线性代数与空间解析几何
第一章 n 阶行列式

曾吉文
哈尔滨工业大学数学科学学院

2022年 9 月

本章分四节介绍：行列式概念，行列式性质，行列式展开定理，Cramer(克莱姆)法则。

计划8个课时，每小节2个课时。第二周结束。

1. n 阶行列式概念
   - 线性方程组的求解公式
   - 全排列的逆序数，对换
   - n 阶行列式的概念
2. 行列式性质
3. 行列式展开定理
4. Cramer法则

1.1 n 阶行列式概念

1.1.1 线性方程组的求解公式

二元线性方程组：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad (10\text{-}1)$$

第一个式子乘 a_{22}，得到：

$$a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22} \cdots\cdots (2)$$

第二个式子乘 a_{12}，得到

$$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2 \cdots\cdots (3)$$

$(2)-(3)$可以消去未知数 x_2，

得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

类似可得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

用行列式表达括号里的表达式，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

分别用记号：二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

只要 $D \neq 0$， 我们就有解的表达式：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

对三元线性方程组：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

同样，可令

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} \\
&\quad -b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 \\
&\quad -a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} \\
&\quad -a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

三元线性方程组的解可以表达为三阶行列式：$D \neq 0$

$$
x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D} \quad \cdots\cdots (5)
$$

二阶行列式，三阶行列式是怎么计算的，有什么性质，我们接下来解决这个问题。

1.1.2 全排列的逆序数，对换

给定 n 个数字 $\{1,2,...,n\}$，全排列有 $n!$ 个。例如，$n=3$,有 6 个全排列

$$123,132,213,231,312,321$$

一般的 $1,2,...,n$ 个数的排列,

$$p_1p_2\cdots p_n$$

我们定义一个逆序数：

定义 1.1

给定正整数 $1,2,...,n$ 的一个排列：$p_1p_2\cdots p_n$,对于确定的p_i,

$$t(p_i)=|\{p_j|p_j>p_i,1\leq j\leq i-1\}|$$

即集合$\{p_1,p_2,...,p_{i-1}\}$中，比 p_i 大的元素的个数，记为 $t(p_i)$.

或者形象的说，p_i左边比它大的数的个数，记为 $t(p_i)$.

例如：$54123, t(5)=0, t(4)=1, t(1)=2, t(2)=2, t(3)=2.$

定义 1.2

对于排列 $p_1p_2\cdots p_n$,我们称

$$t(p_1p_2\cdots p_n)=t(p_1)+t(p_2)+\cdots+t(p_n)$$

为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数。

例如：

$$t(54123)=t(5)+t(4)+t(1)+t(2)+t(3)=7$$

- $t(p_1p_2\cdots p_n)$ 为偶数，$p_1p_2\cdots p_n$ 称为偶排列；
- $t(p_1p_2\cdots p_n)$ 为奇数，$p_1p_2\cdots p_n$ 称为奇排列.

例如：

1. $t(12\cdots n)=0, 123\cdots n$是偶排列；
2. $t(321)=3, t(4321)=6, t(54321)=10, t(654321)=15$，因此$4321, 54321$是偶排列；$321, 654321$ 是奇排列；
3. $t(n\cdots 21)=1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$,思考：$n\cdots 21$ 奇偶情况。提示：分别考虑：$n=4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$

给定一个排列：$p_1p_2\cdots p_n$，交换两个数的位置，其它数不动，得到另外一个排列，这个过程称为对换：

$$p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n \to p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$$

For example:

$$\begin{array}{ccc} 12345 & \xrightarrow{1\leftrightarrow 2} & 21345 \\ 12345 & \xrightarrow{1\leftrightarrow 5} & 52341 \end{array}$$

Theorem 1.3

对换改变排列的奇偶性。

Proof.

先考虑相邻的对换：

$$p_1 \cdots p_i p_{i+1} \cdots p_n \to p_1 \cdots p_{i+1} p_i \cdots p_n$$

只需考察 p_i, p_{i+1} 的逆序数的变化情况。

1. $p_i < p_{i+1}$，则 p_i 的逆序数增加 1(左边增加一个比它大的数)，p_{i+1} 逆序数不变；
2. $p_i > p_{i+1}$，则 p_{i+1} 的逆序数减少 1(左边减少一个比它大的数)，p_i 逆序数不变；
3. 其它数的逆序数不变。

所以相邻对换改变奇偶性。 □

Proof.

再考察一般情况：只需说明，一个对换等于奇数个相邻对换。

$$p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n \to p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$$

假设数p_i 与 数p_j 之间有 k 个数:

$$p_1 \cdots p_i q_1 \cdots q_k p_j \cdots p_n \to p_1 \cdots p_j q_1 \cdots q_k p_i \cdots p_n$$

我们要经过一系列的相邻对换完成上述对换: □

Proof.

首先数 p_j 经过 $k+1$ 次相邻对换移动到 p_i 前面:

$$p_1\cdots p_i q_1\cdots q_k p_j\cdots p_n \to p_1\cdots p_j p_i q_1\cdots q_k\cdots p_n$$

然后数 p_i 经过 k次相邻对换到 p_k 后面:

$$p_1\cdots p_j p_i q_1\cdots q_k\cdots p_n \to p_1\cdots p_j q_1\cdots q_k p_i\cdots p_n$$

合计进行了 $2k+1$ 次相邻对换。因此对换前后，两个排列的奇偶性相反。

□

1.1.3 n 阶行列式概念

考察 三阶行列式的计算，有下列性质：

1. 行列式展开有 $3! = 6$ 项之和；
2. 每一项都是不同行不同列的元素相乘；
3. 符号有正有负，各占一半（规律？）
   - 正号：$a_{11}a_{22}a_{33}, a_{12}a_{23}a_{31}, a_{13}a_{21}a_{32}, t(123) = 0, t(231) = 2, t(312) = 2$
   - 负号：$a_{11}a_{23}a_{32}, a_{12}a_{21}a_{33}, a_{13}a_{22}a_{11}, t(132) = 1, t(213) = 1, t(321) = 3$
4. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{t(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

定义 1.4

n^2 个数，按照下列排列计算

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式, 此处 a_{ij} 第一个下标表示所在行，第二个下标表示所在列。 $p_1p_2\cdots p_n$ 跑遍所有 $1,2,...,n$ 的排列。

行列式的计算有下列性质，

1. 行列式展开有 $n!$ 项之和;
2. 每一项都是不同行不同列的元素相乘（恰好 n 个元素相乘）；
3. $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 正负号由 $t(p_1p_2\cdots p_n)$，即列下标排列的逆序数决定。
4. $p_1p_2\cdots p_n$跑遍所有的 n 排列

特别提醒：行列式是一个数。

Example 1

右上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

解.

因为 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \neq 0$ 只有$a_{nn}, a_{(n-1)(n-1)}, \ldots, a_{22}, a_{11}$连续相乘，可能不等于零。

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$
$$= (-1)^{t(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

□

Example 2

左上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$$

解.

因为 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \neq 0$ 只有$a_{n1}, a_{(n-1)2}, \ldots, a_{2(n-1)}, a_{1n}$连续相乘，可能不等于零。

$$\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} =$$

$$(-1)^{t(n \cdots 21)} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$$

□

类似有左下三角形行列式，右下三角形行列式。

以下分析展开式：

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

中，乘积因子的排序问题，即：if

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}\overset{\rightarrow}{\underset{=}{=}}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

注意到行列下标都改变了：do we have:

$$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}$$

当乘积因子改变顺序时，行下标排列与列下标排列同时进行：

$$\begin{array}{rcl} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = & \rightarrow & = a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \\ 12\cdots & \rightarrow & i_1i_2\cdots i_n \\ p_1p_2\cdots p_n & \rightarrow & j_1j_2\cdots j_n \end{array}$$

以上过程等于一系列对换完成的，对换一次改变一次奇偶性，假设进行了 k 次对换：所以有：

$$\begin{array}{rcl} (-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)} & = & (-1)^k(-1)^{t(12\cdots n)} = (-1)^k \\ (-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)} & = & (-1)^k(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} \\ (-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)} & = & (-1)^{2k+t(p_1p_2\cdots p_n)} \\ & = & (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} \end{array}$$

由此得到：

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$
$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

重要公式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots\cdots \quad (6)$$

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

注意上面和式中$i_1, i_2, \dots, i_n$ 是固定的。

如果让 $j_1, j_2, ..., j_n$ 固定，则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots\cdots \quad (6')$$

$$\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n)+t(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

In particular, 如果列下标

$$p_1p_2\cdots p_n \to 12\cdots n,$$

则行坐标

$$12\cdots n \to i_1i_2\cdots i_n.$$

Hence

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$= \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}, \cdots\cdots (7)$$

称为行列式按列展开。

例如，考虑上三角行列式：我们按列展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

只有 $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_n = n$ 时，$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \neq 0$. 所以有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{t(12 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

2. 行列式性质

行列式性质

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 D 的转置行列式。

行列式性质

性质 2.1

行列式等于它的转置行列式：

$$D = D'$$

Proof.

We denote D' by $D' = |b_{ij}|_{n\times n}, b_{ij} = a_{ji}$. Then D' 的第 j 列：$b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$ 等于 D 的第 j 行：$a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$. 或者说，Then D' 的第 i 行$b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in}$，等于 D 的第 i 列：$a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$

$$\begin{aligned} D' = |b_{ij}|_{n\times n} &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_11} a_{p_22} \cdots a_{p_nn} \\ &= D \end{aligned}$$

行列式性质

性质 2.2

交换行列式两行（两列），行列式改变符号。

Proof.

交换行列式 D 的第 i 行和第 j 行，得到的行列式记为：

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$\square$

行列式性质

Proof.

1. 第 i 行：$b_{i1}=a_{j1}, b_{i2}=a_{j2}, \dots, b_{in}=a_{jn}$
2. 第 j 行：$b_{j1}=a_{i1}, b_{j2}=a_{i2}, \dots, b_{jn}=a_{in}$
3. 其它各行与 D 相同。

Then

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

$\square$

行列式性质

Proof.

Note that

$$(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} = -(-1)^{t(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}$$

Hence we have

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} -(-1)^{t(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\ &= -D \end{aligned}$$

□

行列式性质

由上面性质 2.2 直接得到结论：

推论 2.3

设行列式有两行（两列）相同，则行列式为零

性质 2.4

行列式某行（列）乘一个数，等于这个数乘这个行列式，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式性质

推论 2.5

若行列式某两行元素（两列）对应成比例，则行列式为零

Proof.

由性质 2.3 和 2.4 直接得到结论。 □

按照定义直接展开，可以看出下述结论：

性质 2.6

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即：行列式某行是两项和，则可以是两个行列式的和。

根据前面的几条性质，得到下面结论

性质 2.7

行列式的某行（第 j 行）乘一个数k，加到另外一行（第 i 行），行列式不变。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以上性质对列也成立。

Example 3

Prove:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Proof.

Consider $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4} \neq 0$. Then

1. $a_{1p_1} = a_{11}, a_{2p_2} = a_{22}, a_{3p_3} = a_{33}, a_{4p_4} = a_{44}$
2. $a_{1p_1} = a_{11}, a_{2p_2} = a_{22}, a_{3p_3} = a_{34}, a_{4p_4} = a_{43}$
3. $a_{1p_1} = a_{12}, a_{2p_2} = a_{21}, a_{3p_3} = a_{33}, a_{4p_4} = a_{44}$
4. $a_{1p_1} = a_{12}, a_{2p_2} = a_{21}, a_{3p_3} = a_{34}, a_{4p_4} = a_{43}$

$\square$

Proof.

$$D=(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$
$$+(-1)^{t(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+(-1)^{t(2143)}a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$$
$$=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(a_{33}a_{44}-a_{34}a_{43})$$

□

Example 4

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解.

第一行，只有 a_{11}, a_{1n} 不是0.

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{t(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} + (-1)^{t(n23\cdots 1)}a_{1n}a_{22}\cdots a_{(n-1)(n-1)}a_{n1} \\ &= a^n + (-1)^{n-2+n-1}a^{n-2} = a^n - a^{n-2} \end{aligned}$$

□

引入下列记号：

1. 交换行列式的 i,j 行（列），记为 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$
2. 行列式第 i 行（列）乘数 k，记为：$kr_i(kc_i)$
3. 行列式第 i 行（列）提取公因子 k，记为：$r_i \div k(c_i \div k)$
4. 数k乘行列式第 i 行（列），加到第 j 行（列），记为 $r_j + kr_i(c_j + kc_i)$

Example 5

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Proof.

$$D_n \overset{r_i - r_n, i=1,2,..,n-1}{=} \begin{vmatrix} x-a & 0 & \cdots & a-x \\ 0 & x-a & \cdots & a-x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

列变换: $c_n + c_i, i = 1, 2, ..., n-1$,

$$
\begin{aligned}
&= (x-a)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x+a(n-1) \end{vmatrix} \\
&= (x-a)^{n-1}(x+a(n-1))
\end{aligned}
$$

解法2.

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3,\ldots,n]{r_1 + r_i}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x+(n-$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,\ldots,n]{r_i - ar_1} (x+(n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \\ 0 & x-a & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

3. 行列式展开定理

本节介绍如何把高阶行列式的计算，转化为低价行列式的计算。

三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

给定行列式 $D = |a_{ij}|_n$

1. 把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去，得到一个 $n-1$ 阶行列式 M_{ij}，称为 a_{ij} 的余子式。
2. 称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

引理 3.1

如果行列式D 某行只有一个元素不为零，例如 第 i 行，第 j 列元素 $a_{ij} \neq 0$，i行其它元素 $a_{ik} = 0, k = 1, ..., j-1, j+1, ..., n$. *Then*

$$D = a_{ij} A_{ij}$$

Proof.

先假设简单情况：

1. $a_{ij} = a_{nn}$， 即：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

□

Proof.

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \\
&= \sum_{p_1p_2\cdots p_{n-1}n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_{n-1}n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n(n-1)}a_{nn} \\
&= a_{nn} \sum_{p_1p_2\cdots p_{n-1}} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_{n-1})} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_{n-1}} \\
&= a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} \\
&= a_{nn}M_{nn} = a_{nn}(-1)^{n+n}M_{nn} = a_{nn}A_{nn}
\end{aligned}
$$

□

2. $a_{ij} \neq a_{nn}$

Proof.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)j} & & a_{(i-1)n} \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ a_{(i+1)1} & & a_{(i+1)j} & & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

□

Proof.

$$\xlongequal[]{r_k\leftrightarrow r_{k+1},k=i,i+1,\dots,n-1} (-1)^{n-i}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)j} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)j} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

□

即第 i 行依次与第 $i+1, i+2, \dots, n$ 行交换，共进行了$n-i$次行变换。

再经过列交换：第 j 列依次与第 $j+1, j+2, \ldots, n$ 列交换，共进行了$n-j$次列变换，D等于下式：

Proof.

$$
(-1)^{n-j+n-i}\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{(i-1)1} & & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} & a_{(i-1)j} \\
a_{(i+1)1} & & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} & a_{(i+1)j} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij}
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}
$$

$\square$

上述引理可以直接证明：注意到 $a_{ip_i}=a_{ij}\neq 0, a_{ip_i}=0, p_i\neq j$：

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_n}(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}\\
&= \sum_{p_1\cdots j\cdots p_n}(-1)^{t(p_1\cdots j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ij}\cdots a_{np_n}\\
&= \sum_{p_1\cdots j\cdots p_n}(-1)^{t(i12\cdots i-1,i+1,\cdots n)}(-1)^{t(jp_1\cdots p_{i-1},p_{i+1}\cdots p_n)}\\
&\qquad a_{ij}a_{1p_1}\cdots a_{i-1,p_{i-1}}a_{i+1,p_{i+1}}\cdots a_{np_n}\\
&= \sum_{p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_n\in\{1,\dots,j-1,j+1,\dots,n\}}(-1)^{t(12\cdots i-1,i+1,\cdots n)+i-1}\\
&\qquad (-1)^{t(p_1\cdots p_{i-1},p_{i+1}\cdots p_n)+j-1}a_{ij}a_{1p_1}\cdots a_{i-1,p_{i-1}}a_{i+1,p_{i+1}}\cdots a_{np_n}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_n \in\{1,\dots,j-1,j+1,\dots,n\}} (-1)^{i-1}(-1)^{t(p_1\cdots p_{i-1},p_{i+1}\cdots p_n)+j-1} a_{ij}a_{1p_1}\cdots a_{i-1,p_{i-1}}a_{i+1,p_{i+1}}\cdots a_{np_n}$$

$$= a_{ij}(-1)^{i+j} \sum_{p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_n \in\{1,\dots,j-1,j+1,\dots,n\}} (-1)^{t(p_1\cdots p_{i-1},p_{i+1}\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{i-1,p_{i-1}}a_{i+1,p_{i+1}}\cdots a_{np_n}$$

$$= a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}$$

行列式按行（列）展开法则：

Theorem 3.2

（书中定理 *1.2,P13*）

行列式等于它任一行（列）元素与其代数余子式的乘积之和，即：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

Proof.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

□

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \quad \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据前面引理，得到结论：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in}$$

思考题：对于本定理，考虑另外一种证明方法：对展开式：$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$ 分类，根据第 i 行的列下标p_i分类：

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{i1}\cdots a_{np_n}, a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{i2}\cdots a_{np_n},$$
$$..., a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{in}\cdots a_{np_n}$$

即：根据 $p_i = 1, 2, ..., n$ 进行分类，有n 个不同的分类：

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{p_1\cdots p_n}(-1)^{t(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}\\
&= \sum_{p_1\cdots p_{i-1}1p_{i+1}\cdots p_n}(-1)^{t(p_1\cdots p_{i-1}1p_{i+1}\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{i1}\cdots a_{np_n}\\
&+ \sum_{p_1\cdots p_{i-1}2p_{i+1}\cdots p_n}(-1)^{t(p_1\cdots p_{i-1}2p_{i+1}\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{i2}\cdots a_{np_n}\\
&\cdots\ \cdots\\
&+ \sum_{p_1\cdots p_{i-1}np_{i+1}\cdots p_n}(-1)^{t(p_1\cdots p_{i-1}np_{i+1}\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{in}\cdots a_{np_n}
\end{aligned}
$$

Note that:

$$p_1\cdots p_{i-1}jp_{i+1}\cdots p_n \Rightarrow$$

$$p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_n \in \{1,2,...,n\}-\{j\}, j=1,2,...,n$$

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{t(p_1\cdots p_{i-1}jp_{i+1}\cdots p_n)} \\
&a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{i-1,p_{i-1}}a_{ij}a_{i+1,p_{i+1}}\cdots a_{np_n} \\
&= (-1)^{t(i1\cdots i-1,i+1,\cdots n)+t(jp_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_n)} \\
&a_{ij}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{i-1,p_{i-1}}a_{i+1,p_{i+1}}\cdots a_{np_n} \\
&= (-1)^{i-1+t(p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_n)+j-1} \\
&a_{ij}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{i-1,p_{i-1}}a_{i+1,p_{i+1}}\cdots a_{np_n} \\
&= (-1)^{i+j}(-1)^{t(p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_n)} \\
&a_{ij}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{i-1,p_{i-1}}a_{i+1,p_{i+1}}\cdots a_{np_n}
\end{aligned}
$$

从而对前面 n 个分类和，其中第 $j, j = 1, 2, ..., n$ 项：

$$\sum_{p_1 \cdots p_{i-1} j p_{i+1} \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 \cdots p_{i-1} j p_{i+1} \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{ij} \cdots a_{np_n}$$

$$= a_{ij}(-1)^{i+j} \sum_{p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{i-1,p_{i-1}} a_{i+1,p_{i+1}} \cdots a_{np_n}$$

$$= a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}$$

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Example 6

$$D=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

行列式按第一列展开，得到下式：

$$
\begin{aligned}
D &= x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix} \\
&= x^n + (-1)^{n+1}y^n
\end{aligned}
$$

Example 7

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & c & d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & c & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & d & 0 \\ c & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d \end{vmatrix}$$

按第一行展开，有：

$$
\begin{aligned}
D_{2n} &= a\begin{vmatrix}
a & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & c & d & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
c & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & d & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d
\end{vmatrix} \\
&+ b(-1)^{1+2n}\begin{vmatrix}
0 & a & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & c & d & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & c & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & d \\
c & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} D_{2n} &= adD_{2(n-1)} + bc(-1)^{1+2n}(-1)^{2n-1+1}D_{2(n-1)} \\ &= (ad-bc)D_{2(n-1)} \\ &= (ad-bc)^{n-1}D_2 \\ &= (ad-bc)^n \end{aligned}$$

Example 8

（Vandermonde） 范德蒙行列式

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j), n \geq 2$$

By induction, we have

$$D(x_1, x_2) = x_2 - x_1, D(x_1, ..., x_{n-1}) = \prod_{1 \le j < i \le n-1} (x_i - x_j), n \ge 2$$

对于 $D(x_1, ..., x_n)$, 施行下列行变换,

1. 第 n 行减第 $n-1$ 行的 x_1 倍: $r_n - x_1 r_{n-1}$.
2. 第 $n-1$ 行减第 $n-2$ 行的 x_1 倍: $r_{n-1} - x_1 r_{n-2}$.
3. $\cdots$
4. 第 2 行减第 1 行的 x_1 倍: $r_2 - x_1 r_1$.

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)D(x_2, \dots, x_n) \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{2\le j<i\le n}(x_i - x_j) \\
&= \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)
\end{aligned}
$$

研究题：考虑广义（Vandermonde）范德蒙行列式的计算问题。

Theorem 3.3

（书中定理1.3,P16）
行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 的某行（列）元素与另外一行（列）对应元素的代数余子式相乘，乘积之和为零，即：

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn} &= 0, i\neq j \\ a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj} &= 0, i\neq j \end{aligned}$$

我们对列证明，对行的证明类似。

Proof.

构造一个行列式 D_1，第 j 列就是 D 的第 i 列，其它各列与 D 相同：

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$b_{1j} = a_{1i}, b_{2j} = a_{2i}, \ldots, b_{nj} = a_{ni}$. Note that: D_1 的第 j 列的代数余子式与 D 的第 j 列完全一样，然后 D_1 按第 j 列展开：

$$\begin{aligned} a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots a_{ni}A_{nj} &= \\ b_{1j}A_{1j} + b_{2j}A_{2j} + \cdots b_{nj}A_{nj} &= D_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

以上两个定理（书中定理 1.2和定理1.3）统一叙述为：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \left\{ \begin{array}{c} D, i = j \\ 0, i \neq j \end{array} \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \left\{ \begin{array}{c} D, i = j \\ 0, i \neq j \end{array} \right\}$$

4. Cramer法则

Cramer法则

Cramer法则可以解决解决一类特殊方程组的解： n 个未知量和 n 个方程组:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots &= \cdots\cdots\cdots\cdots(8) \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Cramer法则

系数行列式记为：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分别用常数项：$b_1, b_2, ..., b_n$ 代替 D 的第 1 列，第 2 列，...，第 n 列，得到 n 个行列式：

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & \mathbf{b}_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & \mathbf{b}_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & \mathbf{b}_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, j = 1, 2, ..., n$$

（书中定理 1.4,P17）

Theorem 4.1

对于 n 个 n 元方程组（8），如果系数行列式 $D \neq 0$，则方程组有解，解唯一，表达式为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, ..., x_n = \frac{D_n}{D}, \cdots\cdots (9)$$

构造一个 $n+1$ 阶行列式 E

$$E = \begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n+1 \end{matrix}$$

注意：这个行列式的特点：第 1 行与第 $i+1$ 行完全相同，因此 $E=0$。

接下来，我们考虑 E 的第一行的元素：$b_i, a_{i1}, \ldots, a_{in}$ 在行列式 E 中的代数余子式。

第一个 b_i 的代数余子式为：D.第二个a_{i1} 的代数余子式为：$-D_1$.

$$(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -D_1$$

第三个a_{i2}的代数余子式为

$$(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & & a_{nn} \end{vmatrix} = -D_2$$

一般 第一行第$j+1$ 列的元素 a_{ij} 的代数余子式为：

$$(-1)^{1+j+1}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{j+j-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$-D_j, j = 1, 2, ..., n$$

对行列式 E 按第一行展开:

$$
\begin{aligned}
0 &= E \\
&= b_i D - a_{i1}D_1 - a_{i2}D_2 - \cdots - a_{in}D_n \\
&\Rightarrow a_{i1}D_1 + a_{i2}D_2 + \cdots + a_{in}D_n = b_i D \\
&\Rightarrow a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{in}\frac{D_n}{D} = b_i, i = 1, 2..., n.
\end{aligned}
$$

由此可知 公式 (9) 确实是方程组 (8) 的解。

其次证明解的唯一性，假设方程组 (8) 有解：$c_1, c_2, ..., c_n$，满足：

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_k = b_i, i = 1, 2, ..., n.$$

用 A_{i1} 乘上面的式子：得到

$$A_{i1}a_{i1}c_1 + A_{i1}a_{i2}c_2 + \cdots + A_{i1}a_{in}c_n = A_{i1}b_i$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} A_{i1}a_{ik}c_k = A_{i1}b_i, i = 1, 2, ..., n.$$

将以上 n 个等式相加，即对 $i=1,2,...,n$ 相加：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{i1}a_{ik}c_k=\sum_{i=1}^{n}A_{i1}b_i$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{i1}a_{ik}c_k=\sum_{i=1}^{n}A_{i1}b_i$$

$$\sum_{k=1}^{n}c_k\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{i1}=\sum_{i=1}^{n}b_iA_{i1}$$

注意到:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} = D$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{i1} = 0, k \neq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i}A_{i1} = D_1$$

由此可得:

$$c_1 D = D_1$$

$$c_1 = \frac{D_1}{D}$$

同理继续上述过程，用 $A_{i2}, A_{i3}, ..., A_{in}$ 乘下面的式子

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_k = b_i, i = 1, 2, ..., n.$$

同理可证：

$$c_2 = \frac{D_2}{D}, c_3 = \frac{D_3}{D}, \cdots, c_n = \frac{D_n}{D}$$

所以公式 (9) 给出了方程组 (8) 的唯一解（$D \neq 0.$）

Example 9

Cramer法则解方程:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= -1 \\ -3x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 196, D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -54$$

$$x_1 = \frac{-54}{196}, x_2 = \frac{D_2}{196}, x_3 = \frac{D_3}{196}$$

Example 10

一个非零一元多项式 $f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$，次数为 $n-1$，则其最多有 $n-1$ 个不同的根。

反证法，如果 $f(x)$ 有 n 个不同的根：$b_1, b_2, ..., b_n$, $f(b_i)=0, i=1,2,...,n$, then

$$\begin{aligned}
a_{n-1}b_1^{n-1}+a_{n-2}b_1^{n-2}+\cdots+a_1b_1+a_0&=0\\
a_{n-1}b_2^{n-1}+a_{n-2}b_2^{n-2}+\cdots+a_1b_2+a_0&=0\\
&\cdots\cdots\\
a_{n-1}b_n^{n-1}+a_{n-2}b_n^{n-2}+\cdots+a_1b_n+a_0&=0
\end{aligned}$$

将上面式子，重新表达为：

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_{n-2} b_1^{n-2} + a_{n-1} b_1^{n-1} &= 0 \\
a_0 + a_1 b_2 + \cdots + a_{n-2} b_2^{n-2} + a_{n-1} b_2^{n-1} &= 0 \\
\cdots\cdots \\
a_0 + a_1 b_n + \cdots + a_{n-2} b_n^{n-2} + a_{n-1} b_n^{n-1} &= 0
\end{aligned}
$$

如果记系数行列式为：

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & \cdots & b_1^{n-1} \\ 1 & b_2 & \cdots & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b_n & \cdots & b_n^{n-1} \end{vmatrix}
$$

因为 D 是范德蒙行列式，$D \neq 0$, 同时注意到：

$$D_1 = D_2 = \cdots = D_n = 0$$

根据克莱姆法则，方程组有唯一解：

$$a_0 = \frac{D_1}{D} = 0, a_1 = \frac{D_2}{D} = 0, \ldots, a_{n-1} = \frac{D_n}{D} = 0.$$

Hence $f(x) = 0$, 矛盾。因此，$f(x)$ 最多有 $n-1$ 个不同的根。

Example 11

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3x & 1 \end{vmatrix}$$

求 x^3 的系数。

分析，第三列必须取 $x = a_{33}$ 或者 $a_{43} = 3x$,这样第一列必须取 $a_{11} = x$,第二列必须取 $a_{22} = x$,

1. $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = x^3$,符号：$(-1)^{t(1234)} = 1$
2. $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = 9x^3$,符号：$(-1)^{t(1243)} = -1$
3. $-9x^3 + x^3 = -8x^3$

谢 谢！