall A\in F^{n\times n}$，$A$ 可唯一地分解为一个对称矩阵和一个反称矩阵之和

即 $A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$ 前者对称，后者反称

② 奇数阶的反称矩阵的行列式为0

$$|A|=|A^T|=|-A|=(-1)^n|A|\xlongequal{n为奇}-|A|\Rightarrow|A|=0$$

③ $A\in F^{n\times n}$ 为实对称矩阵，且 $A^2=0$ 则 $A=0$

$$AA^T=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=A^2=0$$

考查 AA^T 第 i 行 i 列元素：$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=0\Rightarrow a_{ik}=0\ (i,k=1,2\cdots n)\Rightarrow A=0$

No. psp_dada

Date

6、对角矩阵 ① $\mathrm{diag}(\frac{1}{k_1},\frac{1}{k_2}\cdots\frac{1}{k_n})=\mathrm{diag}(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{-1}$ ② 对角阵相乘⇒对应元素相乘

即 $\begin{pmatrix}\frac{1}{k_1}&&&\\&\frac{1}{k_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\frac{1}{k_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{pmatrix}^{-1}$

即 $\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&&&\\&b_2&&\\&&\ddots&\\&&&b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1&&&\\&a_2b_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_nb_n\end{pmatrix}$

且 $\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a_1^n&&&\\&a_2^n&&\\&&\ddots&\\&&&a_n^n\end{pmatrix}$

7. 奇异矩阵=不可逆矩阵，非奇异矩阵=可逆矩阵

8、行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、(等阶)标准形

△9. 列满秩阵　对 $A\in F^{m\times n}$，$R(A)=n$　$(m>n)$

① ∃可逆阵P，使 $A=P\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$

② 若 $AB=AC$ 则 $B=C$ ← $A(B-C)=0\Rightarrow R(A)+R(B-C)\le n\Rightarrow R(B-C)=0$

特别地，若 $AB=0$ 则 $B=0$

③ 对 $B\in F^{n\times p}$，$R(AB)=R(B)$ → $R(AB)\ge R(A)+R(B)-n=R(B)$ 且 $R(AB)\le R(B)$ $\Rightarrow R(AB)=R(B)$

④ $\exists B\in F^{n\times m}$，使 $\underset{\text{行满秩}}{B}A=E_n$ → 存在A的n个列构成的n阶可逆子阵 A_1，有可逆阵P：$PA=\begin{pmatrix}A_1\\ \end{pmatrix}$ 取 $B=(A_1^{-1}\ O)P$ $\Rightarrow BA=(A_1^{-1}\ O)\begin{pmatrix}A_1\\ \end{pmatrix}=E$

10. 正交矩阵：若 $A\in F^{n\times n}$ 满足 $AA^T=E$（或 $A^TA=E$），则A为正交阵 $\Rightarrow A^{-1}=A^T$，$|A|=1$ 或 -1

八、矩阵的迹

对 $A=(a_{ij})\in F^{n\times n}$，称 $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 为A的迹　即主对角线的元素和为迹

则 $A、B\in F^{n\times n}$，有：

① $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$　② $tr(kA)=ktr(A)$

③ $tr(AB)=tr(BA)$ ⇒ AB-BA的迹为0　④ $AB-BA\ne E_n$

⑤ 若A还是可逆阵，则 $tr(ABA^{-1})=tr(B)$

☆九、分块矩阵的乘法　AB

设 $A=(a_{ij})\in F^{n\times m}$　$B=(b_{ij})\in F^{m\times p}$　记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，$B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$

(1) 若将A按行分块 $\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\ \vdots\\A_s\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}A_1B\\A_2B\\ \vdots\\A_sB\end{pmatrix}$（$A_i$ 为 $1\times m$）　若将B按列分块 $A(B_1,B_2,\cdots,B_t)=(AB_1,AB_2,\cdots,AB_t)$（$B_j$ 为 $m\times 1$）

(2) 若将A按列分块 $AB=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2p}\\ \vdots&&&\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mp}\end{pmatrix}=(b_{11}\alpha_1+\cdots+b_{m1}\alpha_m,\cdots,b_{1p}\alpha_1+\cdots+b_{mp}\alpha_m)$（$\alpha_i$ 为 $n\times 1$）

乘积矩阵AB的第j列是A的各列 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，组合系数是B的第j列元素

(3) 若将B按行分块 $AB=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&&&\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+\cdots+a_{1n}\beta_n\\a_{21}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{2n}\beta_n\\ \vdots\\a_{m1}\beta_1+a_{m2}\beta_2+\cdots+a_{mn}\beta_n\end{pmatrix}$（$\beta_i$ 为 $1\times p$）

即乘积矩阵AB的列向量组可由A的列向量组线性表示

乘积矩阵AB的第i行是B的各行 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的线性组合，组合系数是A的第i行元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$

即乘积矩阵AB的行向量组可由B的行向量组线性表示

可推得 $R(AB)\le\min\{R(A),R(B)\}$

KOKUYO

No.

Date

等价.相似、合同

一、等价 不要求是方阵

1.定义：若矩阵A经有限次初等变换变成矩阵B，称A与B等价

2.充要条件：A与B等价 $\Longleftrightarrow$ ∃可逆阵P、Q使 $PAQ=B$

$\Longleftrightarrow$ A与B同型且 $R(A)=R(B)$

二、相似 A.B是同阶方阵

1.定义：∃可逆阵C使 $C^{-1}AC=B$，则称A与B相似，记作 $A\sim B$

2.判断两个矩阵是否相似

情形一：两个实对称阵相似 $\Longleftrightarrow$ 有完全一样的特征值

情形二：矩阵与对角阵相似　就是可相似对角化的条件

情形三：两个非对称阵相似 $\Longleftrightarrow$ 有完全一样的特征值 + 均能相似对角化

$\Rightarrow |A|=|B|,\ tr(A)=tr(B),\ R(A)=R(B),\ A-tE\sim B-tE,\ R(A-tE)=R(B-tE)$

三.合同 A.B是同阶方阵

1.定义：∃可逆阵C使 $C^TAC=B$，则称A与B合同

2.性质：对称阵只能与对称阵合同，正定阵只能与正定阵合同，不对称阵只能与不对称阵合同

3.判断：

情形一：两个实对称阵合同 $\Longleftrightarrow$ 正特征值个数一致且负特征值个数一致

情形二：两个非对称阵不合同 $\Leftarrow R(A)\neq R(B)$，$\frac{A+A^T}{2}$ 与 $\frac{B+B^T}{2}$ 不合同

实对称，用情形一判断

关系图：

相似 $\rightarrow$ 等价 $\leftarrow$ 合同

注：若A.B实对称，则A.B相似 $\longrightarrow$ A.B合同

Campus

第三章 几何向量

向量：既有大小、又有方向　几何向量：几何空间中的有向线段

一、几何向量的线性运算

1. 加法　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$　$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

2. 数乘　对 $k\vec{a}$：大小 $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$，方向 $\begin{cases} 与\vec{a}同向 & k>0 \\ 任意 & k=0 \\ 与\vec{a}反向 & k<0 \end{cases}$

$1\vec{a}=\vec{a}$　$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

二、

1. 对非零向量 $\vec{a}$，与之同向的单位向量 $\vec{a}^{\circ}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

2. 两个向量的夹角、向量与轴的夹角、点在轴上的投影（是一点）、向量在轴上的投影（是个有正负的数）

定理：$Prj_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$，　$\theta=\langle\overrightarrow{AB},\vec{u}\rangle$

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 $\vec{u}$ 上的投影

⇒ 一非零向量与投影轴成锐角，投影为正；成钝角投影为负；成直角投影为0

定理：$Prj_{\vec{u}}(\vec{a}+\vec{b})=Prj_{\vec{u}}\vec{a}+Prj_{\vec{u}}\vec{b}$

3. 数量积（内积）　结果为数

定义：$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，$\theta=\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

☆两个几何向量垂直 ⟺ 它们的内积为零

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|Prj_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|Prj_{\vec{b}}\vec{a}$

性质：

☆交换律

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$，$k\in R$

☆分配律

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　推广：$(\vec{a_1}+\vec{a_2}+\cdots+\vec{a_m})\cdot(\vec{b_1}+\vec{b_2}+\cdots+\vec{b_n})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\vec{a_i}\cdot\vec{b_j}$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\geq 0$，且 $\vec{a}\cdot\vec{a}=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$

应用：

求模长　$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$　求夹角　$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$，其中 $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$

求投影　$Prj_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$，　$Prj_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

平行四边形公式：$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$

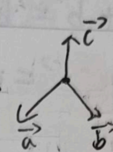
即：平行四边形对角线的平方和等于四边的平方和

注：向量数量积不满足消去律，一般情况下：

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c},\ \vec{a}\neq\vec{0} \not\Rightarrow \vec{b}=\vec{c}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{b},\ \vec{b}\neq\vec{0} \not\Rightarrow \vec{a}=\vec{c}$

4. 向量积（外积） 结果为向量

右手系： $\vec{a}、\vec{b}、\vec{c}$ 构成右手系



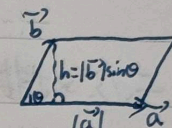
定义：$\vec{a}\times\vec{b}$

大小 (1) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，$\theta=\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

方向 (2) $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$，$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$ 即 $\vec{a}\times\vec{b}$ 垂直于 $\vec{a}、\vec{b}$ 构成的平面

(3) $\vec{a}、\vec{b}、\vec{a}\times\vec{b}$ 构成右手系

意义：$|\vec{a}\times\vec{b}|$ = 以 $\vec{a}、\vec{b}$ 为邻边的▱的面积



性质△ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$ 特别地，$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

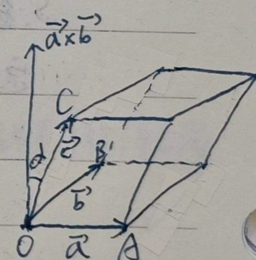
△ $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ 外积交换反号

$(k\vec{a})\times\vec{b}=k(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(k\vec{b})$

△分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$，$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

注：向量的向量积不满足交换律、消去律

5. 混合积 结果为数



定义：$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\alpha$

意义：$|[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]|=V_{平行六面体O-ABC}$ ☆注：$V_{四面体}=\frac{1}{6}V_{六面体}$

性质△ $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0 \Leftrightarrow \vec{a}、\vec{b}、\vec{c}$ 共面

$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=[\vec{b}\vec{c}\vec{a}]=[\vec{c}\vec{a}\vec{b}]$ 轮换不变性

$=-[\vec{a}\vec{c}\vec{b}]=-[\vec{c}\vec{b}\vec{a}]=-[\vec{b}\vec{a}\vec{c}]$

△内积交换不变，外积交换反号

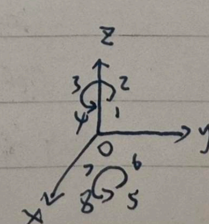
三、几何向量的坐标

1、空间直角坐标系

坐标轴：x、y、z轴正方向构成右手系

坐标面：xOy、yOz、zOx面 将空间分为八个卦限

基本单位向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$



两两垂直：$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$

右手系：$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ $\quad\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ $\quad\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$

2、坐标

①$M(x,y,z)$ 横、纵、竖坐标

空间中任一向量$\vec{a}$可唯一地表示成 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

称$\vec{a}$的坐标为(x,y,z)

其中 $x=Prj_x\vec{a}$ $\quad y=Prj_y\vec{a}$ $\quad z=Prj_z\vec{a}$

终点减起点

② 若$M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 则$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$

☆3、几何向量的坐标运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ $\quad\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ $\quad\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$ 则：

加法 (1) $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$

数乘 (2) $k\vec{a}=(ka_x,ka_y,ka_z)$

内积 (3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ 一个数

外积 (4) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\right)$ 一个向量

混合积 (5) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$ 一个数

应用：对$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$

$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

记$\vec{a}$与Ox、Oy、Oz轴夹角为α、β、γ，则：由$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}||\vec{i}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$ $\quad\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$ $\quad\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$

称α、β、γ为$\vec{a}$的方向角，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$为$\vec{a}$的方向余弦

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|},\frac{a_y}{|\vec{a}|},\frac{a_z}{|\vec{a}|}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

位置关系：$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$ $\qquad\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0$

No.

Date

四、空间中的平面与直线

1、平面的方程

面π的法向量：垂直于面π的非零向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

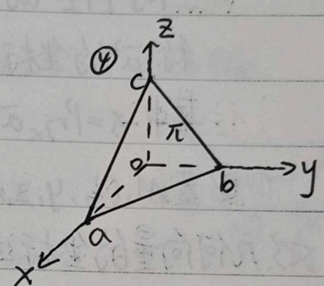
① 点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 过点(x_0,y_0,z_0)

② 一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 待定系数法

其中 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$

③ 三点式方程 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$

④ 截距式方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$



平面方程的系数与图形的关系 $Ax+By+Cz+D=0$

① 平面法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

② 平面过原点 $\Rightarrow D=0$

③ π // x轴 $\Rightarrow \vec{n}\perp$ x轴 $\Rightarrow A=0$

④ π过x轴 $\Rightarrow A=D=0$

⑤ π // xoy面 $\Rightarrow A=B=0$

⑥ π过xoy面 $\Rightarrow A=B=D=0$

2. 直线的方程

线l的方向向量：平行于线l的非零向量 $\vec{s}=(m,n,p)$

① 标准方程（点向式方程） $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ 定点(x_0,y_0,z_0) 方向向量$\vec{s}=(m,n,p)$

② 参数方程 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$ 定点(x_0,y_0,z_0) 方向向量$\vec{s}=(m,n,p)$

常用于相交直线、求交点。 设任一点(x_0+mt, y_0+nt, z_0+pt)为交点，求t

③ 一般方程 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D=0 \end{cases}$ 即$\begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$

④ 二点式方程 $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

Campus

直线方程的互化:

① 标准方程 ⟶ 一般方程

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ $\quad\begin{cases}\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}\\ \frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\end{cases}$

② 一般方程 ⟶ 标准方程 ⟶ 参数方程

$\begin{cases}\pi_1\\ \pi_2\end{cases}$ 求 π_1 的 $\vec{n_1}$, π_2 的 $\vec{n_2}$, $l: \vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$, 再找一点 $M_0\in l$ 设比值为 t

3. 位置关系

$\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$ $\quad \vec{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$

① 面一面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $\quad \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

(1) π_1 与 π_2 重合 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$

(2) π_1 与 π_2 平行 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$ (法向量平行但方程不同解)

(3) π_1 与 π_2 相交 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ 不成立

π_1 与 π_2 的夹角 $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\cos\varphi=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

$\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}\perp\vec{n_2} \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

② 线一线 $L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ $\quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ $\quad M_2(x_2,y_2,z_2)$

$\vec{s_1}=(m_1,n_1,p_1)$ $\quad \vec{s_2}=(m_2,n_2,p_2)$

L_1 与 L_2 共面:

(1) L_1 与 L_2 重合 $\begin{cases}\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \text{ (方向向量平行)}\\ M_1\in L_2 \quad \frac{x_1-x_2}{m_2}=\frac{y_1-y_2}{n_2}=\frac{z_1-z_2}{p_2} \text{ (或 } M_2\in L_1)\end{cases}$

(2) L_1 与 L_2 平行 $\begin{cases}\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}\\ M_1\notin L_2 \quad \frac{x_1-x_2}{m_2}=\frac{y_1-y_2}{n_2}=\frac{z_1-z_2}{p_2} \text{ 不成立 (或 } M_2\notin L_1)\end{cases}$

(3) L_1 与 L_2 相交 $\begin{cases}[\vec{s_1}\,\vec{s_2}\,\overrightarrow{M_1M_2}]=0\\ \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \text{ 不成立}\end{cases}$

(4) L_1 与 L_2 异面 $[\vec{s_1}\,\vec{s_2}\,\overrightarrow{M_1M_2}]\neq0$

L_1 与 L_2 的夹角 $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\cos\varphi=\frac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$

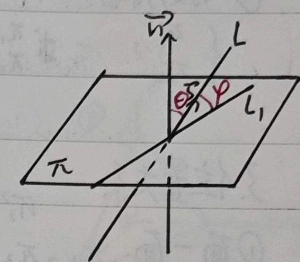
$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s_1}\perp\vec{s_2} \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

③线一面 $L: \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$， $\pi: Ax+By+Cz+D=0$

(1) $L \in \pi$ $\begin{cases} \vec{s} \perp \vec{n} \text{ 即 } mA+nB+pC=0 \\ M_0 \in \pi \text{ 即 } Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$

(2) $L \parallel \pi$ $\begin{cases} \vec{s} \perp \vec{n} \text{ 即 } mA+nB+pC=0 \\ M_0 \notin \pi \text{ 即 } Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0 \end{cases}$

(3) L与π交于一点 $mA+nB+pC \neq 0$



L与π的夹角φ, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\cos\theta=\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|}$

$\therefore \sin\varphi=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

$L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$

4.距离

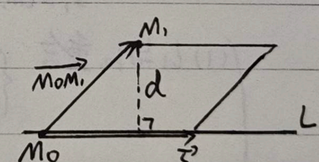
①点一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ $M_2(x_2,y_2,z_2)$

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

②点一线 $L: \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$， L外一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$

$\vec{s}=(m,n,p)$ $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$d_{M_1 \to L}=\frac{|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{s}|}$



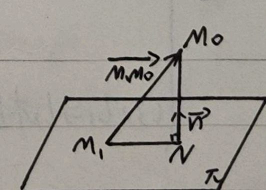
↑两平行直线间的距离

③点一面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$\vec{n}=(A,B,C)$，取 $M_1(x_1,y_1,z_1) \in \pi$

$d_{M_0 \to \pi}=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{n}|}$

$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$



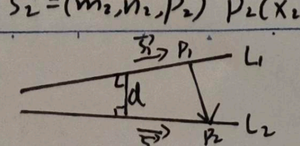
↑两平行平面间距

↑直线与其平行平面间距

④线一线(异面) $L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ $L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$

$\vec{s_1}=(m_1,n_1,p_1)$ $P_1(x_1,y_1,z_1)$ $\vec{s_2}=(m_2,n_2,p_2)$ $P_2(x_2,y_2,z_2)$

$d=|Prj_{\vec{s_1}\times\vec{s_2}}\overrightarrow{P_1P_2}|=\left|\frac{\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{s_1}\times\vec{s_2})}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}\right|$



5、平面束

通过给定直线L的所有平面的全体称为通过直线L的平面束

$L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

的平面束方程为：

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

除平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 外，可写成：

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

No.

Date

第四章 n维向量

1.定义

数域F内n个数 $a_1,a_2\cdots a_n$ 组成的n元有序数组 α 叫F上的n维向量,记作:

行向量 $\alpha=(a_1,a_2\cdots a_n)$ 或列向量 $\alpha=(a_1,a_2\cdots a_n)^T$

2.n维向量的线性运算(加法、数乘),满足:

(1) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ 结合律　　(2) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ 交换律

(3) $\alpha+0=\alpha$　　(4) $\alpha+(-\alpha)=0$

(5) $1\alpha=\alpha$, $(-1)\alpha=-\alpha$, $0\alpha=0$　　(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ 数乘关于向量加法的分配律　　(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$ 数乘关于数加法的分配律

3.线性相关与线性无关

1)定义:对 $\beta,\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m\in F^n$, $k_1,k_2\cdots k_m\in F$,有

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

称 β 是 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 的线性组合,或 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性表示, $k_1,k_2\cdots k_m$ 为组合系数(或表示系数)

2)定义:对 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m\in F^n$,如果存在不全为0的数 $k_1,k_2\cdots k_m\in F$,使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

若 α_i 为列向量,则为 $(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=0$

若 α_i 为行向量,则为 $(k_1,k_2,\cdots k_m)\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_m\end{pmatrix}=0$

则称 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性相关

否则:只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时,才有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

则称 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性无关

3)性质:部分相关⇒整体相关　整体无关⇒部分无关

向量组: $\underbrace{\overbrace{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r}^{}}_{部分}\cdots\alpha_s$ (整体: $\alpha_1\cdots\alpha_s$)

4)特别地:几何向量 $\vec{a},\vec{b}$ 共线 ⇔ $\vec{a},\vec{b}$ 线性相关 ⇔ ∃不全为0的 λ_1,λ_2 使 $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}=\vec{0}$

几何向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面 ⇔ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 线性相关 ⇔ ∃不全为0的 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使 $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=\vec{0}$

4.线性相关的刻画

1)定理:向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ $(m\geq2)$ 线性相关⇔其中至少有一个向量可被其余n-1个向量线性表示

线性无关⇔其中任一向量都不能被其余n-1个向量线性表示

No.

Date

△显然，向量组 α_1 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha_1=0$ 零向量自身相关 ⇒ 含有 $\vec{0}$ 的向量组必线性相关

2) 线性相关的另一个解释

考察线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_n \end{cases}$ $\begin{matrix} \rightarrow \alpha_1=(a_{11},a_{12}\cdots a_{1n}\ b_1) \\ \\ \rightarrow \alpha_m=(a_{m1},a_{m2}\cdots a_{mn}\ b_n) \end{matrix}$

对应一个向量组

向量组线性相关 ⇒ 至少有一个方程可被其余方程线性表示 ⇒ 有多余的方程

5、线性相关的判定 矩阵判别法

1) 对 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)\in F^{n\times m}$，$R(A)<\underset{\text{列向量个数}}{\underline{m}} \Leftrightarrow \alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性相关，$R(A)=m \Leftrightarrow \alpha_1\cdots\alpha_m$ 线性无关

特别地，当 $A\in F^{n\times n}$ 时，$R(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性无关

2) 推论

① 若 r 维向量组(I)线性无关，在(I)每个向量添上 s 个分量(可在任意位置添加，但每个向量添加位置要一致)构成 r+s 维向量组(II)，则(II)线性无关，即：

$\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots a_{ri})^T$，$\beta_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ri},a_{r+1,i},\cdots,a_{r+s,i})^T$，$i=1,2\cdots,m$

$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性无关 ⇒ $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_m$ 线性无关 即线性无关向量组的延伸组仍线性无关

△② 若一向量组的向量个数 > 向量维数，则该向量组必定线性相关

特别地：n+1 个 n 维向量必定线性相关

eg. 几何空间中的 4 个向量、平面上的 3 个向量、直线上的 2 个向量 必定线性相关

6、极大无关组

1) 向量组间的关系 设两个向量组 (1) $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ (2) $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$ 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$，$B=(\beta_1\cdots\beta_s)$

定义：若(1)中每个向量都可由(2)线性表示，称(1)可由(2)线性表示 矩阵形式：$A=BK$ K 为表示系数构成的矩阵

若(1)和(2)可以互相线性表示，称(1)和(2)等价

性质：向量组等价具有传递性 (I)(II)等价、(II)(III)等价 ⇒ (I)(III)等价

2) 定义：设向量组 $S\subset F^n$，$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r\in S$，满足：

无关性(1) $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 线性无关；极大性(2) 任取 $\alpha\in S$，必有 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r,\alpha$ 线性相关，

称 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 为 S 的一个极大无关组

Campus 性质：向量组的极大无关组可以不唯一

目的：通过极大无关组，用尽量少的向量研究原来很多个向量的向量组

No.

Date

3)定理：设n维向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m,\beta$ 线性相关 ⇒ 平面向量基本定理
空间向量基本定理

则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性表示且表示法唯一 可表性、唯一性

△表明：向量组S中任一向量 β 都可由S的极大无关组唯一地线性表示

推论：一个向量组与其任一极大无关组等价 ⇒ 一个向量组的任两个极大无关组等价

7.向量组的秩

1)定理：设两个n维向量组 (1) $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ (2) $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$

若(1)线性无关且(1)可由(2)表示，则 $r\le s$ 若A且B则C

△即：若要表示一个线性无关的向量组，则向量数需不比它少

¬C且A则¬B：若 $r>s$ 且(1)线性无关 则(1)不能由(2)线性表示

¬C且B则¬A：若 $r>s$ 且(1)可由(2)线性表示 则(1)线性相关

2)推论：若(1)、(2)均线性无关且(1)、(2)等价，则 $r=s$ 即等价的线性无关组有相等的向量个数

☆进而：一个向量组的任两个极大无关组所含向量数相同

3)定义：向量组的极大无关组所含向量数为这个向量组的秩

4)推论：若向量组(Ⅰ)能由向量组(Ⅱ)线性表示，则 $R(\mathrm{I})\le R(\mathrm{II})$

$(\mathrm{II}') \Leftrightarrow (\mathrm{II}) \xrightarrow[\text{表示}]{\text{线性}} (\mathrm{I}) \Leftrightarrow (\mathrm{I}')$ 即 $(\mathrm{II}') \xrightarrow[\text{表示}]{\text{线性}} (\mathrm{I}')$

进而：等价的向量组有相同的秩（反之不一定成立）

5)拓：①包含关系+秩相等⇒等价

设(Ⅰ) $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$，(Ⅱ) $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m,\beta$，

若 $R(\mathrm{I})=R(\mathrm{II})$ 则(Ⅰ)与(Ⅱ)等价

证：设 $R(\mathrm{I})=R(\mathrm{II})=r$，设(Ⅰ') $\alpha_1,\cdots\alpha_r$ 为(Ⅰ)极大无关组

由 $R(\mathrm{II})=r$，(Ⅰ')也是(Ⅱ)的极大无关组

由(Ⅰ)、(Ⅰ')等价，(Ⅰ')(Ⅱ)等价⇒(Ⅰ)(Ⅱ)等价

②半等价+秩相等⇒等价

设(Ⅰ) $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ (Ⅱ) $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_t$

若(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示，且 $R(\mathrm{I})=R(\mathrm{II})$

则(Ⅰ)与(Ⅱ)等价

证：设(Ⅲ) $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m,\beta_1,\beta_2\cdots\beta_t$

∵(Ⅰ)可由(Ⅱ)表示 ∴(Ⅲ)的极大无关组即(Ⅱ)的极大无关组

∴ $R(\mathrm{II})=R(\mathrm{III})$，(Ⅱ)、(Ⅲ)等价

∵ $R(\mathrm{I})=R(\mathrm{III})$，(Ⅰ)(Ⅲ)有包含关系 ∴(Ⅰ)(Ⅲ)等价

∴(Ⅰ)(Ⅱ)等价

证法二：设(Ⅰ') $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ 为(Ⅰ)极大无关组

∵(Ⅰ)可由(Ⅲ)线性表示、∴ $R(\mathrm{III})=R(\mathrm{II})=R(\mathrm{I})=r$

∴(Ⅰ')也是(Ⅲ)的极大无关组

从而(Ⅲ)中部分向量组 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_t$ 可由(Ⅰ')线性表示，即 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_t$ 可由(Ⅰ)线性表示

⇒(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示⇒(Ⅰ)、(Ⅱ)等价

No.

Date

8. 矩阵的秩与向量组的秩的关系

1) 定理：$A\in F^{n\times m}$　$R(A)=A$的行向量组的秩$=A$的列向量组的秩

2) 定理：对 (I) $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性无关，(II) $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_t$ 及矩阵$K\in F^{m\times t}$

满足 $(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)\cdot K$

则 $R(\text{II})=R(K)$　证法 $R(A)+R(B)-n\leqslant R(AB)\leqslant\min\{R(A),R(B)\}$

由定理(2)(3)知求极大无关组的方法：初等行变换

3) 定理：若 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\xrightarrow{行}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 且 $\beta_n=k_1\beta_1+\cdots+k_{n-1}\beta_{n-1}$ 则 $\alpha_n=k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$

9. 向量空间

1) 定义：设V是F上n维向量构成的非空集合(即$V\subseteq F^n$, $V\neq\phi$)，若：

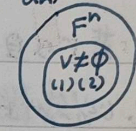
(1) $\forall\alpha\in V,\beta\in V$，有$\alpha+\beta\in V$　对加法封闭

(2) $\forall\alpha\in V,\forall k\in F$，有$k\alpha\in V$　对数乘封闭

则称集合V为F上的向量空间 称向量空间的元素为向量

几何空间：R^3　零空间$\{0\}$

$F^n=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}\middle|\ a_i\in F,\ i=1,2\cdots n\right\}$



可以证明，V满足(1)(2)，则满足加法与数乘的八条性质

2) 定义：记F上向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 生成的向量空间为

$L(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)=\{\gamma\mid\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,\ k_1,k_2\cdots k_m\in F\}$

取$A\in F^{m\times n}$

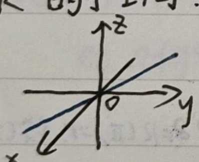
$N(A)=\{X\in F^n\mid AX=0\}$

称$N(A)$为$AX=0$的解空间

3) 定义：设数域F上两个向量空间V_1，V_2有$V_1\subseteq V_2$，则称V_1是V_2的子空间

推：n维实向量构成的向量空间V总是R^n的子空间

eg. R^3的子空间：零空间$\{0\}$、过原点的直线、



过原点的平面、R^3

向量空间必包含零向量

任何有限维的向量空间都可以写成生成空间、解空间的情形

10. 向量空间的基底、维数、坐标、

向量空间是非空的，对加法与数乘封闭的向量集

向量集S	向量空间V
极大无关组(无序) $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$ →	基(有序) $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$
秩 →	维数 $\dim V$
$\forall\alpha\in S$，有$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r$	$\forall\alpha\in V$，有$\alpha=l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m$
$\forall\alpha$满足$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r$，$\alpha$不一定$\in S$	$\forall\alpha$满足$\alpha=l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m$，必有$\alpha\in V$

注：① 一个向量空间的任意两组基所含向量个数相同

② r维向量空间V中任一含有r个向量的线性无关向量组都是V的基

③ 若$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$可表示r维向量空间V中任一向量，则$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$是V的一个基

Campus

psp_dada

No.

Date

1)定义：n维标准单位向量组 $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$ $\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)$ $\cdots$ $\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$

是R^n的极大无关组，所以ε_1、$\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$是$R^n$的一个基，称为自然基，且$\dim R^n=n$

规范正交基

2) 对向量组α_1、$\alpha_2\cdots\alpha_m$生成的向量空间V

$V=L(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m)=\{\gamma\mid\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,\ k_i\in F,\ i=1,2\cdots n\}$

则$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$的极大无关组就是$V$的一个基

且 $\dim V=R\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m\}$

3) 若向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$是向量空间$V$的一个基，则$V$可表示为

$V=\{\gamma\mid\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r,\ k_i\in F,\ i=1,2\cdots r\}$

4) 若向量空间 $\underset{\text{子空间}}{V}\subseteq R^n$ 则 $\dim V\le n$ 且有 $\dim V=n\Leftrightarrow V=R^n$

5) 记 $V_1=\{\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r\mid k_i\in F,\ i=1,2\cdots r\}$

$V_2=\{\beta=l_1\beta_1+\cdots+l_s\beta_s\mid l_j\in F,\ j=1,2\cdots s\}$

则：$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$可由$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$线性表示 $\Leftrightarrow V_1\subseteq V_2$　　只需证$\forall\alpha\in V_1$，有$\alpha\in V_2$

$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$与$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$等价 $\Leftrightarrow V_1=V_2$

II. 坐标变换

1)定义　设$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$是$r$维向量空间$V$的一个基，对$\forall\alpha\in V$，有

$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r$　　$x_i\in F,\ i=1,2\cdots r$

则称$(x_1,x_2\cdots x_r)$或$(x_1,x_2\cdots x_r)^T$为α关于$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r$的坐标向量（被$\alpha$和基唯一地确定

称x_i, $i=1,2\cdots r$为坐标分量　　若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为正交基，则 $x_i=\frac{(\alpha,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为规范正交基，则$x_i=(\alpha,\alpha_i)$

2) 基变换公式

设$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$及$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$是向量空间$V$的两个基且

$$\begin{cases}\beta_1=p_{11}\alpha_1+p_{21}\alpha_2+\cdots+p_{n1}\alpha_n\\ \beta_2=p_{12}\alpha_1+p_{22}\alpha_2+\cdots+p_{n2}\alpha_n\\ \cdots\cdots\\ \beta_n=p_{1n}\alpha_1+p_{2n}\alpha_2+\cdots+p_{nn}\alpha_n\end{cases}$$

即$\underset{\text{新}}{(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)}=\underset{\text{旧}}{(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)}\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{pmatrix}$

记$A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)$, $B=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)$, $P=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{pmatrix}$　称P为基$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$的过渡矩阵

基变换公式：$B=AP$　　推：$P=A^{-1}B$，　P为可逆阵

No.

Date

3) 坐标变换公式

设向量空间V的基$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$（旧基）到基$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$（新基）的过渡矩阵为$P=(p_{ij})$，V中向量$\alpha$在基$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$下坐标是$(x_1,x_2\cdots x_n)$ 在$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$下坐标是$(x_1',x_2'\cdots x_n')$，则：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

记$X=(x_1,x_2\cdots x_n)^T$，$Y=(x_1',x_2'\cdots x_n')^T$

则 $X=PY$　　$Y=P^{-1}X$

新坐标　旧坐标

12、欧氏空间

1) 定义：设$\alpha=(a_1,a_2\cdots a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in R^n$，记

$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\underline{\alpha\beta^T}$

若α,β为行向量形式：对右向量取转置

称(α,β)为向量α与β的内积

若α,β为列向量形式：对左向量取转置

称定义了线性运算和内积的R^n为欧氏空间，仍记为R^n

2) 内积的性质

对$\alpha,\beta,\gamma\in R^n$，$k,l\in R$，有

交换律(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$　(2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$　分配律(3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(4) $(\alpha,\alpha)\geq0$ 且$(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$　(5) $(\alpha,k\beta+l\gamma)=k(\alpha,\beta)+l(\alpha,\gamma)$

3) 定义：$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$

称$|\alpha|$为向量α的长度，称长度为1的向量为单位向量，$\alpha=0\Leftrightarrow|\alpha|=0$

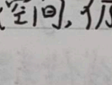
4) 向量长度的性质　说明向量长度定义的合理性　设$\alpha,\beta\in R^n$

(1) Schwarz（施瓦茨）不等式　$(\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$　即$|(\alpha,\beta)|\leq|\alpha||\beta|$

(2) 非负性　$|\alpha|\geq0$　且$|\alpha|=0\Leftrightarrow\alpha=0$

(3) 正齐次性　$|k\alpha|=|k||\alpha|$

(4) 三角不等式　$|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$



5) 定义：设$\alpha,\beta\in R^n$且均不为零向量，称$\varphi=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$ $(0\leq\varphi\leq\pi)$为α与β的夹角

△当$(\alpha,\beta)=0$时，称α与β正交，记为$\alpha\perp\beta$

由施瓦茨不等式知$\frac{|(\alpha,\beta)|}{|\alpha||\beta|}\leq1$，说明这样定义向量夹角可行.

零向量与R^n中任何向量均正交

Campus

13.规范正交基

1) 称两两正交的非零向量构成的向量组为正交向量组　　$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 为向量空间V的基

性质:正交向量组一定线性无关　　$+\alpha_i\perp\alpha_j, i\neq j \Rightarrow$ 正交基

2) 称由单位向量构成的正交向量组为规范正交向量组　　$+|\alpha_i|=1, i=1,2,\cdots,m \Rightarrow$ 规范正交基

3) 若 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n\in R^n$, 则 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是 R^n 的规范正交基

$\Longleftrightarrow \quad (\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1 & i=j \text{ 规范}\\ 0 & i\neq j \text{ 正交}\end{cases} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$

4) 性质1: 设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是向量空间V的一个规范正交基,

$\forall\alpha\in V, \alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$ 有 $k_i=(\alpha_i,\alpha), i=1,2,\cdots,m$

即求一个向量被规范正交基线性表示的表示系数是容易的 --- 优点1

eg. 直角坐标系中的 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 构成n何空间 R^3 的一个规范正交基

$\vec{\alpha}\in R^3$, 有 $\vec{\alpha}=Prj_{\vec{i}}\vec{\alpha}\cdot\vec{i}+Prj_{\vec{j}}\vec{\alpha}\cdot\vec{j}+Prj_{\vec{k}}\vec{\alpha}\cdot\vec{k}$

$=(\vec{\alpha},\vec{i})\vec{i}+(\vec{\alpha},\vec{j})\vec{j}+(\vec{\alpha},\vec{k})\vec{k}$

5) 性质2: 设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 是向量空间V的一个规范正交基

且 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m$, $\beta=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_m\alpha_m$ 设 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_n\end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_n\end{pmatrix}$

则 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_my_m=(X,Y)$

即求两个已知被规范正交基线性表示的表示系数的向量的内积是容易的 --- 优点2

14. Schmidt正交化法

已知向量空间V的基 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$, 现求与之等价的规范正交基

(1) 正交化过程　求与 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 等价的正交向量组 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_m$

$\beta_1=\alpha_1$, $\quad\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$, $\quad\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$, ...

$\beta_m=\alpha_m-\frac{(\alpha_m,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_m,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_m,\beta_{m-1})}{(\beta_{m-1},\beta_{m-1})}\beta_{m-1}$

(2) 规范化过程　求与 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_m$ 等价的规范正交向量组 $\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_m$

$\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}$ $\quad\gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}$ $\cdots$ $\gamma_m=\frac{\beta_m}{|\beta_m|}$　　注:可利用正齐次性, $\gamma_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{k\beta_1}{|k\beta_1|}$

Schmidt 正交化法的优点

不仅 $\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_m$ 与 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 等价, 且 $\forall i\in[1,m]$, $\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_i$ 与 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_i$ 等价

从而: $L(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_i)=L(\gamma_1,\gamma_2\cdots\gamma_i)$　　$i=1,2,\cdots,m$

15、正交矩阵 $A^TA=E$

实矩阵、方阵

1) 引入：对 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in R^{n\times n}$，向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是 R^n 的基 $\Leftrightarrow$ A可逆

2) 定义：对 $A\in R^{n\times n}$ 若 $A^TA=E$ 则称A为正交矩阵

3) 性质：$A\in R^{n\times n}$，A为正交阵，则：

(1) A可逆，$A^{-1}=A^T$ (2) A^T、A^{-1}、A^* 均为正交阵

(3) $|A|=1$ 或者 -1 (4) A、B是n阶正交阵 $\Rightarrow AB, AB^{-1}$ 是n阶正交阵

(5) $\forall$ n维实列向量X、Y，有 ① AX保持X的长度 即 $|AX|=|X|$

② AX和AY保持X和Y的内积 即 $(AX,AY)=(X,Y)$

4) 定理：设 $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)\in R^{n\times n}$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 构成 R^n 的规范正交基 $\Leftrightarrow$ A为正交阵

$\Rightarrow$ 正交矩阵的行向量组、列向量组均为Rn的规范正交基

5) 推论：设矩阵P是 R^n 的规范正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 R^n 的另一个规范正交基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵

则：P为正交阵 证法：由 $B=AP$、$A^TA=B^TB=E$ 得 $P^TP=E$

6) 推论：设A是一个n阶非零实矩阵 $(n>2)$ 且 $A^T=A^*$，则：A为正交阵

7) 推论：设正交阵A、B满足 $|A||B|<0$，则 $|A+B|=0$

8) 正交阵的实特征值为1或-1 证：对 $X\neq0$，设 $\lambda X=AX$. $\lambda^2(X,X)=(\lambda X,\lambda X)=(AX,AX)=(X,X)\Rightarrow\lambda=1,-1$

两个向量组等价的充要条件：

向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 与 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$ 等价

$\Leftrightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

第五章 线性方程组

要解决什么问题？

①是否有解 ②有多少解 ③解的结构 ④具体解法 ⑤应用

1、基本概念

1）设有线性方程组如下：（m个方程、n个未知数、$a_{ij}\in F, b_j\in F, X_i\in F$）

最高次为一次

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (1)$$

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$，$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$，$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$

系数矩阵

记 $B=(A\vdots\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

增广矩阵

则(1)式可写成矩阵形式 $AX=\beta$ （1'）

$R(B)=R(A\vdots\beta)\geq R(A)$

$\therefore R(B)=R(A)$ 或 $R(A)+1$

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 即 $\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi})^T$

则(1)式可写成向量形式 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ （1''）

2）若方程组有解，则称该方程组是相容的；若方程组无解，则称该方程组不相容

3）若 $\beta\neq 0$，即 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为0，则称(1)为非齐次线性方程组

若 $\beta=0$，即 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$，则称(1)为齐次线性方程组 次数整齐⇒每个单项式均为1次

2、是否有解？

1）齐次线性方程组必有解 $X=0$，不再讨论是否有解

2）非齐次线性方程组(1)有解

（A的列空间）

$\Longleftrightarrow$ β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，即 β 在A的列向量张成的向量空间中

$\Longleftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 等价

定理：非齐次线性方程组(1)有解 $\Longleftrightarrow R(A)=R(B)$

No.

Date

3. 有多少解？解的结构？

对齐次线性方程组 $\beta=0$， n为未知数个数

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad (2) \qquad AX=0 \quad (2') \qquad x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0 \quad (2'')$$

记(2)的所有解向量构成的解集合为 $N(A)$

定理：齐次线性方程组(2)的解集合 $N(A)$ 是向量空间

且 $N(A)$ 的基所含向量个数等于未知数个数减去 $R(A)$，即 $\dim N(A)=n-R(A)$

推论：1) $AX=0$ 有唯一解（只有零解）$\Leftrightarrow R(A)=n \Leftrightarrow A$ 为列满秩阵

即 $N(A)=\{0\}$，$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关

注：A行满秩只代表没有多余方程，因此看列不看行

2) $AX=0$ 有无穷多解（有非零解）$\Leftrightarrow R(A)<n \Leftrightarrow A$ 的列向量组线性相关

当 $R(A)=r<n$ 时，设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $N(A)$ 的基，则 $AX=0$ 的解空间可表示为：

$$N(A)=\{X \mid X=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},\ k_i\in F,\ i=1,2,\cdots,n-r\}$$

称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为方程组(2)的基础解系（解空间的基、解向量的极大无关组）

只有 $R(A)<n$ 时的齐次线性方程组有基础解系

方程组(2)的通解可表示成： $X=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$， $\forall k_i\in F$，$i=1,2,\cdots,n-r$

通解 $\begin{cases} \text{基础解系} \\ n-R(A)\text{个任意常数}k_i \end{cases}$

3) 当 $R(A)<n$ 时，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 为 $AX=0$ 的基础解系

$\Leftrightarrow \xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是 $n-R(A)$ 个，线性无关的，$AX=0$ 的解向量

推论：若 $m=n$，即 n 个方程，n 个未知数，$A\in F^{n\times n}$

则 $AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$； $AX=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

对非齐次线性方程组 $\beta\neq 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_n \end{cases} \quad (3) \qquad AX=\beta \quad (3') \qquad x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta \quad (3'')$$

称 $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad (4) \qquad AX=0 \quad (4') \qquad x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0 \quad (4'')$$

为(3)的导出组，或称(4)为与(3)对应的齐次线性方程组

No.

Date

1) 定理：若 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 都是 $AX=\beta$ 的解，且 $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$，则：

(1) $k_1+k_2+\cdots+k_s=0$ 时，η 是 $AX=0$（导出组）的解

(2) $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$ 时，η 是 $AX=\beta$ 的解

特别地

(1) 若 η_1, η_2 都是 (3) 的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是 (4) 的解

(2) 若 η 是 (3) 的解，ξ 是 (4) 的解，则 $\eta+\xi$ 是 (3) 的解

2) 推论 $AX=\beta$ 记 $B=(A\vdots\beta)$

有解 { (1) 方程组 (3) 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)=n$

(2) 方程组 (3) 有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)<n$ }

当 $R(A)=R(B)=r<n$ 时，

若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 为 (4) 一基础解系，η 为 (3) 一个特解，

则 (3) 的通解可表示为 $X=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$，$\forall k_i\in F$，$i=1,2,\cdots,n-r$

推论 2. 当 $m=n$ 时，$A\in F^{n\times n}$

(1) $AX=\beta$ 有唯一解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

(2) $AX=\beta$ 有无穷多解 $\Rightarrow |A|=0$

(2') $|A|=0$ 且 $AX=\beta$ 有解 $\Rightarrow$ 有无穷多解

推论：$R(A)=m \Rightarrow AX=\beta$ 有解

可以证明，$\beta\neq 0$ 时 η 与 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关

3) 求通解的一般思路：分析 $\dim N(A)$ $\rightarrow$ 求出方程组特解 $\rightarrow$ 求出导出组基础解系

把常数项去掉

写成这样的一定是方程组的解
方程组的解一定能写成这样

4. 具体解法？ 初等行变换☆

对方程组 $AX=\beta$ $\quad (A\vdots\beta)\xrightarrow{\text{行}}(\bar{A}\vdots\bar{\beta})$

则有 $\bar{A}X=\bar{\beta}$ 与 $AX=\beta$ 同解

步骤：(1) 将 $(A\vdots\beta)\xrightarrow{\text{行}}(\bar{A}\vdots\bar{\beta})$，一般化为行阶梯或行最简

(2) 写出 $(\bar{A}\vdots\bar{\beta})$ 对应的方程组，并移项（选取 $\bar{A}$ 的一个不为 0 的 $R(A)$ 阶上三角形子式，

将（以此子式中元素为系数的项）留在等式左边，其余项变号后移到等式右边

(3) 求上述方程组特解

(4) 将常数项都去掉，求导出组的基础解系

$\Rightarrow$ 得到通解

KOKUYO

No.
Date

例：设 $A\in F^{m\times n}$, $R(A)=m$（行满秩阵）. $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_m\end{pmatrix}$，则：$\forall \beta\in F^m$，$AX=\beta$总有解

证：由 $m=R(A)\le R(A\vdots\beta)\le m$ 知 $R(A)=R(A\vdots\beta)=m \Rightarrow AX=\beta$有解

解释：记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in F^{m\times n}$，$\alpha_i\in F^m$，$R(A)=m\Rightarrow R\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}=m$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中必存在 F^m 的基（此时A的列空间即为 F^m）

$\Rightarrow \forall\beta\in F^m$，$\beta$ 可由 F^m 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示 $\Rightarrow AX=\beta$有解

反之也成立，即 $\forall\beta\in F^m$，$AX=\beta$有解 $\Rightarrow R(A)=m$

证：取 $\beta_i=e_i=(0\cdots010\cdots0)^T$，$Ax_i=\beta_i$有解，

$A(x_1,x_2,\cdots,x_m)=(Ax_1,Ax_2,\cdots,Ax_m)=(e_1,e_2,\cdots,e_m)=E_m$

记 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，由 $m\ge R(A)\ge R(AX)=R(E_m)=m$ 知 $R(A)=m$

$A\in F^{m\times n}$，则 $R(A)=m \Leftrightarrow \forall\beta\in F^m$，$AX=\beta$总有解

例：$A\in F^{m\times n}$，$R(A)=r<n$，则：存在秩为 $n-r$ 的列满秩阵B，使 $AB=0$　取 $B=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r})$ 即可

真命题：

1. 若 $\beta\ne0$ 则 $AX=\beta$ 的所有解不构成 R^n 的子空间　解向量不含0

2. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in R^{m\times n}$，若 $\underbrace{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}_{R(A)=n}$ 线性无关，$\underbrace{\alpha_1,\cdots\alpha_n,\beta}_{R(B)=n}$ 线性相关，则 $AX=\beta$ 有唯一解

3. 设 $AX=\beta$ 的导出组为 $AX=0$，则

$AX=\beta$有唯一解 $\Rightarrow AX=0$有唯一解；　$AX=\beta$有无穷多解 $\Rightarrow AX=0$有无穷多解

4. 设 $A\in R^{m\times n}$，则线性方程组 (I) $AX=0$　(II) $A^TAX=0$　同解　$\Rightarrow R(A)=R(A^TA)=R(AA^T)$

证：$\Rightarrow$ 若 $AX_1=0$，则 $A^TAX_1=A^T0=0$

$\Leftarrow$ 若 $A^TAX_1=0$，则 $X_1^TA^TAX_1=X_1^T0=0$

且 $X_1^TA^TAX_1=(AX_1)^TAX_1=(AX_1,AX_1)$

$\Rightarrow (AX_1,AX_1)=0\Leftrightarrow AX_1=0$

5. 设 $A.B\in F^{m\times n}$，有线性方程组 $AX=0$. $BX=0$，则：　反之则不成立，理解三维空间中的xoy面和z轴无包含关系

若 $AX=0$ 的解均是 $BX=0$ 的解，则 $R(A)\ge R(B)$　A的解空间 $\subseteq$ B的解空间，$n-R(A)\le n-R(B)$

若 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解，则 $R(A)=R(B)$　A的解空间 = B的解空间，$n-R(A)=n-R(B)$

6. 与线性方程组 $AX=0$ 的基础解系等价的线性无关向量组也是 $AX=0$ 的基础解系

设 $R(A)=r$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的基础解系，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关且与 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 等价

只需证 $s=n-r$ 且 β_i 均为 $AX=0$ 的解

Campus

7、看待矩阵乘法的新视角

等式 $A_{m\times n}B_{n\times r}=0$ 可看作以A为系数矩阵的r个方程构成的齐次线性方程组 $AX=0$

其中B的每一个列向量都是 $AX=0$ 的解

eg、设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\-1&a&4-a\end{pmatrix}$，$R(A)=2$，求 $A^*X=0$ 的通解

解：$\because R(A)=2$，$\therefore R(A^*)=1$　$\therefore \dim N(A^*)=3-R(A^*)=2$

$\because A^*A=|A|E=0\cdot E=0$　$\therefore A^*A=0 \Rightarrow$ A的列向量均为 $A^*x=0$ 的解，找到2个无关的即可

对A，$c_3+c_2\Rightarrow\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}$　$c_1\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 线性无关　$\therefore k_1\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$　$\forall k_1,k_2\in F$ 为通解

8、设 $A_{m\times n}$、$B_{n\times l}$，则 $ABX=0$ 与 $BX=0$ 是同解方程组 $\Leftrightarrow R(AB)=R(B)$

两个方程组同解，即一个方程组的基础解系也是另一个方程组的基础解系

$AX=0$ 与 $BX=0$ 同解 $\Leftrightarrow R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=R(A)=R(B)$

9、$Ax=0$ 和 $A^*x=0$ 之间的关系

① $|A|=0 \Rightarrow \begin{cases}A^*\text{的列向量都是}Ax=0\text{的解向量}\\A\text{的列向量都是}A^*x=0\text{的解向量}\end{cases}$　证：$AA^*=A^*A=|A|E=0$

② $R(A)=n-1$，$R(A^*)=1 \Rightarrow \begin{cases}A^*\text{的非零列向量是}Ax=0\text{的基础解系} & \dim N(A)=1\\A\text{的}n-1\text{个线性无关列向量是}A^*x=0\text{的基础解系} & \dim N(A^*)=n-1\end{cases}$

③ $R(A)=n$ 时 $Ax=0$ 与 $A^*x=0$ 无非零公共解　　因为 $Ax=0$ 无非零解

④ $R(A)<n-1$ 时，$Ax=0$ 与 $A^*x=0$ 有非零公共解　　因为 $A^*=0$，$\forall x$ 有 $A^*x=0$，且 $Ax=0$ 有非零解

⑤ $R(A)=n-1$ 时，$Ax=0$ 与 $A^*x=0$ 有非零公共解 $\Leftrightarrow$ 0是A至少二重特征值 $\Leftrightarrow$ 0是 A^* 的n重特征值

证：$R(A)=n-1\Rightarrow R(A^*)=1 \Rightarrow A^*=\alpha\beta^T$，其中 α 为 A^* 非零列向量，$\beta\neq0$　故 α 是 $Ax=0$ 基础解系

$Ax=0$ 与 $A^*x=0$ 有非零公共解 $\Leftrightarrow A^*\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha\beta^T\alpha=0$　即 $(\beta^T\alpha)\alpha=0 \Leftrightarrow \beta^T\alpha=0$

$\because A^*$ 的特征值为 $0\cdots0,\beta^T\alpha$　$\Leftrightarrow$ 0是 A^* 的n重特征值

psp_dada

No.

Date

第六章 特征值、特征向量及相似矩阵

定义：设 $A\in F^{n\times n}$，若有数 $\lambda\in F$ 及 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in F^n$，$X\neq 0$，使得

$|\lambda|>1$ 伸长 $|\lambda|<1$ 缩

$\lambda>0$ 同向 $\lambda<0$ 反向

$$AX=\lambda X \quad (1)$$

刻画被A作用后特征向量X的伸缩情况

成立，则称 λ 是A的一个特征值，称非零向量X为A的属于特征值 λ 的一个特征向量

被A作用后与原来共线的向量

式(1)可写成等价表达式 $(\lambda E_n-A)X=0 \quad (2)$

为一个含n个未知数、n个方程的齐次线性方程组

式(2)有非零解的充要条件是其系数行列式为0： $|\lambda E_n-A|=0 \quad (3)$

即 $$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}=0 \quad (4)$$

式(4)为一个以 λ 为未知数的一元n次方程，复数域上有n个根(重根按重数计算)

称(3)为方阵A的特征方程

称其左端为方阵A的特征多项式，记作 $f_A(\lambda)=|\lambda E_n-A|$

$\Rightarrow$ A的特征值(复数域上有n个)就是(3)的根；

A的属于特征值 λ_i 的特征向量就是齐次线性方程组

$$(\lambda_i E_n-A)X=0 \quad (5)$$

的非零解向量

称(5)的解空间为A的关于特征值 λ_i 的特征子空间 $N(\lambda_i E_n-A)$

$\Rightarrow$ 特征子空间 $N(\lambda_i E_n-A)$ 中任意非零向量均为A关于 λ_i 的特征向量

eg. 三角阵的特征值：主对角线上元素

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的特征方程为 $\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}=0$ 其解为 $\lambda=a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$

$\Rightarrow$ 对角阵的特征值：主对角线上元素

单位阵 E_n ： 1 　且 $\forall$ 非零列向量X都是 E_n 的属于特征值1的特征向量

零方阵O ： 0 　且 $\forall$ 非零列向量X都是零方阵的属于特征值0的特征向量

验证一个向量是否为一个矩阵的特征向量 ①该向量不为0

②找到一个数 λ，使得 $AX=\lambda X$ 成立

推论：若 $A\in F^{n\times n}$，$R(A)=1$，则 $\lambda_1=tr(A)$，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$

秩为1的方阵的特征值的性质

KOKUYO

No.

Date

特征值与特征向量的性质

$A\in F^{n\times n}$，在复数域内，A有n个特征值，记为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) 方阵A的n个特征值之和等于A的迹　$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=tr(A)$

(2) 方阵A的n个特征值之积等于A的行列式　$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

$\Rightarrow$ A有特征值0 $\Leftrightarrow$ $|A|=0$　　A无特征值0 $\Leftrightarrow$ A可逆

对矩阵作变换，特征值与特征向量的变化：

矩阵	$A\Rightarrow$	A^2	$aA+bE$	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$	A^T
特征值	λ	λ^2	$a\lambda+b$	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$ ①	λ	λ
属于特征值的特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$	?

定理：$f(x)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$，$f(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$

若$AX=\lambda X$，$(X\neq0)$ 则$f(A)X=f(\lambda)X$

① A：λ_1　λ_2　λ_3

$\downarrow$　$\downarrow$　$\downarrow$

A^*：$\lambda_2\lambda_3$　$\lambda_1\lambda_3$　$\lambda_1\lambda_2$

定理：方阵A的属于不同特征值的线性无关特征向量线性无关

$\Rightarrow$ 1) 若$AX=\lambda X$，$AY=\lambda Y$　$(X,Y\neq0)$

则$kX+lY$（k、l不全为零）仍是A关于λ的特征向量（X、Y在同一个特征子空间中$\Rightarrow kX+lY$也在）

2) 若$AX=\lambda X$，$AY=\mu Y$.（$\lambda\neq\mu$，$X,Y\neq0$）则：$X+Y$一定不是A的特征向量

相似矩阵

引入：A与B等价，即∃可逆阵P.Q st. $B=PAQ$　等价保持秩不变

定义：设$A.B\in F^{n\times n}$　若∃可逆阵T, st.　$B=T^{-1}AT$

则称A与B相似，称从A到B的这种变换为相似变换，称T为相似变换矩阵

$B=T^{-1}AT$有等价形式：$AT=TB$且T可逆

$\Rightarrow$上述P与Q互逆时A与B相似，即相似关系是一种特殊的等价关系

相似矩阵满足：

(1) 秩相等：若$A\sim B$，则$R(A)=R(B)$　　(2) 自反性：$A\sim A$

(3) 对称性：若$A\sim B$，则$B\sim A$　　(4) 传递性：若$A\sim B$且$B\sim C$ 则$A\sim C$

∵对E，$T^{-1}ET=E$，对kE，$T^{-1}kET=kE$　∴单位阵纯量阵只与自身相似

Campus　若$A.B\in F^{n\times n}$且$|A|\neq0$，则AB与BA相似

psp_dada

No.

Date

定理：若$A\sim B$，则A与B的特征多项式相同，即$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

$\Rightarrow$ 若$A\sim B$，则 1）A与B的特征值相同　反之未必成立

2）$tr(A)=tr(B)$　　若A、B可相似对角化且A、B特征值

3）$|A|=|B|$　　相同，则$A\sim B$

性质：若$A\sim B$，$f(x)$是一多项式，则$f(A)\sim f(B)$，$A^{-1}\sim B^{-1}$，$A^T\sim B^T$，$\forall t\in R$，$tE-A\sim tE-B$ 均用定义证明

$\because B=P^{-1}AP$　$\therefore B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$

$\because B=P^{-1}AP$　$\therefore B^T=P^TA^TP^{-T}$

几何重数与代数重数

定义：设λ_0为n阶方阵A的一个特征值，λ_0是A的特征方程$|\lambda_0 E_n-A|=0$的m重根，

称m为λ_0的代数重数，记为r_0　$\sum r_i=n$

称λ_0对应的特征子空间（即$(\lambda_0E-A)X=0$的解空间）的维数$\dim(\lambda_0E_n-A)$

为λ_0的几何重数，记为k_0　$\sum k_i\le n$

$\Rightarrow$ λ_0有（几何重数）个线性无关特征向量

定理：矩阵特征值的几何重数$\le$代数重数

推论：每个单根特征值（即代数重数为1）恰对应一个线性无关特征向量

方阵的相似对角化

定义：若方阵A与一个对角矩阵D相似，则称A可相似对角化　若方阵A可相似对角化，则$R(A^*)=R(A)$

方阵可相似对角化的3个条件

1）充要：n阶方阵A可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关特征向量

同时，$T^{-1}AT=D$为对角阵 $\Leftrightarrow$ ①且②

① T的n个列向量为A的n个线性无关特征向量

② D的主对角线元素依次为上述特征向量所对应的特征值

即：设A有n个线性无关特征向量$T_1,T_2,\cdots,T_n$，其依次对应的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（可以相等）

令$T=(T_1,T_2,\cdots,T_n)$，$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$

则$T^{-1}AT=D$

$\Rightarrow$ 若A可相似对角化，则A的特征值与（对应的线性无关的）特征向量保存了A的全部信息

可通过特征值与特征向量写出T与D，由$T^{-1}AT=D$反解出A

KOKUYO

也可计算A^n、A^nX

No.

Date

2）充分：若n阶方阵A有n个互不相同特征值，则A可相似对角化

说明每个特征值都是单根，都只会对应1个线性无关特征向量

3）充要：n阶复方阵A可相似对角化 ⟺ A的每一个特征值的几何重数=代数重数

即 $\sum k_i = n \Leftrightarrow k_i = r_i \Leftrightarrow$ A可相似对角化

实对称阵的特征值、特征向量及正交相似对角化

实对称阵即满足 $A=A^T$，$A=\bar{A}$ 的方阵

性质 (1) 实对称阵的特征值均为实数

(2) 实对称阵的对应于不同特征值的实特征向量必正交

(3) 实对称阵的任一特征值的几何重数=代数重数 ⟹ 实对称阵的 $\sum k_i = n$

定义：称相似对角化中相似变换矩阵为正交阵的情况为正交相似对角化

定理：实对称阵一定能正交相似对角化

设n阶实对称阵A

互不相同特征值：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$

代数重数=几何重数：$r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_s$

线性无关特征向量：$X_1, \cdots X_{1r_1} \quad X_{21} \cdots X_{2r_2} \quad \cdots \quad X_{s1} \cdots X_{sr_s}$

↓规范正交化

规范正交特征向量 $P_1 \cdots P_{1r_1} \quad P_{21} \cdots P_{2r_2} \quad \cdots \quad P_{s1} \cdots P_{sr_s}$

则 $P=(P_{11}, P_{12}, \cdots, P_{sr_s})$ 为正交阵，满足 $P^{-1}=P^T$

且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_s & \\ & & & \lambda_s \end{pmatrix}$

谱分解定理：以3阶实对称阵A为例，若 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是A的三个特征值，e_1, e_2, e_3 是属于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的两两正交的单位特征向量则：$A = \lambda_1 e_1 e_1^T + \lambda_2 e_2 e_2^T + \lambda_3 e_3 e_3^T$

证明：设A实对称，$Q=(e_1, e_2, e_3)$ 正交，由 $Q^TAQ=\Lambda$ 有 $A = Q\Lambda Q^T = (e_1\ e_2\ e_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \end{pmatrix}$

例：A的特征值2, 1, 1，$\xi_1 = (1,1,1)^T$ 为2的特征向量，求实对称阵A

解：$A-E \quad 1, 0, 0 \quad \xi_1 = (1,1,1)^T \quad 1$

$\therefore A-E = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore A = \cdots$

Campus

psp_dada

No.

Date

第八章 实二次型与二次曲面

定义：称含有n个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，系数取自实数域R的n元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2 \quad \cdots (1)$$

完全平方项　　交叉二次项

为实二次型

取 $a_{ji} = a_{ij}$，$i<j$，$i,j = 1, 2, \cdots, n$，则式(1)可写成

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots\cdots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则又可写成：$f = X^TAX$

A为实对称阵，A的主对角线元素为二次型完全平方项的系数

称A为二次型f的矩阵，称R(A)为二次型f的秩

一个二次型与一个对称矩阵A一一对应 …… ①

定义：称只含完全平方项的二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \cdots + k_nx_n^2$ 为标准二次型

标准二次型的矩阵为实对角阵

定义：称只含完全平方项且系数均为±1或0的二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$ 为规范二次型

① 设 $A, B \in F^{n\times n}$，满足：对任意 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，都有 $X^TAX = X^TBX$，若 $A^T = A$，$B^T = B$ 则 $A = B$

注：A不对称时，$f = X^TAX$ 仍为二次型　故无论A是否对称，$f = X^TAX$ 对应的矩阵是 $\frac{A+A^T}{2}$

KOKUYO

No.

Date

合同　反映了同一二次型在不同基下对应的矩阵之间的关系

定义：对 n 阶方阵 A、B，若∃可逆阵 P，使得

$$B=P^TAP$$

则称 A 与 B 合同

性质：(1) 自反性　(2) 对称性　(3) 传递性

合同也是一种特殊的等价关系，合同保持秩不变

对称阵只能与对称阵合同，正定阵只能与正定阵合同

A 与 B 正交相似 $\Leftrightarrow$ A 与 B 正交合同

合同变换不改变实对称阵对应的实二次型的正、负惯性指数

推论：若 A、B 为 n 阶实对称阵，则

1) A 与 B 合同 $\Leftrightarrow$ A 与 B 的正、负特征值的个数对应相同

2) A 与 B 相似（即特征值完全相同）$\Rightarrow$ A 与 B 合同

推论：合同变换不改变矩阵的正定性

n 元实二次型的化简

定义：设 n 阶方阵 C，变量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 之间有变换 $X=CY$

C 为可逆阵时称为可逆变换

R^n 中向量在两组基下的坐标变换就是可逆变换

C 为正交阵时称为正交变换　正交变换不改变向量的长度及夹角

R^n 中向量在两组规范正交基下的坐标变换就是正交变换

目标：对给定的实二次型 $f=X^TAX$，寻找合适的可逆/正交变换 $X=CY$，使

$$f=X^TAX=(CY)^TACY=Y^T(C^TAC)Y=Y^T\begin{pmatrix}k_1&&\\&k_2&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{pmatrix}Y=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

No.

Date

法一：正交变换法　　用正交变换法化成的标准形是唯一的（不考虑变量的排列顺序）

已知：实对称阵一定能正交相似对角化

定理：对任意n元实二次型 $f=X^TAX$，总存在正交变换 $X=PY$，将二次型化为标准形

$$f=X^TAX=Y^T(P^TAP)Y=Y^T\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}Y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为A的n个特征值，P的列向量为与之对应的规范正交的特征向量

法二：拉格朗日配方法　　不唯一

Step1：尽 x_1 配方，配方后括号外不再有 x_1

Step2：尽 x_2 配方，配方后括号外不再有 x_2

……

这样配方可保证变换矩阵C可逆

注：若无 x_1^2 项则跳过Step1…若无任何平方项，则先生出平方项

法三：初等变换法　　不唯一

任一实对称阵A，通过一系列对于行、列来说"协调一致"的初等变换化为对角阵Λ

方法：对 $2n\times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$，每作一次列变换，同时对其前n行作一次相应的行变换

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}C^TAC\\C\end{pmatrix}$$

当 C^TAC 为对角阵时，C即为变换矩阵

惯性定理：

n元实二次型f经适当实可逆变换一定可化为标准形，且

① 标准形不唯一　　② 标准形的秩r唯一

③ 标准形中正平方项的个数（称为f的正惯性指数p）唯一，等于f对应的A正特征值个

　　　负　　　　　　　　　负　　　　　　　q 唯一　　　　　　　负

且 $p+q=r$

④ f的规范形唯一（不计排列次序）

KOKUYO

No.

Date

正定二次型

定义：设n元实二次型$f=X^TAX$，若对R^n中任何列向量$X_0\neq 0$，都有

$$f(X_0)=X_0^TAX_0>0$$

则称f为正定二次型，称其的矩阵A为正定阵

正定阵一定是实对称阵，反之未必

定理：n元实二次型$f=X^TAX$为正定二次型

$\Leftrightarrow$ f的正惯性指数为n

$\Leftrightarrow$ f的矩阵A的特征值全正

$\Leftrightarrow$ 存在实可逆阵Q使 $A=Q^TQ$ （即A与单位阵合同）

$\Leftrightarrow$ A的各阶顺序主子式都大于零，即 —— 判别具体的二次型是否正定

$a_{11}>0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0 \quad \cdots\cdots \quad |A|>0$

常用的判别是否正定的方法：定义法，特征值法

注：若要判定矩阵A为正定阵，则必先判定矩阵A为实对称阵

性质：1) 若矩阵A是正定阵，则$|A|>0$，$tr(A)>0$，A可逆

2) 若矩阵A是正定阵，则 $\underbrace{A^*、A^{-1}}_{特征值}$、$\underbrace{KA(k>0)、2A+E}_{定义}$ 等也是正定阵

3) $A\in F^{m\times n}$，则A^TA为正定阵 $\Leftrightarrow R(A)=n$ $\quad x\neq 0, (AX,AX)>0 \Rightarrow AX\neq 0 \Rightarrow AX=0$只有零解

4) $A=(a_{ij})\in F^{m\times n}$，$A\neq 0$，n元实二次型$f=\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$正定 $\Leftrightarrow R(A)=n$

5) 若n阶方阵A、B均为正定阵，则AB的特征值全正 （AB不一定是正定阵）

6) $A\in R^{m\times n}$ 则 $|A^TA|\neq 0 \Leftrightarrow A^TA$正定

7) $B\in R^{m\times n}$ 则 B^TB半正定

No.

Date

空间中的曲面与曲线

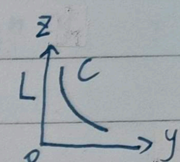
球面

设球心 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径 r，则球面方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

一般地，形如 $A(x^2+y^2+z^2)+Bx+Cy+Dz+F=0$ 的都是球面，该方程的特点

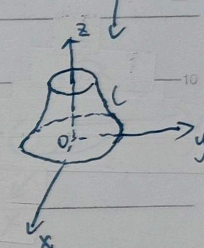
①是三元二次方程 ②平方项 x^2、y^2、z^2 系数相同 ③无交叉二次项

旋转曲面



由一条平面曲线 C 绕该平面上一定直线 L 旋转一周所成的曲面称为旋转曲面

一般取坐标面 母线　　旋转轴，一般取坐标轴



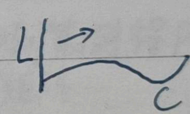
eg. yOz 上曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{绕 z 轴转一周}}$ $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$　轴坐标不变

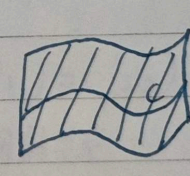
$\xrightarrow{\text{绕 y 轴转一周}}$ $f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$　另一坐标变

柱面

平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫柱面

准线　　母线





含有两个变量的方程在平面上表示一条曲线，在空间中表示一个柱面，以平面上这条曲线为准线，其母线平行于方程中未出现的变量对应的坐标轴

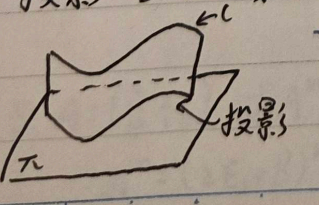
椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 抛物柱面 $x^2=2py\ (p>0)$

空间曲线

一般方程 $\begin{cases} S_1: F(x,y,z)=0 \\ S_2: G(x,y,z)=0 \end{cases}$　参数式方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$　螺旋线 $\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=vt \end{cases}$

投影：空间曲线 C 在平面 π 上的投影曲线，即以 C 为准线，作母线垂直于 π 的柱面，两面的交线

一般取坐标面



eg. 曲线 C $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在面 xoy 上的投影

用 F_1、F_2 消去 z 得 $F(x,y)=0$

投影即 $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

eg. 曲线 C $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 在面 xoy 上的投影

即 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=0 \end{cases}$

线代习题

☆1. 设A为n阶非零实矩阵，有$A^*=A^T$，证明：(1) $|A|>0$　(2) 若$n>2$，则$|A|=1$且A为正交矩阵

证：已知$A^*=A^T$，即$(A_{ji})_{n\times n}=(a_{ji})_{n\times n}$　$\therefore A_{ij}=a_{ij}$

(1) 将$|A|$按第i行展开有：$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$ $(i=1,2,\cdots n)$

$\therefore |A|=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2$ $(i=1,2\cdots n)$　又由$A\neq 0$，A有非零元素，记为a_{kj}

令$i=k$，$|A|=a_{k1}^2+\cdots+a_{kj}^2+\cdots+a_{kn}^2>0$

(2) $AA^T=AA^*=|A|E$，两边取行列式，得$|AA^T|=|A|^2=||A|E|=|A|^n$

$\Rightarrow |A|^{n-2}=1$　$\because |A|>0$ 且 $n>2$　$\therefore |A|=1$

$\therefore A^TA=A^*A=|A|E=E$　$\therefore A$为正交阵

2. 设$A\in F^{3\times 3}$满足$A^*=A^T$，若$a_{31}=a_{32}=a_{33}>0$，则$a_{31}=$ $\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

解：由上题可知，$|A|=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=3a_{31}^2=1$

$\therefore a_{31}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

总结：① $a_{ij}=A_{ij}\Leftrightarrow A^TA=E$且$|A|=1$

② $a_{ij}=-A_{ij}\Leftrightarrow A^TA=E$且$|A|=-1$

3. 设A、$B\in F^{3\times 3}$，B可逆，且$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$　若将B的第2列加到第1列得P，求：

初等矩阵

$P^{-1}AP=$ $\underline{\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}}$

解：由题，$P=B\begin{pmatrix}1&&\\1&1&\\&&1\end{pmatrix}$　两边取逆，$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\\-1&1&\\&&1\end{pmatrix}B^{-1}$

$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\-1&1&\\&&1\end{pmatrix}B^{-1}AB\begin{pmatrix}1&&\\1&1&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\-1&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\1&1&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\-1&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\1&1&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

☆借助初等矩阵，利用矩阵乘法，揭示初等变换前后两个矩阵间的关系

4. 设A、$B\in F^{2\times 2}$，已知A^*、B^*、$|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$的伴随矩阵为

解：$\begin{pmatrix}&A\\B&\end{pmatrix}$的行列式：$\begin{vmatrix}&A\\B&\end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}\begin{vmatrix}A&\\&B\end{vmatrix}=|A||B|=6$

逆：$\begin{pmatrix}&A\\B&\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&B^{-1}\\A^{-1}&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&\frac{1}{3}B^*\\\frac{1}{2}A^*&\end{pmatrix}$

$\because CC^*=|C|E$　$\therefore C^*=|C|C^{-1}$

$\therefore \begin{pmatrix}&A\\B&\end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix}&A\\B&\end{vmatrix}\begin{pmatrix}&A\\B&\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&2B^*\\3A^*&\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}2&&\\-3&2&\\4&1&2\end{pmatrix}$，求$A^n$　拆分法求幂　记$A=2E_3+B$，$B=\begin{pmatrix}&&\\-3&&\\4&1&\end{pmatrix}$　$B^2=\begin{pmatrix}&&\\&&\\-3&&\end{pmatrix}$　$B^3=0$

$\therefore A^n=(2E_3+B)^n=C_n^0(2E_3)^n+C_n^1(2E_3)^{n-1}B+C_n^2(2E_3)^{n-2}B^2+0\cdots$

$=2^n\cdot E_3+n2^{n-1}\begin{pmatrix}&&\\-3&&\\4&1&\end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}\begin{pmatrix}&&\\&&\\-3&&\end{pmatrix}+0\cdots$

$=\begin{pmatrix}2^n&&\\-3n\cdot 2^{n-1}&2^n&\\n(19-3n)2^{n-3}&n2^{n-1}&2^n\end{pmatrix}$

No.

Date

6、$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$，求$B^n$ 分解法求方阵的幂

解：$B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}(2\ -1\ -2\ 3)$ 且 $(2\ -1\ -2\ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}=13=tr(B)$

$\therefore B^n=(\ )(\ )(\ )(\ )\cdots(\ )(\ )=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}13^{n-1}(2\ -1\ -2\ 3)=13^{n-1}\cdot B$

7. 已知$A\in F^{4\times4}$，$|A|=0$. 则 $R((A^*)^*)=$ __0__

法一：由 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A=0\cdot A=0$ 得 $R((A^*)^*)=0$

$R(A^*)=\begin{cases} n & R(A)=n \\ 1 & R(A)=n-1 \\ 0 & R(A)<n-1 \end{cases}$

法二：$\because |A|=0$ $\therefore$ $R(A)\to R(A^*)\to R((A^*)^*)$

分类讨论 $=n-1$ 1 0

$<n-1$ 0 0

8. $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{n\times m}$ 且$R(A)=m$. 以下结论正确的是 __D__

(A) A的任一m阶子式都不为0 (C) 若$AB=0$ 则$B=0$

(B) $|A^TA|\neq0$ 注：不能拆成$|A^T||A|$! (D) 若$R(B)=n$, 则$R(AB)=m$

A. ∃一个m阶子式不为0

B. $A^TA\in F^{n\times n}$, $R(A^TA)=m$,

又由$A\in F^{m\times n}$, $R(A)=m$ $\therefore m\leq n$ $\therefore R(A^TA)\leq n$. A^TA不一定可逆

C. $AB=0$ $\therefore$ $R(A)+R(B)\leq n$ $\therefore R(B)\leq n-m$ B不一定为0

D. $R(B)=n$, $AB\in F^{m\times m}$, $m=R(A)+R(B)-n\leq R(AB)\leq m$ $\Rightarrow R(AB)=m$

9. 若A.B为同阶方阵且A可逆，证明：$r(AB-E)\leq r(A-E)+r(B-E)$

证：由 $\begin{pmatrix} A-E & 0 \\ 0 & B-E \end{pmatrix}\xrightarrow[c_1+c_2]{Ar_2}\begin{pmatrix} A-E & A-E \\ & AB-A \end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix} A-E & AB-E \\ & AB-A \end{pmatrix}$

①秩的公式的来源：分块矩阵初等变换

②自己构造

知：$r(A-E)+r(B-E)=r\begin{pmatrix} A-E & \\ & B-E \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A-E & AB-E \\ & AB-A \end{pmatrix}\geq r(AB-E)$ □

10. 设$A\in F^{n\times n}$满足$A^2=A$. 证明：$E-2A$可逆 方阵A可逆⟺∃B, 使$BA=E$ (或$AB=E$)

有$A^2-A=0$，要使$E-2A$可逆，即$A-\frac{1}{2}E$可逆

$(A-\frac{1}{2}E)(A-\frac{1}{2}E)=A^2-A+\frac{1}{4}E^2=\frac{1}{4}E^2=\frac{1}{4}E$

Campus

$\therefore (E-2A)(E-2A)=E$

$\therefore E-2A$ 可逆

No.

Date

11. 设 $A\in F^{n\times n}$ 满足 $(A+E)^m=0$，$(m\geq 1)$，证明A可逆

证：$(A+E)^m=A^m+C_m^1A^{m-1}+C_m^2A^{m-2}+\cdots+C_m^{m-1}A+E=0$

$\therefore A(A^{m-1}+C_m^1A^{m-2}+\cdots+C_m^{m-1}E)=-E$

$\therefore$ A可逆，$A^{-1}=-(A^{m-1}+C_m^1A^{m-2}+\cdots+C_m^{m-1}E)$

12. 若A、B、$AB-E$ 均为可逆阵，证明 $A-B^{-1}$，$(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 可逆

证：A、B可逆 $\Rightarrow$ A^{-1}、B^{-1}、AB、$(AB)^{-1}$ 均可逆

① $(A-B^{-1})B=AB-E$ $\quad\therefore A-B^{-1}=(AB-E)B^{-1}$ $\quad\therefore |A-B^{-1}|=|AB-E||B^{-1}|$

$\because |AB-E|\neq 0, |B^{-1}|\neq 0$ $\quad\therefore |A-B^{-1}|\neq 0$ $\quad\therefore A-B^{-1}$ 可逆

② 法一：利用①结果 $[(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}](A-B^{-1})=E-A^{-1}(A-B^{-1})=E-E+A^{-1}B^{-1}=(BA)^{-1}$

$\therefore (A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}=(BA)^{-1}\cdot(A-B^{-1})^{-1}$ $\quad\therefore |(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}|\neq 0$ $\quad\therefore (A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 可逆

法二：构造：$(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}=(A-B^{-1})^{-1}[E-(A-B^{-1})A^{-1}]=(A-B^{-1})^{-1}\cdot(AB)^{-1}$

$\therefore (A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 可逆

若 $C=AB$，且A、B均可逆，则C可逆 （可逆矩阵之积为可逆矩阵）

13. 设 $A\in F^{n\times n}$，$B\in F^{n\times 1}$，a、b、c为常数且 $|A|=a$，已知 $\begin{vmatrix} A & \beta \\ \beta^T & b \end{vmatrix}=0$，求 $\begin{vmatrix} A & \beta \\ \beta^T & c \end{vmatrix}=$ <u>$a(c-b)$</u>

解：行列式按列展开：$b\cdot(-1)^{n+n}\cdot|A|+(\qquad)=0$

$c\cdot(-1)^{n+n}\cdot|A|+(\qquad)=?$ 解得 $?=ca-ba=a(c-b)$

14. 设 $A、B\in F^{4\times 4}$，$|A|=2$，$|B|=3$，$|A^{-1}+B|=2$ 求 $|A+B^{-1}|=$ <u>$\frac{4}{3}$</u>

解：$|\underset{\frac{1}{2}}{A^{-1}}+B|=|A^{-1}(E+AB)|=|A^{-1}(B^{-1}+A)B|=\underset{\frac{1}{2}}{|A^{-1}|}\,|B^{-1}+A|\,\underset{3}{|B|}$

15. 定理：$\forall A\in F^{m\times n}$，$r(A)=r$，则必有 $P\in F^{m\times r}$、$Q\in F^{r\times n}$，P为列满秩，Q为行满秩，$A=PQ$

证：记可逆阵 $\bar{P}_{m\times m}$，$\bar{Q}_{n\times n}$ $\quad A=\bar{P}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\bar{Q}=\underset{m\times m}{\bar{P}}\underset{m\times r}{\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}}\underset{r\times n}{(E_r\ \ 0)}\underset{n\times n}{\bar{Q}}=PQ$

其中 $P_{m\times r}=\bar{P}_{m\times m}\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times r}$，$Q_{r\times n}=(E_r\ \ 0)_{r\times n}\bar{Q}_{n\times n}$

$\therefore$ P列满秩，Q行满秩 秩均为r.

No.

Date

16. 记$A\in F^{n\times n}$，$R(A)=1$，$tr(A)=2$. 求$|kE_n-A|$

解：$\because R(A)=1$ $\therefore$ 设$A=\alpha\beta$，$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ $\beta=(b_1,b_2\cdots b_n)$ $\therefore A=(a_ib_j)_{n\times n}$

$\because tr(A)=2$ $\therefore a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=2$

$\beta\alpha=(b_1,b_2\cdots b_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=2$

$\therefore|kE_n-\alpha\beta|=k^{n-1}|k-\beta\alpha|=k^{n-1}(k-2)$

17. 命题

(1) 若$A\in F^{n\times n}$，$A^2=A$ 则$A=0$或$A=E$ F 反例：$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

(2) 若$A^2=E$ 则$A=\pm E$ F 反例：$A=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}$

(3) 对$A\in F^{m\times n}$，$B\in F^{n\times m}$，$m>n$ 则$|AB|=0$ T $R(AB)\leq R(A)\leq n<m$，$AB\in F^{m\times m}\Rightarrow AB$不可逆

(4) 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0$，$i=1,2\cdots,n$，则A不可逆 T

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}&a_{12}\cdots&a_{1n}\\a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}&a_{22}\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}&a_{n2}\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a_{12}\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots\\0&a_{n2}\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow A$不可逆

(5) 当A为方阵时，$AB=0\Rightarrow|A|=0$或$B=0$ T

设$A\in F^{n\times n}$，若$|A|\neq0$ 则由$R(A)+R(B)\leq n$，$R(A)=n$ 得$R(B)=0$ 即$B=0$

18. 设$A.B\in F^{n\times n}$，且$A^2=A$，$B^2=B$，$R(B)=k$，$R(A+B-E)=n$，则$R(A)+R(AB)=$ $\underline{2k}$

满秩

解：$A(A+B-E)=AB$，$(A+B-E)B=AB$ $\because A+B-E\in F^{n\times n}$，$R(A+B-E)=n\Rightarrow$可逆

$\therefore R(AB)=R(A(A+B-E))=R(A)=R((A+B-E)B)=R(B)$

$\therefore R(A)+R(AB)=2R(B)=2k$

19. 求$\sum_{p_1\cdots p_n}\begin{vmatrix}a_{1p_1}&a_{1p_2}\cdots&a_{1p_n}\\a_{2p_1}&a_{2p_2}\cdots&a_{2p_n}\\\vdots&&\\a_{np_1}&a_{np_2}\cdots&a_{np_n}\end{vmatrix}=$ $\underline{0}$，其中Σ是对$1,2\cdots n$的所有全排列取和

① 奇排列个数=偶排列个数

② 为奇排列时行列式与为偶排列时行列式互为相反数(换列)

Campus

20. 设n维列矩阵α满足$\alpha^T\alpha=1$，E_n为n阶单位阵，$n>1$，$s\in R$，对矩阵$M=\begin{pmatrix}1 & -\alpha^T \\ \alpha & sE_n\end{pmatrix}$

(1) 讨论不同s下矩阵M的奇异性，(2) 在M可逆时，求M^{-1}

解：(1) $|M|=\begin{vmatrix}1 & -\alpha^T \\ \alpha & sE_n\end{vmatrix} \xlongequal{r_2-\alpha r_1} \begin{vmatrix}1 & -\alpha^T \\ 0 & sE_n+\alpha\alpha^T\end{vmatrix}=|sE_n+\alpha\alpha^T| \xlongequal{\text{降阶公式}} s^{n-1}(s-1)$

若$s=0$或$s=1$，$|M|=0$，M不可逆，奇异矩阵；

若$s\neq0$且$s\neq1$，$|M|\neq0$，M可逆，非奇异矩阵

(2) 由(1)知 $s\neq0$且$s\neq1$

$\because \begin{pmatrix}1 & -\alpha^T \\ \alpha & sE_n\end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-\frac{1}{s}\alpha c_2} \begin{pmatrix}1+\frac{1}{s} & -\alpha^T \\ & sE_n\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+\frac{1}{s}\alpha^T r_2} \begin{pmatrix}1+\frac{1}{s} & \\ & sE_n\end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\times\frac{1}{s}]{r_1\times\frac{1}{1+\frac{1}{s}}} \begin{pmatrix}1 & \\ & E_n\end{pmatrix}=E$

$\therefore \begin{pmatrix}\frac{s}{s+1} & 0 \\ 0 & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s}E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{s}\alpha^T \\ 0 & E_n\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}1 & 0 \\ -\frac{1}{s}\alpha & E_n\end{pmatrix}=E$，记为$P_1P_2P_3MQ=E$

$\therefore Q^{-1}=P_1P_2P_3M$ $\quad\therefore QP_1P_2P_3M=E$ $\quad\therefore M^{-1}=QP_1P_2P_3=\begin{pmatrix}\frac{s}{s+1} & \frac{\alpha^T}{s+1} \\ -\frac{\alpha}{s+1} & \frac{1}{s}E_n-\frac{\alpha\alpha^T}{s(s+1)}\end{pmatrix}$

例21. $A,B\in R^{3\times3}$，A的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$互不相同，且$AB=2A-B$，证明

(1) $AB=BA$ 证明A,B可交换：构造$f(A)g(B)=kE\ (k\neq0)$ 利用$P^{-1}P=PP^{-1}=E\Rightarrow f(A)g(B)=g(B)f(A)$

(2) $\exists$可逆阵P 使$P^{-1}AP$和$P^{-1}BP$均为对角阵 证明A,B共用同一套特征向量

证：(1) $(A+E)B=2A=2(A+E)-2E \quad\Rightarrow (A+E)(B-2E)=-2E$ (*)

$\therefore (B-2E)(A+E)=-2E \quad\Rightarrow (B-2E)(A+E)=(A+E)(B-2E)\Rightarrow AB=BA$

(2) 由(*) $B-2E=-2(A+E)^{-1} \quad\Rightarrow B=-2(A+E)^{-1}+2E$

记$f(x)=\frac{-2}{x+1}+2$ 则A特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，$B$特征值$f(\lambda_1)$、$f(\lambda_2)f(\lambda_3)$

对应特征向量$\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ $\qquad \xi_1\ \xi_2\ \xi_3$

记$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 则$P^{-1}AP$和$P^{-1}BP$均为对角阵（不一定是同一个对角阵）