线性代数
零化多项式的证明

曾吉文
哈尔滨工业大学数学科学学院

2022年 9 月

主要内容：对于一个 n 阶矩阵 A, 证明有一个零化多项式 $f(x)$, 满足 $f(A)=0$，且这个零化多项式就是矩阵 A 的特征多项式。

1 矩阵多项式

给定一个数域 F ，对于方阵 $A\in F^n$和 F 上多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

令：

$$f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E$$

称为矩阵 A 的多项式，记为 $f(A)$

若 $f(A)=0$, 即零矩阵，就称多项式 $f(x)$ 是矩阵 A 的零化多项式。

问题：给定方矩阵 A ，是否存在 A 的零化多项式 $f(x)$?

Example 1

设

$$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix}, f(x)=x^2-1$$

$$f(A)=A^2-E=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix}^2-E=$$
$$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix}-E=E-E=0$$

对于一般的方阵 A，我们也要证明有零化多项式 $f(x)$。

2 特征多项式 $f(x)$

先叙述定理

Theorem 2.1

对于n 阶矩阵 $f(x)$，存在一个 n 次多项式 $f(x)$，满足 $f(A) = 0$

接下来，我们需要一些准备工作，来证明上述定理。

定义 2.2

对于 n 阶方阵 A，令 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$，称为矩阵 A 的特征多项式。

$$\begin{aligned}
f(\lambda) =& |\lambda E-A| \\
=& \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix} \\
=& \lambda^n-\sum_{k=1}^{n} a_{kk}\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|
\end{aligned}$$

3. 多项式矩阵

设有多项式：$f_{ij}(\lambda)$, 令

$$\begin{pmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) & \cdots & f_{1n}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) & \cdots & f_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(\lambda) & f_{n2}(\lambda) & \cdots & f_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

称为多项式矩阵。根据矩阵的加法数乘规则，可以写成系数为矩阵的多项式：

$$\lambda^n A_n + \lambda^{n-1} A_{n-1} + \cdots + \lambda A_1 + A_0$$

例如：

$$\begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^3+2\lambda^2+1 & \lambda^3+2\lambda+1 \\ \lambda^3++2\lambda+1 & \lambda^3+\lambda^2+2\lambda+1 & +\lambda^2+2\lambda+1 \\ \lambda^3+2\lambda+1 & \lambda^3+2\lambda+1 & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^3 & \lambda^3 & \lambda^3 \\ \lambda^3 & \lambda^3 & 0 \\ \lambda^3 & \lambda^3 & \lambda^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
= \lambda^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
+\lambda \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

4.零化多项式的证明

对于 n 阶矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$,可以定义它的伴随矩阵：

$$\begin{aligned}(\lambda E-A)^* &= \begin{pmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{21}(\lambda) & \cdots & A_{n1}(\lambda) \\ A_{12}(\lambda) & A_{22}(\lambda) & \cdots & A_{n2}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}(\lambda) & A_{2n}(\lambda) & \cdots & A_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= B_{n-1}\lambda^{n-1}+B_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+B_1\lambda+B_0\end{aligned}$$

称为矩阵 $\lambda E-A$ 的伴随矩阵。

根据伴随矩阵的性质，对一般多项式矩阵，有：

$$
\begin{aligned}
(\lambda E - A)(\lambda E - A)^* &= |\lambda E - A|E \\
= \lambda^n E - \sum_{k=1}^{n} a_{kk}\lambda^{n-1}E &+ \cdots + (-1)^n|A|E \\
= \lambda^n E + a_{n-1}\lambda^{n-1}E &+ \cdots + a_1\lambda E + a_0 E
\end{aligned}
$$

注意此处假定：

$$
|\lambda E - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = f(\lambda)
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
&(\lambda E - A)(\lambda E - A)^* \\
&= (\lambda E - A)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B_1\lambda + B_0) \\
&= B_{n-1}\lambda^n + (B_{n-2} - AB_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (B_0 - AB_1)\lambda - AB_0
\end{aligned}
$$

由上可得：

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= E \cdots (1) \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= a_{n-1}E \cdots (2) \\ B_{n-3} - AB_{n-2} &= a_{n-2}E \cdots (3) \\ \cdots &= \cdots\cdots \\ B_0 - AB_1 &= a_1 E \cdots (n) \\ -AB_0 &= a_0 E \cdots (n+1) \end{aligned}$$

上面第一个式子乘矩阵A，得到：$AB_{n-1} = AE = A$，加到上面第二个式子，得到：

$$B_{n-2} = a_{n-1}E + A$$

再用矩阵 A 乘上面式子，得到 $AB_{n-2} = a_{n-1}A + A^2$

加到上面第（3）式，得到：

$$B_{n-3} = a_{n-2}E + a_{n-1}A + A^2$$

继续上述过程，得到

$$B_0 = a_1E + a_2A + \cdots + a_{n-1}A^{n-2} + A^{n-1}$$

上式乘矩阵 A，加到第 $(n+1)$ 个式子，得到

$$0 = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n$$

所以得到了，矩阵 A 的零化多项式：$f(\lambda)=|\lambda E-A|$

$$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_{n-1}A^{n-1}+A^n=0$$

Theorem 4.1

对于矩阵 A, 设其特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$，则有：

$$f(A)=0$$

谢 谢！