线性代数
第四章 n 维向量

曾吉文

November 21, 2022

本章介绍：

- 向量的线性相关和线性无关；
- 向量组的秩；
- 向量空间；
- 欧氏空间。

1. n 维向量概念和线性运算
   - n 维向量的概念
   - n 维向量的线性运算
2. 向量组的线性相关和线性无关
   - 线性相关性质的等价刻划
   - 线性相关的进一步判定
3. 向量组的秩
   - 向量组的秩
   - 矩阵的秩与向量组的秩

4.1 n 维向量概念和线性运算

4.1.1 n 维向量的概念

1. 先考察一下几何空间的例子：

- 几何向量的表达方式：二维空间，或者平面上，选定标准基底：$\mathbf{i},\mathbf{j}$,则任何平面向量 α 可以对应二元数组：

$$\alpha = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \leftrightarrow (x, y).$$

空间中，选定标准基底：$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$, 则任何向量 α 对应 三元有序数组；

$$\alpha = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \leftrightarrow (a_x, a_y, a_z)$$

- 必须注意，平面上，固定两个不平行的向量：α,β, 则平面上任意一个向量 γ,也可以表示为：

$$\gamma = x\alpha + y\beta \leftrightarrow (x, y)$$

空间中，固定三个不共面的向量：α,β,γ,则任何一个空间向量 δ,也可以表达：

$$\delta = x\alpha + y\beta + z\gamma \leftrightarrow (x, y, z)$$

- 一般约定：三元数组：(x_1, x_2, x_3) 就是指标准基底 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$下的坐标。
- 我们将二元数组，三元数组的概念，推广到更多，即几何向量的分量推广到三个以上，n 个有序数组 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，就有 n 元向量的概念。

2. n 维向量的定义

定义 1.1

（书中定义 4.1，P109） 数域 $\mathbf{F}$ 里的 n 元有序数组: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 表达为：

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

称为 n 维向量，或 n 元向量。

第三章的几何向量，就是 3 维空间向量。n 元标准单位向量：

$$\varepsilon_1 = (1, 0, ..., 0)$$
$$\varepsilon_2 = (0, 1, ..., 0)$$
$$\cdots$$
$$\varepsilon_n = (0, 0, ..., 1)$$

3. 向量的表达方式:

- 行向量:

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

- 列向量:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- 数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 分别称向量 α 的第1, 第2, ..., 第 n 个分量。
- 根据数域 F 是实数 $\mathbf{R}$, 复数 $\mathbf{C}$, 称为实向量, 复向量。n 维实向量的全体记为 $\mathbf{R}^n$, n 维复向量的全体记为 $\mathbf{C}^n$.

设有向量 $\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$

- 两个 n 维向量相等$\alpha=\beta$，当且仅当对应分量相等：$a_1=b_1,a_2=b_2,\ldots,a_n=b_n$.
- 零向量：$0=(0,0,...,0)$
- 负向量: $-\alpha=(-a_1,-a_2,\ldots,-a_n)$.

Example 1

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij}\in \mathbf{F}$$

则矩阵 A 可以分块为列向量组成，或者行向量组成：

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, \alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \beta_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

4.1.2 n 维向量的线性运算

n 维向量的线性运算有两种：加法和数乘

1. 向量的加法

定义 1.2

设有向量 $\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$,规定加法为：

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$$

注意：必须是相同维数的向量做加法。

向量的减法为：

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

2. 向量的数乘

定义 1.3

设有数域 $\mathbf{F}$ 中向量 $\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$,规定数乘为：

$$k\alpha=(ka_1,ka_2,\ldots,ka_n),k\in\mathbf{F}$$

注意：向量的加法和数乘运算，称为线性运算，满足

3. 线性运算的性质

1. 交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$.
2. 结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$。
3. $0+\alpha=\alpha$。
4. $-\alpha+\alpha=0$.
5. $1\alpha=\alpha, -1\alpha=-\alpha, 0\alpha=0$.
6. $k(l\alpha)=(kl)\alpha$
7. $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$
8. $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

4.2 向量组的线性相关和线性无关

4.2.1 线性相关和线性无关的定义

1. 向量的线性表示

定义 2.1

(书中定义 4.4，P110) 对于 n 维向量 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$，若存在 m 个数：$k_1, k_2, ..., k_m$,满足：

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

称 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 的线性组合，或称 β 由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性表示。

Example 2

任何几何向量可以由 $\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0), \varepsilon_3 = (0,0,1)$线性表示：

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3) = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3$$

Example 3

线性方程组：

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots+ & a_{1m}x_m = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots+ & a_{2m}x_m = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & a_{n2}x_2+ & \cdots+ & a_{nm}x_m = & b_n \end{array}$$

我们可以用向量的线性组合表示：

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

设系数矩阵 A 的列向量和线性方程组的常数向量分别为：

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, m, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$$

我们寻找线性方程组的解，就是寻找数：$k_1, k_2, \dots, k_m$，使得 β 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合：

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

Example 4

给定向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

问任何向量$\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$是否可以被他们线性表示?

我们可以设:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$$

等价于解方程: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

根据克莱姆法则，这个方程不仅有解，而且解是唯一的。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & a-c \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 1 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a-b \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 1 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & 1 & a-b \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & 1 & a-b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b-c \\ a-b \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b-c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

几何意义：空间中，三个点：$M_1(1,1,1), M_2(1,1,0), M_3(1,0,0)$ 对应三个向量：

$$\overrightarrow{OM_1} = (1,1,1) = \alpha_1, \overrightarrow{OM_2} = (1,1,0) = \alpha_2, \overrightarrow{OM_3} = (1,0,0) = \alpha_3$$

这三个向量是不共面的，可以作为三维向量空间的新基底。任意一个标准基底下的向量 $\beta = (a,b,c) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ 在这个新基底下的坐标是：$c\alpha_1 + (b-c)\alpha_2 + (a-b)\alpha_3$. 特别：

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} = (1,0,0) = 0\alpha_1 + (0-0)\alpha_2 + (1-0)\alpha_3 = \alpha_3 \\
\mathbf{j} = (0,1,0) = 0\alpha_1 + (1-0)\alpha_2 + (0-1)\alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_3 \\
\mathbf{k} = (0,0,1) = 1\alpha_1 + (0-1)\alpha_2 + (0-0)\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2
\end{aligned}$$

Example 5

设 $n \times m$ 矩阵 A 和 $m \times p$ 矩阵，考虑矩阵乘积: 矩阵 AB 的列向量是 A 的列向量的线性组合，或者由A 的列向量线性表示。组合系数来自于矩阵 B 的列。

$$AB = C = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \end{pmatrix}$$

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, ..., p$$

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, ..., m$$

$$AB = \left(\begin{array}{cccc} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_{j1} & \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_{jp} \end{array} \right)$$

$$\gamma_1 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_{j1}, \gamma_2 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_{j2}, ..., \gamma_p = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_{jp}$$

所以， 矩阵 AB 的列向量是 A 的列向量的线性组合，或者由A的列向量线性表示。组合系数来自于矩阵 B 的列。

上述规律，可以为我们的计算带来很大便利：例如 矩阵 B 的第一列为零，则矩阵 AB 的第一列一定为零。

Example 6

我们考虑矩阵乘积 $AB=C$ 的行:

$$AB=C=\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \vdots\\ \delta_n\end{pmatrix},\delta_i=\begin{pmatrix}c_{i1}&c_{i2}&\cdots&c_{ip}\end{pmatrix},i=1,2,...,n$$

$$B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix},\beta_i=\begin{pmatrix}b_{i1}&b_{i2}&\cdots&b_{ip}\end{pmatrix},i=1,2,...,m$$

$$AB=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^m a_{1j}\beta_j\\ \sum_{j=1}^m a_{2j}\beta_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^m a_{nj}\beta_j\end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\beta_j = \delta_1, \sum_{j=1}^{m} a_{2j}\beta_j = \delta_2$$

$$\cdots, \sum_{j=1}^{m} a_{nj}\beta_j = \delta_n$$

所以， 矩阵 AB 的行向量是 B 的行向量的线性组合，或者由B 的行向量线性表示。组合系数来自于矩阵 A 的行。

上述规律，可以为我们的计算带来很大便利：例如 矩阵 A 的第一行为零，则矩阵 AB 的第一行一定为零。

更一般，对 n 维列向量，有下列线性表达式：

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上这些向量称为标准基底。

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$$

任何 n 维列向量 α 可以由 $e_1, e_2, ..., e_n$ 线性表示。

更一般，对 n 维行向量，有下列线性表达式：

$$
\begin{aligned}
e_1' &= (1,0,\cdots,0)\\
e_2' &= (0,1,\cdots,0)\\
&\vdots\\
e_n' &= (0,0,\cdots,1)
\end{aligned}
$$

以上这些向量称为标准基底。

$$
\begin{aligned}
\alpha &= (a_1,a_2,\cdots,a_n)\\
&= a_1e_1' + a_2e_2' + \cdots + a_ne_n'
\end{aligned}
$$

任何 n 维行向量 α 可以由 $e_1', e_2', ..., e_n'$ 线性表示。

- 一般情况下，一个 n 元数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 就默认为标准基底
$$e_1', e_2', ..., e_n'$$
下的坐标线性表示。
- 零向量可以被任何一组向量线性表示：
$$0 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_m$$
- 两个几何 α, β 向量平行,当且仅当其中一个被另一个线性表示：$\beta = k\alpha$.
- 三个几何 α, β, γ 向量共面，当且仅当其中一个可以被其它两个线性表示。

2 向量的线性相关与线性无关

定义 2.2

（书中定义4.5，P111） 给定一组相同维数的向量：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，如果存在不全为零的数：$k_1, k_2, ..., k_m$，使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

就称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关。否则，就称这个向量组线性无关。

注意，上述等式右边的 0 代表零向量，维数与 $\alpha_i, i = 1, 2, ...m$ 相同。

Example 7

判断向量组

$$\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (1, 0, 0)$$

是否线性相关.

设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$$

$$(k_1,k_1,k_1)+(k_2,k_2,0)+(k_3,0,0)=0$$
$$(k_1+k_2+k_3,k_1+k_2,k_1)=0$$
$$k_1+k_2+k_3=0$$
$$k_1+k_2=0$$
$$k_1=0$$
$$k_3=k_2=k_1=0$$

因此，向量组

$$\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,0,0)$$

线性无关。

3. 线性相关与线性方程组

一组向量是否线性相关，与方程组的关系：假设 m 个 n 维向量$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$写成列变量形式：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

是否存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, ..., k_m$, 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

$$\Leftrightarrow k_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + k_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = 0$$

上述等式，等价于:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0, AK = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}$$

即线性方程：$AX = 0$ 是否有非零解：$k_1, k_2, ..., k_m$. 如果有非零解，则向量组：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性相关，否则线性无关。

结论：对于 m 个 n 维列向量 $\alpha_j, j = 1, 2, ..., m$，令矩阵 A 由这 m 个列向量组成：

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix}$$

则 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性相关，当且仅当 线性方程：$AX = 0$ 有非零解向量：

$$X_0 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} \neq 0, AX_0 = 0$$

Example 8

矩阵 A 为 $n\times m$ 矩阵，则 $R(A)<m$ 当且仅当存在m 维非零向量$X_0, AX_0=0$.

Proof.

充分性：已知有 $X_0\neq 0, AX_0=0$, 则有：$R(X_0)=1$

$$R(A)+R(X_0)\leq m \Rightarrow R(A)\leq m-R(X_0)=m-1$$

必要性：即已知 $R(A)<m$， 则有可逆矩阵 P,Q

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r=R(A)<m$$

$$PA\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

上面式子说明矩阵 PAQ 最后一列为零，所以有：

$$PAQ = \begin{pmatrix} PAQ_{11} & PAQ_{12} & \cdots & PAQ_{1m} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$PAQ_{1m} = 0 \Rightarrow AQ_{1m} = 0,$$

注意到矩阵 Q 可逆，所以 $Q_{1m} \neq 0$. 证毕。

前面已经说明：矩阵 $A_{n\times m}$ 的列向量组线性相关，当且仅当线性方程 $AX = 0$ 有非零解，所以我们又可以说：

- $A_{n\times m}$ 的列向量组线性相关。当且仅当 $R(A) < m$.

根据方程 $AX = 0$ 是否有非零解，判断矩阵 A 的列向量是否线性相关，还可以得到下列事实：

- 3 个 2 维向量一定线性相关；
- 4 个 3 维向量一定线性相关：
- $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关。

- 两个（几何）向量 α_1, α_2 平行，当且仅当存在不全为零的数：k_1, k_2，满足：$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$.
- 三个（几何）向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共面，当且仅当存在不全为零的数：k_1, k_2, k_3，满足：$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$.
- 一个向量组含有一个子向量组线性相关，则这个向量组本身也线性相关。即：

$$\begin{aligned} \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_l}\} \subseteq \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\} \\ \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_l}, l \le m, \text{线性相关} \\ \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \text{线性相关} \end{aligned}$$

- 与上一个性质等价性质：一个向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 是线性无关的，则其任意子向量组也是线性无关的。
- 一个向量组含有零向量，则这个向量组线性相关。

- 一个向量组线性无关，等价于：

$$\begin{aligned} & k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0 \\ \Leftrightarrow & \; k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0. \end{aligned}$$

- 两个（几何）向量 α, β 不平行，当且仅当它们线性无关。
- 三个（几何）向量 α, β 不共面，当且仅当它们线性无关。
- 前面定义的 n 个 n 维标准向量组：$e_1, e_2, \cdots, e_n$线性无关。

下面这个例子，说明如何判断一组向量是线性相关还是线性无关。

Example 9

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关组，证明向量组：

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3$$

是线性无关组。

解.

设有数 k_1, k_2, k_3 使得：

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$$

□

将已知条件带入:

$$
\begin{aligned}
k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3\alpha_3&=0\\
k_1\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_1+k_2+k_3)\alpha_3&=0\\
\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\text{线性无关}\\
\Rightarrow k_1=0,k_1+k_2=0,k_1+k_2+k_3&=0\\
\Rightarrow k_1=k_2=k_3&=0\\
\beta_1,\beta_2,\beta_3,\text{线性无关}
\end{aligned}
$$

Example 10

（书中习题3）设 A 是可逆矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$，是 m 个n 维列向量。证明：

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$$

线性无关，当且仅当

$$A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_m$$

线性无关.

Proof.

Let $B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix}$. then

$$AB = \begin{pmatrix} A\alpha_1 & A\alpha_2 & \cdots & A\alpha_m \end{pmatrix}$$

□

Proof.

B 的列向量由向量组：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 组成，既然$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$,是线性无关组，因此方程：

$$BX = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$BX = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$$

只有零解。
AB 的列向量由向量组：

$$A\alpha_1, A\alpha_2, ..., A\alpha_m$$

组成，$A\alpha_1, A\alpha_2, ..., A\alpha_m$ 是否线性无关组，取决于下列方程 □

Proof.

$$ABX = \begin{pmatrix} A\alpha_1 & A\alpha_2 & \cdots & A\alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$ABX = x_1A\alpha_1 + x_2A\alpha_2 + x_mA\alpha_m = 0$$

是否有非零解。因为矩阵 A 可逆，所以方程 $BX = 0$ 与方程 $ABX = 0$ 是同解方程：

$$BX_0 = 0 \Leftrightarrow ABX_0 = 0$$

既然 $BX = 0$ 只有零解，所以 $ABX = 0$ 也只有零解，所以向量组：$A\alpha_1, A\alpha_2, ..., A\alpha_m$ 是线性无关组。 □

证法 2. 直接用定义：假设有 m 个数：$k_1, k_2, \ldots, k_m$,满足

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \cdots + k_mA\alpha_m = 0$$

则有：

$$\begin{aligned}
& k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \cdots + k_mA\alpha_m = 0 \\
\Rightarrow & \begin{pmatrix} A\alpha_1 & A\alpha_2 & \cdots & A\alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0 \\
\Rightarrow & A\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

因为矩阵 A 可逆，故有

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$$

由已知条件，$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关，所以 $k_1 = 0, k_2 = 0, ..., k_m = 0$，这就说明

$$A\alpha_1, A\alpha_2, ..., A\alpha_m$$

线性无关。

4.2.2 线性相关性质的等价刻划

Theorem 2.3

(书中定理 4.1， P112) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, m \geq 2$ 线性相关，当且仅当其中一个向量可以被其它向量线性表示。

Proof.

必要性：假设这组向量线性相关，则存在不全为零的数：$k_1, k_2, ..., k_m$,使得下式成立：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

不妨设：$k_1 \neq 0$, 于是：

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m$$

所以，α_1 可以被其它向量线性表示。 □

充分性：假设其中某个向量，不妨设 α_m 可以被其它向量线性表示，即：

$$\alpha_m = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1}$$

于是有：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{m-1}\alpha_{m-1} - \alpha_m = 0$$

显然有：$k_1, k_2, ..., k_m = -1$ 不全为零，所以：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.证毕。

由此定理可知，两个向量线性相关，当且仅当对应分量成比例（平行），三个几何向量线性相关，当且仅当共面。

4.2.3 线性相关的进一步判定

把 n 维向量看作行（列）向量，等价于一个行（列）矩阵，因此线性相关的性质与矩阵性质密切相关，本节要证明这些相关性质。

将 m 个 n 维向量表达为列矩阵：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix},$$

令：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$$

- m 个 n 维向量对应一个 $n\times m$ 矩阵 A. 一个$n\times m$ 矩阵 A 对应 m 个 n 维列向量。
- 同样方式，用行向量的表达式，一组向量对应一个矩阵。

给定 $n\times m$ 矩阵 A，考虑列向量的线性组合：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=A\beta=0,\beta=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}$$

注意：不能写成$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$. (Why?)

1. 只要$\beta \neq 0$, 矩阵 A 的列向量就是线性相关的。
2. 或者说：$\beta = 0$, 当且仅当 A 的列向量是线性无关的。
3. 矩阵自身的性质，可以用于判断列向量的线性相关或线性无关。

矩阵列向量组线性无关（或线性相关）与矩阵秩的重要关系：

Theorem 2.4

矩阵判别法： $n \times m$ 矩阵 A 的列向量组线性无关，当且仅当矩阵 A 的秩：$R(A) = m$.

Theorem 2.5

等价命题： $n \times m$ 矩阵 A 的列向量组线性相关，当且仅当矩阵 A 的秩：$R(A) < m$.

Proof.

例题 8 证明：线性方程 $AX=0$ 有非零解向量 X_0，当且仅当 $R(A)<m$.

我们只需说明：矩阵 A 的列向量组线性相关，当且仅当线性方程 $AX=0$ 有非零解。矩阵 A的 m 个 n 维列向量记为：

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$$

□

Proof.

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow AX = 0\text{有解：} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}$$

□

Proof.

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \text{ 线性相关} \Leftrightarrow$$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0, k_1, k_2, \ldots, k_m, \text{ 不全为零}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} \text{是线性方程：} AX = 0 \text{的非零解}$$

□

对于矩阵的行向量组，有类似结论：

对于 $n \times m$ 矩阵 A, 矩阵的行向量组线性无关，当且仅当 $R(A) = n$.

特别一个方阵 A, 矩阵的行（列）向量组线性无关，当且仅当 $|A| \neq 0$.

问题：如果 m 个 n 维向量线性无关，我们将这组向量增加一个，或更多分量，变成 $n+1$ 维，或更多维的向量，它们还是线性无关吗？回答是肯定的，利用前面的结论，可以证明这个性质。

例如平面上：$\alpha = (1,0), \beta = (0,1)$ 线性无关，问：$\alpha_1 = (1,0,a), \beta_1 = (0,1,b)$是否线性无关？显然不存在非零数 k 满足：$\alpha_1 = k\beta_1$. 所以 α_1, β_1 还是线性无关

证明见下页。

结论：若有

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

线性无关，则有

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{(n+1)1} \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \\ a_{(n+1)2} \end{pmatrix}, \cdots, \beta_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \\ a_{(n+1)m} \end{pmatrix}$$

线性无关

Let

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \cdots & a_{(n+1)m} \end{pmatrix}$$

$$\because m \geq R(B) \geq R(A) = m$$

$$\therefore R(B) = m$$

B 的列向量线性无关。

对于增加更多分量的情况，证明完全一样。总结一下结论：

推论 2.6

（书中推论 *4.1*，*P115*） n 维向量组是线性无关组，则增加 t 个分量变成 $n+t$ 维向量组，还是线性无关组。

推论 2.7

（书中推论 *4.2*，*P116*） 设有m 个n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$，若 $m > n$，则该向量组是线性相关组。

证明：令

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \end{pmatrix}$$

A 是 $n \times m$ 矩阵，其秩：$R(A) \leq n < m$,故列向量线性相关。

Example 11

判断下列矩阵里，列(行)向量的线性相关性质。

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\3&2&1&0\\4&5&6&0\\6&5&4&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$$

对于 $A, R(A)\leq 3$, 列（行）数 4，故列（行）向量组线性相关。对于 B, 列向量组是3 维的，4 个 3 维向量必定线性相关。对于矩阵 $C, R(C)=3$, 行向量组个数等于矩阵的秩，所以行（列）向量组线性无关。

Example 12

已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 线性无关，再设：

1. $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 + \alpha_1$;
2. $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \gamma_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \gamma_3 = \alpha_3 + \alpha_1$.

分别讨论上面两组向量的线性相关性质。

(1)考虑下式，是否有非零线性组合， 设有

$$0 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 + k_4\beta_3$$

$$= k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_4) + k_4(\alpha_4 + \alpha_1)$$

$$= \alpha_1(k_1 + k_4) + \alpha_2(k_1 + k_2) + \alpha_3(k_2 + k_3) + \alpha_4(k_3 + k_4)$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \text{线性无关}$$

$$k_1 + k_4 = 0, k_1 + k_2 = 0, k_2 + k_3 = 0, k_3 + k_4 = 0$$

$$k_1 + k_4 = 0$$
$$k_1 + k_2 = 0$$
$$k_2 + k_3 = 0$$
$$k_3 + k_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到一组解：$k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -1$，因此，

$$\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 = 0$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性相关。

(2) 考虑下式，是否有非零线性组合：

$$\begin{aligned} 0 &= k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + k_3\gamma_3 \\ &= k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) \\ &= \alpha_1(k_1 + k_3) + \alpha_2(k_1 + k_2) + \alpha_3(k_2 + k_3) \\ &\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \text{线性无关} \\ &\Rightarrow k_1 + k_3 = 0, k_1 + k_2 = 0, k_2 + k_3 = 0 \end{aligned}$$

得到线性方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$线性无关

4.3 向量组的秩

4.3.1 极大无关组

1. 向量组的等价

设有向量组（1）和向量组（2）：

1. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$,
2. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$.

定义 3.1

（书中定义4.6，P117）如果向量组（1）的每一个向量都可以被向量组（2）线性表示，就说向量组（1）被向量组（2）线性表示。如果向量组（1）和向量组（2）可以互相线性表示，就说向量组（1）和向量组（2）等价。

- 向量组的线性表示具有传递性质。
- 向量组的等价具有传递性质。

定义 3.2

（书中定义4.7,P117-118） 给定有限个n 维向量的集合 Ω(或称一组向量)，如果Ω中存在 r 个向量：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$, 满足：

1. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$,线性无关；
2. 任取 $\alpha \in \Omega, \alpha \neq \alpha_i, i = 1, 2, ..., r$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, \alpha$ 线性相关；

称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$, 是向量集合 Ω 的一个极大线性无关组，简称极大无关组。

- 一个线性无关向量组，自身是极大无关组；
- 任何向量集合，是否存在极大无关组，有待后面证明；
- 任何向量集合，存在极大无关组，不唯一，即可能有几个极大无关组。

例如：

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

极大无关组有三组：α, β;或者 α, γ; 或者 β, γ.

（书中定理4.2,P118）

Theorem 3.3

设 n 维向量组：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，但是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha$ 线性相关。则向量 α 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示，且表达方式唯一。

Proof.

根据线性相关性，存在不全为零的数：$k_1, k_2, ..., k_m, k$,使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m + k\alpha = 0$$

从$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，得到 $k \neq 0$, 因此：

$$\alpha = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \frac{k_2}{k}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_m}{k}\alpha_m$$

即向量 α 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示。 □

假定 α 的线性表示有两种表达方式:

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

$$\alpha = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m$$

$$\Rightarrow (k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_m - l_m)\alpha_m = 0$$

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \text{线性无关}$$

$$k_1 = l_1, k_2 = l_2, \cdots, k_m = l_m$$

上述定理表明：

- 一个向量组的向量都可以被它的极大无关组线性表示；
- 一个向量组和它的极大无关组等价；
- 一个向量组的极大无关组，虽然不唯一，但互相等价。

4.3.2 向量组的秩

Theorem 3.4

（书中定理 *4.3*，*P118*） 如果有向量组:

1. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$;
2. $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$;

满足；向量组*(1)*线性无关，而且被向量组*(2)*线性表示，则有：$r \leq s$.

Proof.

既然向量组(1)被向量组(2)线性表示，可设：

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= k_{11}\beta_1 + k_{21}\beta_2 + \cdots + k_{s1}\beta_s \\
\alpha_2 &= k_{12}\beta_1 + k_{22}\beta_2 + \cdots + k_{s2}\beta_s \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\
\alpha_r &= k_{1r}\beta_1 + k_{2r}\beta_2 + \cdots + k_{sr}\beta_s
\end{aligned}
$$

□

解.

用列向量和矩阵表达上述线性关系：

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix}$$

根据矩阵乘积的秩关系，有

$$R\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} \le R \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix} \le s$$

□

再根据向量组与矩阵秩的判别法，有

$$R\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} = r$$

因此， $r \leq s$. 证毕。

推论 3.5

（书中推论*4.3*，*P119*）

- 前定理中，若向量组（*1*）和（*2*）都线性无关，且彼此等价，则 $r = s$.
- 一个向量组的所有极大无关组，均有相同个数的向量。

根据上面推论，我们实际上找到了向量组的不变量，因此给出如下定义：

定义 3.6

（书中定义4.8，P119） 对于给定的向量组 Ω, 定义它的秩为它的极大无关组所含向量的个数，可以记为 $R\Omega$.

- 对于线性无关组，它的秩就等于自身所含向量个数。
- 向量组的秩$\leq$向量组所含向量的个数。
- 对于一个向量组，有个数，秩，向量维数，这三个数量有一定的关系，后面会进一步研究。

(书中推论 4.4，P119)

推论 3.7

对于两个向量组

1. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, 秩为 r_1;
2. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, 秩为 r_2;

如果（1）被（2）线性表示，则有 $r_1 \leq r_2$. 等价的向量组有相同的秩。

Proof.

设向量组（1）的极大无关组为Ω, 则Ω 含有 r_1 个向量。再设向量组（2）的极大无关组为Δ, 则Δ 含有 r_2个向量. 因为向量组（1）与Ω等价，向量组（2）与Δ等价，因此由已知条件，Ω可以被Δ 线性表示，故有$r_1 \leq r_2$。 $\square$

4.3.3 矩阵的秩与向量组的秩

前面已经介绍过，线性相关或线性无关的性质，可以通过矩阵的秩来判断，本节进一步研究与秩相关的问题

(书中定理 4.4，P120)

Theorem 3.8

设 A 是 $n\times m$ 矩阵，则 A 的列向量组：$\Omega=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\}$的秩 $R\Omega$等于矩阵 A 的秩 $R(A)$.

Proof.

假定矩阵的秩$R(A)=r$. 于是矩阵 A 有一个 D_r 阶子式不为零，由 $D_{r\times r}$ 的行列构成一个矩阵，这个矩阵的列向量线性无关（矩阵列向量组的线性无关矩阵判别法）。把$D_{r\times r}$ 所在的列向量扩充为所在的矩阵 A 所在的列，记为 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\dots,\alpha_{j_r}$，则这还是线性无关的列，从而 $R(A)=r\leq R(\Omega)$.

□

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_r} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_r} & \cdots & a_{i_1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{i_rj_1} & \cdots & a_{i_rj_r} & \cdots & a_{i_rm} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{nj_1} & \cdots & a_{nj_r} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$0 \neq D_r = A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_rj_1} & \cdots & a_{i_rj_r} \end{vmatrix}$$

反之，设 $R(\Omega) = r$，即设矩阵 A 的列 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_r}$ 线性无关，于是由这 r 个列向量构成一个 $n \times r$ 的矩阵 A_1,于是由前面定理 2.4和2.5，矩阵列向量组线性无关与矩阵秩的关系：矩阵A_1 的秩 $R(A_1) = r$,但是有$r = R(A_1) \leq R(A)$，即有 $R(\Omega) = r \leq R(A)$.

注意到：$R(A) = R(A')$ 等于 A' 的列向量组的秩，等于 A 的行向量组的秩。所以得到：A 列向量组的秩等于 A 的行向量组的秩。

推论 3.9

- 矩阵的列向量组的秩等于行向量组的秩。
- 若矩阵 A 的秩为 r，则不为零的 r 阶子式 D_r 所在的行（列），构成矩阵 A 的行（列）向量组的极大无关组。

Example 13

设有向量组:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求向量组的秩和极大无关组。

解法 1: 令

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

简单计算，可知：$|A| = 0$, 右下角 3 阶子式：

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

因此，向量组的秩为 3，极大无关组可以选择 D_3所在的列：

$$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4.$$

解法 2：初等行变换，不改变列向量的线性关系：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow[\leftrightarrow]{\text{初等行变换}} P \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} P\alpha_1 & P\alpha_2 & P\alpha_3 & P\alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = 0$$

这里矩阵 P 可逆。

因此有

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可以看出，向量组的秩为 3, 极大无关组有：

1. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
2. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$
3. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

此外还有：$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$

注意：初等行变换（左乘可逆矩阵），保持列向量的线性关系，反映了一种重要的数学概念：同构– 一种保持运算关系的映射。

问题：类似范德蒙行列式对应的矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}, x_i \neq x_j, i \neq j$$

- 任意子式不为零；
- 任意k行线性无关，$k=1,2,...,n$；
- 任意k列线性无关,$k=1,2,...,n$；
- 广义范德蒙行列式的计算问题。

研究这类矩阵还有哪些？

4.4 向量空间

4.4.1 向量空间的概念

1. 向量空间的定义

定义 4.1

（书中定义 4.9）设 $\mathbf{V}$ 是数域 $\mathbf{F}$ 上 n 维向量空间构成的非空集合，满足如下条件：

1. 加法封闭：$\forall, \alpha, \beta \in \mathbf{V}, \alpha + \beta \in \mathbf{V}$;
2. 数乘封闭：$\forall k \in \mathbf{F}, \alpha \in \mathbf{V}, k\alpha \in \mathbf{V}$. 就称 $\mathbf{V}$ 是数域 $\mathbf{F}$ 上一个向量空间。

- 全体 n 维实向量的集合 $\mathbf{R}^n$ 是一个向量空间。例如 $\mathbf{R}^2$ 是全体 2 维实向量组成的向量空间。
- 只含一个零向量的集合，也是向量空间，称为零空间。
- 因为向量空间对数乘封闭，而且是非空集合，所以存在一个向量 α，于是：$0\alpha = 0$. 所以，任何向量空间一定包含零向量。

2. 由已知向量生成的向量空间

- 假设 α 是一个非零向量，令 $\mathbf{V}=\{k\alpha|k\in\mathbf{F}\}$，这是一个向量空间，由向量 α 生成的向量空间。例如，空间里面，平行于一条直线上的所有向量。

Example 14

集合

$$\mathbf{V}=\{\alpha=(0,x_2,...,x_n)|x_i\in\mathbf{R}\}$$

是一个向量空间。

Example 15

给定数域 上两个 n 维向量：α,β. 令

$$\mathbf{V}=\{k\alpha+l\beta|k,l\in\mathbf{F}\}$$

是一个向量空间。称为由 α,β 生成的向量空间。

更一般情况，给定 m 个数域 $\mathbf{F}$ 上向量：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$，记

$$L(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \quad = \{\gamma | \gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m\}$$
$$k_1, k_2, ..., k_m \in \mathbf{F}$$

称为由$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 生成的向量空间。

例如：$\varepsilon_1 = (1, 0), \varepsilon_2 = (0, 1)$，则有：

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathbf{R}^2$$

更一般，只要 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^2$ 是线性无关的，就有：

$$\mathbf{R}^2 = L(\alpha, \beta)$$

3. 向量空间的子空间

定义 4.2

（书中定义 4.10） 设集合 $\mathbf{V}$ 是数域 F 上向量空间，集合 $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$. 若集合 $\mathbf{W}$ 对集合 $\mathbf{V}$ 的运算构成F 上向量空间， 就称 $\mathbf{W}$ 是 $\mathbf{V}$ 的子空间,可以表示为：$\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$。

例如：设 $\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0), \varepsilon_3 = (0,0,1)$. 则有：

- $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathbf{R}^3$
- $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subseteq L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \mathbf{R}^3$
- $L(\varepsilon_1) \subseteq L(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subseteq \mathbf{R}^3$
- 任何向量空间$\mathbf{V}$，含自身$\mathbf{V}$和一个零向量的集合 $\mathbf{0} = \{0\}$, 作为子空间。这两个子空间，称为平凡子空间。

4. 与矩阵行列相关的4个子空间

Example 16

A $n \times m$ matrix A with columns $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$. Let

$$V = L(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$$

称为矩阵 A 的列向量空间,记为 $\mathrm{Im}(A)$ 是向量空间 $\mathbf{F}^{\mathbf{n}}$ 的子空间。

Example 17

设矩阵A 是 $n\times m$ 矩阵，考虑线性方程组的解构成的集合：

$$\mathbf{V}=\left\{X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}\middle|AX=0\right\}$$

解.

- $\mathbf{V}\neq\varnothing$: 零向量 $0\in\mathbf{V}, A0=0$
- 加法封闭性：$\alpha,\beta\in\mathbf{V}, A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta=0+0=0\Rightarrow \alpha+\beta\in\mathbf{V}$
- 数乘封闭性：$k\in F,\alpha\in\mathbf{V}, A(k\alpha)=kA\alpha=0\Rightarrow k\alpha\in\mathbf{V}.$

集合 $\mathbf{V}$ 是一个向量空间，称为线性方程组的解空间。 □

- $R(A) = m, AX = 0$ 只有零解，所以 $\mathbf{V} = \{0\}$.
- $R(A) < m, AX = 0$, 有非零解，此时： $\mathbf{V} > \{0\}$.
- $\mathbf{V}$ 是 线性空间 $\mathbf{F^m}$ 的子空间。

这个空间也可以称为矩阵 A 的零化空间：

$$N(A) = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mid AX = 0\}$$

- 问题：矩阵 A 的列向量空间和零化空间（解空间）有什么关系？

4.4.2 向量空间的基，维数与坐标

1. 基的定义与性质

定义 4.3

(书中定义4.11)设 $\mathbf{V}$ 是数域 $\mathbf{F}$上向量空间，如果 $\mathbf{V}$ 中存在向量组：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$,满足：

- $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 线性无关；
- $\mathbf{V}$ 中任何向量可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 线性表示；

称 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 是向量空间的基底。基底所含向量个数称为向量空间的维数，维数为 r 的向量空间，称为r 维向量空间。用符号：Dim($\mathbf{V}$) 表示向量空间的维数。

零向量空间的维数是 0. 维数有限的向量空间，称为有限维向量空间。

例如：$\mathbf{R}^3$ 的维数是 3. $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ 的维数是 n.

Example 18

$\mathbf{R}^n$ 的一个标准基底是：

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n$$

这个基也叫自然基底。$\mathbf{R}^n$的维数为 n.

- 问题：例8,9中，A 是$n\times m$矩阵，矩阵的列向量空间维数是多少？线性方程组 $AX=0$的解空间维数是多少？

性质 4.4

假设$\mathbf{V}$ 是 r 维向量空间，则 $\mathbf{V}$ 中任意 $m\geq r+1$ 个向量必然线性相关。

Proof.

设$\mathbf{V}$的基底为向量组（1）： $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$. 从 $\mathbf{V}$ 中任意取 $m\geq r+1$ 个向量，即向量组（2）： $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$. 我们要证明向量组（2）线性相关。反证法：若向量组（2）线性无关，因为（2）可以被向量组 （1）线性表示，根据前面的结论（本讲稿定理3.4），有 $m\leq r$., 这是矛盾的。 因此，向量组（2）必然线性相关。 □

证法2：设$j=1,2,...,m$

$$\beta_j = k_{1j}\alpha_1 + k_{2j}\alpha_2 + \cdots + k_{rj}\alpha_r = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{rj} \end{pmatrix}$$

因此有：

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_{m-1} & \beta_m \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1m-1} & k_{1,m} \\ k_{21} & \cdots & k_{2m-1} & k_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{r1} & \cdots & k_{rm-1} & k_{r,m} \end{pmatrix}$$

$$R\begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_{m-1} & \beta_m \end{pmatrix} \leq R\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix} = r$$

所以：$\beta_1, \cdots, \beta_{m-1}, \beta_m$ 的极大无关组所含向量个数 $\leq r$，而 $m \geq r+1$，因此有：$\beta_1, \cdots, \beta_{m-1}, \beta_m$线性相关。

性质 4.5

假设$\mathbf{V}$ 是 r 维向量空间，则 $\mathbf{V}$ 中任意 r 个线性无关的向量构成 $\mathbf{V}$ 的一个基。

Proof.

设有一组线性无关的 r 个向量：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$，任取 $\beta \in \mathbf{V}$

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, \beta \in \mathbf{V}$$

$$\text{线性相关，存在不全为零的数：} k_1, k_2, ..., k_r, k_{r+1}$$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + k_{r+1}\beta = 0$$

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \text{线性无关} \Rightarrow k_{r+1} \neq 0$$

$$\beta = -\frac{k_1}{k_{r+1}}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_{r+1}}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_r}{k_{r+1}}\alpha_r$$

任意向量$\beta \in \mathbf{V}$ 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 线性表示。$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 是一个基。

□

- 假设向量空间由向量组： $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 生成：

$$\mathbf{V} = L(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$$

$$\mathbf{V} = \{\alpha | \alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r\}$$

- $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 的极大无关组 Ω 就是向量空间 $\mathbf{V}$ 的一个基底。
-

$$R(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) = \mathrm{Dim}\mathbf{V}$$

为向量空间 $\mathbf{V}$ 的维数，即等于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$的秩。

2. 基与坐标表示

Theorem 4.6

给定向量空间 $\mathbf{V}$ 的一组向量：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$。 如果向量 $\alpha \in \mathbf{V}$，有线性表达式：

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r, k_1, k_2, ..., k_r \in \mathbf{F}$$

则上述表达式唯一，当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$线性无关。

Proof.

充分性，即已知$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$线性无关，证明表达方法唯一。假设有两种表达方式：

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r, k_1, k_2, ..., k_r \in \mathbf{F}$$

$$\alpha = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_r\alpha_r, l_1, l_2, ..., l_r \in \mathbf{F}$$

上面两个式子相减，得到：

$$(k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_r - l_r)\alpha_r = 0$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 线性无关，所以有：

$$k_1 = l_1, k_2 = l_2, k_r = l_r$$

即表达方式唯一。

必要性，即已知表达方式唯一，证明 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 线性无关。反证法，如果 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 线性相关，则存在不全为零的数：$l_1, l_2, \cdots, l_r$，满足：

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_r\alpha_r = 0$$

因此得到向量 α 的两种表达方式：

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$$

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r - (l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_r\alpha_r)$$

$$\alpha = (k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_r - l_r)\alpha_r$$

表达方式唯一，则有：

$$k_1 = k_1 - l_1, k_2 = k_2 - l_2, ..., k_r = k_r - l_r$$

所以有：

$$l_1 = 0, l_2 = 0, ..., l_r = 0$$

矛盾。所以 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 线性无关。证毕。

Example 19

若向量组（1）：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 与 向量组（2）：$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ 等价，则有：

$$L(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) = L(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r)$$

Example 20

Suppose A is a $n \times m$ matrix, with columns: $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$. Find the dimension of $V = L(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$. 证明:Dim$V = R(\Omega)$

根据定理 4.6，给出下列定义：

定义 4.7

(书中定义 4.12) 假设向量空间 $\mathbf{V}$ 是 r 维向量空间，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是 $\mathbf{V}$ 的一个基。任意向量 $\alpha \in \mathbf{V}$，存在唯一的表达式：

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r, x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbf{F}$$

称向量 $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ 为向量 α 关于基底 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 的坐标向量，简称坐标。

1. 向量的坐标跟基底的选择有关，不同的基底，坐标不一样。
2. 在一个固定的基底下，每一个向量对应着唯一的坐标向量。

已知$\mathbf{R}^3$ 有标准基

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\alpha=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+k_3\varepsilon_3$$

即标准基底下，$\mathbf{R}^3$ 向量对应三元坐标：$\alpha=(k_1,k_2,k_3)$. 如果选择 $\mathbf{R}^3$ 的另外一个基底：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

自然问题：向量 α 在这个基底下的坐标是什么？

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

因此得到线性方程式：

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= k_1 \\ x_2 + x_3 &= k_2 \\ x_3 &= k_3 \end{aligned}$$

解方程得到：$x_3 = k_3, x_2 = k_2 - k_3, x_1 = k_1 - k_2$，即：

$$\begin{aligned}\alpha &= (k_1 - k_2)\alpha_1 + (k_2 - k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 \\ &= k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_3\end{aligned}$$

例如，向量 $\alpha = (1, 0, -4)$ 在基底 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为：$(1, 4, -4)$.

问题：如何找到同一个向量，在不同基底下的坐标关系？

Example 21

设

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -4\end{pmatrix}$$

证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个基底，求向量 β 在这个基下的坐标。

解.

因为：

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=-27$$

$$\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性无关}$$

□

因此，这三个向量构成 $\mathbf{R}^3$ 的一个基底。设

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$$

于是

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

解上述线性方程组：

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -8 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & -8 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应方程： $-x_3 = 1, 3x_2 = -2, x_1 + x_2 = 0$

解为： $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}, x_3 = -1$

因此 $\beta = \frac{2}{3}\alpha_1 - \frac{2}{3}\alpha_2 - \alpha_3$

4.4.3 坐标变换

本节要解决同一个向量，在不同基底下的坐标变换问题。

设 **V** 是数域 **F** 上 n 维向量空间，有两组基底：

1. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$;
2. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$;

考虑基底（2）在基底（1）下的坐标：

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\
\beta_2 &= p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\
&\cdots\cdots \\
\beta_n &= p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n
\end{aligned}$$

用矩阵形式表达：

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} P$$

称矩阵 P 为从基底 （1）$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 到基底（2） $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ 的过渡矩阵。

思考：过渡矩阵是可逆矩阵。为什么？

Theorem 4.8

*(书中定理 4.5)*设向量空间 V 中，从基底（1）$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 到基底（2）$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ 的过渡矩阵为 矩阵 P。假设 V 中 向量 α 在基底（1）$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 下的坐标为：$(x_1, x_2, ..., x_n)$, 在基底（2）$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ 下的坐标为：$(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$. 则坐标关系为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proof.

根据已知条件有：

□

Proof.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

既然，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，所以有

□

Proof.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

□

上述定理给出的公式，称为坐标变换公式。

Example 22

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是$\mathbf{R}^4$ 的一个基，

$$\alpha = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4$$

再设有一个基底:$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$,从前一基底到第二基底过渡矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求α 在第二个基底下的坐标。

解.

$$\alpha = x_1'\beta_1 + x_2'\beta_2 + x_3'\beta_3 + x_4'\beta_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

由此可得：

$$x_1' = 1, x_2' = -3, x_3' = 5, x_4' = -2$$
$$\alpha = \beta_1 + -3\beta_2 + 5\beta_3 - 2\beta_4$$

注意，如果没有特别说明，$\mathbf{R}^n$ 中，标准基底下的向量表达为 n 个分量形式：

$$\alpha = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n$$

Example 23

在 $\mathbf{R}^4$ 中取两个基：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

求两个基之间的过渡矩阵，两个基下坐标变换公式。

解.

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$, 过渡矩阵为 P

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} P$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} P$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

□

利用初等行变换，求

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \end{pmatrix}.$$

$A^{-1}B = P$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$
\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 1 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 7 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

若向量

$$\begin{aligned}\alpha &= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 \\ &= x_1'\beta_1 + x_2'\beta_2 + x_3'\beta_3 + x_4'\beta_4\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_2' \\ x_4' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_2' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

4.5 欧氏空间

4.5.1 内积的概念

本节的向量空间都在实数域上考虑。

定义 5.1

（书中定义 4.13） 设有 $\mathbf{R}^n$ 中两个向量：

$$\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$$
$$\beta = (b_1, b_2, ..., b_n)$$
$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

称 (α, β) 为向量 α 与向量 β 的内积。

- 定义了内积的向量空间 $\mathbf{R}^n$ 称为欧氏空间。
- 内积是几何向量数量积的推广。

内积有下列性质：

1. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
2. $(k\alpha, \beta) = k(\beta, \alpha)$
3. $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$
4. $(\alpha, \alpha) \geq 0, (\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
5. $(\alpha, k\beta + l\gamma) = k(\alpha, \beta) + l(\alpha, \gamma)$

定义 5.2

（书中定义 4.14） 设有 $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ 中向量：

$$\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

称 $|\alpha|$ 为向量 α 的长度，长度为 1 的向量，称单位向量。

引理 5.3

（书中引理 *4.1*）向量的内积满足：

$$(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta) \quad \cdots\cdots (4)$$

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|$$

证明参见书中128页。

Proof.

任意取：$k \in \mathbf{R}, \alpha \neq 0,$

$$
\begin{aligned}
(k\alpha+\beta, k\alpha+\beta) &\geq 0 \\
k^2(\alpha,\alpha)+2k(\alpha,\beta)+(\beta,\beta) &\geq 0 \\
4(\alpha,\beta)^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta) &\leq 0 \\
|(\alpha,\beta)| \leq \sqrt{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)} &= |\alpha||\beta|
\end{aligned}
$$

$\square$

Theorem 5.4

（书中定理 4.6），设有向量 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$,

1. $|\alpha| \geq 0, |\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0;$
2. $|k\alpha| = |k||\alpha|$
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

证明参见书中 128页。这里只证（3）：

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta, \alpha+\beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) \\
\leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \\
|\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \\
|\alpha+\beta| \leq (|\alpha| + |\beta|)
\end{aligned}
$$

定义 5.5

（书中定义 4.15） 设有 $\mathbf{R}^n$ 中向量$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$：称

$$\varphi = \arccos \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

称 α 与 β 的夹角。

若 $(\alpha, \beta) = 0$，称两个向量正交，记为 $\alpha \perp \beta$。零向量与任何向量正交。

4.5.2 规范正交基

正交向量组 两两正交的向量组，称为正交组。自然规定，正交组不含零向量。

性质 5.6

正交向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 一定是线性无关组。

Proof.

设有：注意有$(\alpha_i, \alpha_j) = 0, i \neq j$.

$$\begin{aligned} k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m &= 0 \\ k_1(\alpha_1, \alpha_1) = 0, \alpha_1 \neq 0, \Rightarrow k_1 &= 0 \\ k_2(\alpha_2, \alpha_2) = 0, \alpha_2 \neq 0, \Rightarrow k_2 &= 0 \\ \cdots\cdots \\ k_m(\alpha_m, \alpha_m) = 0, \alpha_m \neq 0, \Rightarrow k_m &= 0 \end{aligned}$$

因而，$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 是线性无关组。 □

定义 5.7

（书中定义 4.16） 假设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 是向量空间 $\mathbf{V}$一个基底，而且两两正交，就称为正交基；如果正交基的每一个向量都是单位向量，就称这个基为规范（标准）正交基。

向量空间 $\mathbf{R^n}$ 中的一组向量：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 要成为规范基，当且仅当：

$$\left\{ \begin{array}{c} (\alpha_i, \alpha_j) = 0, i \neq j \\ (\alpha_i, \alpha_i) = 1 \end{array} \right\}, i, j = 1, 2, ..., n$$

选定向量空间的规范基，则向量的坐标表达由内积决定。

(书中例 15)

Example 24

设 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 是向量空间 $\mathbf{V}$ 的规范基，任给向量 $\alpha \in \mathbf{V}$,求坐标表达公式。

解.

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$
$$(\alpha_i, \alpha) = k_i(\alpha_i, \alpha_i) = k_i$$
$$\alpha = (\alpha, \alpha_1)\alpha_1 + (\alpha, \alpha_2)\alpha_2 + \cdots + (\alpha, \alpha_m)\alpha_m$$

□

三位几何空间中：$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的规范基。

4.5.3 (Schmidt)斯密特正交方法

本节介绍，如何从一组线性无关的向量出发，找到规范正交基。

正交向量基底背景：给定平面上两个不共线的向量：α, β，构成平面 R^2 向量空间一组基。但我们希望从 α, β 找到一组正交基，类似于标准基。设向量 β 在向量 α 的投影向量为 β_α.

$$
\begin{aligned}
\beta_\alpha &= k\alpha \\
(\beta - k\alpha)\perp\alpha &= (\beta - k\alpha)\bullet\alpha = 0 \\
\beta\bullet\alpha - k\alpha\bullet\alpha = 0 &\Rightarrow k\alpha\bullet\alpha = \beta\bullet\alpha \\
k &= \frac{\beta\bullet\alpha}{\alpha\bullet\alpha}
\end{aligned}
$$

令：

$$\alpha_1 = \alpha, \beta_1 = \beta - k\alpha = \beta - \frac{\beta\bullet\alpha}{\alpha\bullet\alpha}\alpha$$

则有：$\alpha_1\perp\beta_1$

假设 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 是向量空间 $\mathbf{V}$ 的一组线性无关向量，我们要：

1. 找到与$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 等价的正交组；$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$;
2. 找到与 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ 等价的规范正交向量组：$\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$;
3. 以上过程，分别称为正交化和规范化过程。

以上第二个过程比较简单，只需令：

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|}, \gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|}, ..., \gamma_m = \frac{\beta_m}{|\beta_m|}$$

正交化过程，有以下表达式：

$$\beta_1 = \alpha_1$$
$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$
$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$
$$\beta_i = \alpha_i - \frac{(\alpha_i,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_i,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_i,\beta_{i-1})}{(\beta_{i-1},\beta_{i-1})}\beta_{i-1}$$
$$i = 1, 2, ..., m$$

上述正交化方法，称为斯密特（Schmidt）正交化。

注意：斯密特正交化，实际保证了：每一步都是正交与规范化：

$$L(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i) = L(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_i)$$
$$= L(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_i), i = 1, 2, ..., m$$

我们可以用如下定理准确描述斯密特正交化的意义。(参考阅读)

Theorem 5.8

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是 n 维内积空间V 的一个基，我们可以得到V 的一个标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$，满足：

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$$

Proof.

第一步，设

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, L(\alpha_1) = L(\varepsilon_1)$$

□

标准正交基

Proof.

归纳假定，有标准正交向量组：$\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{m-1}$，满足：

$$L(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{m-1})$$

考虑向量：

$$\beta_m = \alpha_m - k_1\varepsilon_1 - k_2\varepsilon_2 - \cdots - k_{m-1}\varepsilon_{m-1}, k_i = (\alpha_m, \varepsilon_i).$$

因而 $(\beta_m, \varepsilon_i) = 0, i = 1, 2, ..., m-1$，得到正交向量组：

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{m-1}, \beta_m.$$

且有

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{m-1}, \alpha_m) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{m-1}, \beta_m)$$

□

标准正交基

Proof.

再取单位向量：$\varepsilon_m = \frac{\beta_m}{\|\beta_m\|}$,得到标准正交基底

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m$$

且有

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m) = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-1}, \beta_m)$$

由归纳假定式：得到

$$\begin{aligned} L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_m) = & \ L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-1}, \alpha_m) \\ = & \ L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-1}, \beta_m) \\ = & \ L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m) \end{aligned}$$

□

Example 25

设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求等价的规范正交组。

解.

$$\beta_1 = \alpha_1$$

□

解.

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$\square$

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \frac{\sqrt{15}}{5}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|} = \frac{\sqrt{15}}{3}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

4.5.4 正交矩阵

介绍矩阵与正交基的关系

- n 阶实方阵 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$的列向量是一个基底，当且仅当 $|A| \neq 0$.
- 规范正交基底也要定义相关的矩阵，正交矩阵。

定义 5.9

（书中定义 4.17） 一个 n 阶实方阵 A ，如果满足 $A'A = E$ ，就称为正交矩阵。

等价条件：一个 n 阶实方阵 A 为正交矩阵，当且仅当：$A^{-1} = A'$.

n 阶正交矩阵 A 具备下列性质：

1. 正交矩阵可逆，且 $A^{-1}=A'$,转置矩阵；
2. $A^{-1}=A'$ 也是正交矩阵: $(A')'A'=(AA')'=E'=E$；
3. 对任意 n 维列向量 X, AX 保持向量长度，即 $|AX|=|X|$;
4. 对任意 n 维列向量 $X, Y, (AX, AY)=(X, Y)$ 保持内积；
5. $|A|=1$ 或者 $|A|=-1$

Proof.

性质（1）和（2）显然成立。

性质（3）：$(AX, AX) = (AX)'AX = X'A'AX = X'X = (X, X) \Rightarrow |AX| = |X|$.

性质（4）：$(AX, AY) = (AX)'AY = X'A'AY = X'Y = (X, Y)$.

性质（5）：$A'A = E \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$.

□

Theorem 5.10

（书中定理 *4.7*） 设有 $n \times n$ 实矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

则 A 的列向量是 $\mathbf{R}^n$ 的规范正交基，当且仅当矩阵 A 是正交矩阵。

Proof.

首先注意到：

$$A'A = \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

□

并且：$\alpha_i'\alpha_j = (\alpha_i, \alpha_j)$，所以有：

$$A'A = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix}$$

所以有：

$$A'A = E \Leftrightarrow (\alpha_i, \alpha_j) = \left\{ \begin{array}{c} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{array} \right\}$$

即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是规范正交基，当且仅当：A 是正交矩阵。

谢 谢！