# 线性代数
# 第五章 线性方程组

曾吉文
哈尔滨工业大学数学科学学院

2021年 9 月

本章介绍：

- 线性方程组有解的问题；
- 线性方程组解的结构；
- 矩阵初等行变换求解线性方程组；

我们研究的线性方程组，是指如下类型的方程组：

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\}\cdots\cdots(1)$$

此处：$a_{ij},b_i,i=1,...,m,j=1,...,n$；是常数，$x_1,x_2,...,x_n$ 是未知量，待求解数。

1. 线性方程组有解的充要条件
   - 基本概念
   - 非齐次线性方程组有解的充要条件
2. 线性方程组解的结构
   - 齐次线性方程组解的结构
   - 非齐次线性方程组解的结构
3. 初等行变换解线性方程组

# 5.1 线性方程组有解的充要条件

## 5.1.1 基本概念

我们用矩阵形式表达线性方程组：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$A$ 称为系数矩阵,矩阵形式：$AX=\beta \quad \cdots\cdots(2)$

向量形式： $AX=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta\cdots(3)$$

线性方程组的一组解：

$$d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 + \cdots + d_n\alpha_n = \beta, X = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix},$$

称为线性方程组的解向量

在线性方程组的基础上，再定义一个 $m \times (n+1)$ 阶矩阵：

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

- 这个矩阵称为线性方程组的增广矩阵。
- 如果向量：

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = 0,$$

称线性方程组为齐次线性方程组；否则，称为非齐次线性方程组。

- 有解的方程组，叫相容方程组，否则叫不相容方程组。
- 齐次线性方程组总是有解的：零向量就是它的解。

# 5.1.2 非齐次线性方程组有解的充要条件

根据线性方程组的三种等价表达方式，关于线性方程组的解，有三种等价说法：

1. 线性方程组（1）有解；
2. 矩阵方程（2）有解；
3. 向量 $\beta$ 是 矩阵 $A$ 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的线性组合；
4. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ 等价；
5. $\beta \in L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$
6. 矩阵 $A$ 的秩等于增广矩阵 $B$ 的秩，即：$R(A) = R(B)$.

前面4个结论比较明显，我们证明第6个结论。

## Theorem 1.1

*(书中定理 5.1，P142)*非齐次线性方程组（1）有解的充要条件是：系数矩阵 $A$ 的秩等于其增广矩阵 $B$ 的秩，即：

$$R(A) = R(B)$$

## Proof.

必要性，即设方程组（1）有解。由此可得，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta$ 等价；则它们的极大无关组也是等价的，分别设为 $\Omega_1, \Omega_2.$。故 $|\Omega_1| = |\Omega_2| = r.$

$$R\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} = R\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta\} = r$$

但是有

$$R(A) = R\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}, R(B) = R\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta\}$$
$$\Rightarrow R(A) = R(B).$$

充分性：即设 $R(A)=R(B)=r$. 由此可得：

$$R\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}=R\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta\}=r$$

我们从向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 选取一个极大无关组：

$$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{i_r}$$

则它也是

$$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta$$

的极大无关组。所以

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}\xrightarrow{\text{等价}}\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{i_r}\}$$
$$\xrightarrow{\text{等价}}\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta\}$$

# 5.2 线性方程组解的结构

## 5.2.1 齐次线性方程组解的结构

对于齐次线性方程组:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots(4)$$

$$A=(a_{ij})_{m\times n}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, AX=\mathbf{0}\cdots\cdots(5)$$

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\mathbf{0}\cdots\cdots(6)$$

以上均为齐次线性方程组的等价表达形式。

我们假设齐次线性方程组的解向量的集合为：$N(A)(\neq \emptyset)$

**Theorem 2.1**

（书中定理 *5.2*，*P142*）齐次线性方程组的解向量集合 $N(A)$ 是 $n$ 维向量构成的向量空间，且向量空间的维数是 $n - R(A)$.

Proof.

直接按定义验证：$N(A)$ 是一个向量空间。对加法和数乘封闭，

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} \in N(A) &\quad \Rightarrow N(A) \neq \emptyset \\
\alpha_1, \alpha_2 \in N(A) &\quad \Rightarrow A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = \mathbf{0} \\
&\quad \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \in N(A) \\
k \in \mathbf{F}, \alpha \in N(A) &\quad \Rightarrow A(k\alpha) = kA\alpha = \mathbf{0} \\
&\quad \Rightarrow k\alpha \in N(A)
\end{aligned}$$

□

接下来，我们证明第二个结论：$n - R(A)$ 等于向量空间 $N(A)$ 的维数。

如果 $R(A) = n$, 则系数矩阵 $A$ 的列向量线性无关，解向量只有零向量 $\mathbf{0}$, 所以 $N(A)$ 的维数等于 0.

以下我们假设 $R(A) = r < n$. 根据矩阵秩的性质，存在一个不为零的 $r$ 阶子式，不妨假定这个 $r$ 阶子式在矩阵 $A$ 的左上角：(比如经过初等行变换不改变解空间，使得前$r$ 行有 $r$ 阶子式不为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

- 矩阵 $A$ 的前 $r$ 个行向量 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$ 构成行向量组的极大无关组；注意后 $m-r$ 行是前 $r$ 行的线性组合。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

以上等价原因：

$$AX=\mathbf{0}\Leftrightarrow PAX=\mathbf{0}, P\text{可逆矩阵}$$

由此得到等价线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1(r+1)}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2r}x_r=-a_{2(r+1)}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rr}x_r=-a_{r(r+1)}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n \end{array}\right\}\cdots\cdots(7)$$

这里的未知量：$x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n$，称为自由未知量。

根据Cramer法则，任意选取一组值：$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$，通过上述方程，可以得到唯一一组解：$x_1, x_2, \ldots, x_r$.从而得到线性方程组的一个解：

$$x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$$

考虑 $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ 分别取下述 $n-r$ 个$n-r$ 维向量：

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

将上述 $n-r$ 维解向量，代入（7），得到线性方程组的 $n-r$ 个 $n$ 维解向量：

$$\xi_1=\begin{pmatrix} d_{11}\\ d_{21}\\ \vdots\\ d_{r1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} d_{12}\\ d_{22}\\ \vdots\\ d_{r2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix},\dots,\xi_{n-r}=\begin{pmatrix} d_{1(n-r)}\\ d_{2(n-r)}\\ \vdots\\ d_{r(n-r)}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1 \end{pmatrix}$$

既然后 $n-r$ 个分量是线性无关的，所以 $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-r}$ 线性无关。

现在我们证明这组向量是解空间 $N(A)$ 的一个基，为此，需要证明：任给 $\xi \in N(A)$，则：$\xi$ 由$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$线性表示，或者

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}, \xi, \quad \text{线性相关}$$

从而 $\xi$ 由$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$线性表示。假设

$$\xi = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \\ k_{r+1} \\ k_{r+2} \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

有两种方法证明 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}, \xi$ 线性相关：

1. 证明：$\xi = k_{r+1}\xi_1 + k_{r+2}\xi_2 + \cdots + k_n\xi_{n-r}$
2. 直接证明: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}, \xi$ 线性相关：

我们用第二种方法：以 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}, \xi$ 为列向量，构造一个 $n \times (n-r+1)$ 矩阵：

$$B = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{n-r} & \xi \end{pmatrix}$$

因为

$$\begin{aligned} AB &= A \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{n-r} & \xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A\xi_1 & A\xi_2 & \cdots & A\xi_{n-r} & A\xi \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

所以：$R(B) \leq n - R(A) = n - r \leq n - r + 1$，即矩阵 $B$ 的列数，因而

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}, \xi, \text{ 线性相关}$$

# 推论 2.2

（书中推论5.1，P144）设矩阵 $A$ 是 $m \times n$ 矩阵，$X$ 表示未知数向量。关于线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的解，有下述结论：

1. $AX = \mathbf{0}$ 只有零解，即 $N(A) = \{0\} \Leftrightarrow R(A) = n$,未知量个数。当且仅当矩阵 $A$ 是列满秩。
2. $AX = \mathbf{0}$ 有无穷个解，当且仅当：$R(A) < n$,未知量个数，或者说，矩阵 $A$ 不是列满秩矩阵。
3. 当 $R(A) = r < n$ 时，设 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 是解空间 $N(A)$ 的基底，解空间可以表示为：

$$N(A) = \{\xi | \xi = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}, k_1, \ldots, k_{n-r} \in \mathbf{F}\}$$

称基底 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 为线性方程组的基础解系，基础解系中的向量可以表达所有解向量：通解方程

$$\xi = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$$

**推论 2.3**

(书中推论5.2，P145) 若系数矩阵$A$ 是 $n$ 阶方阵，则 $AX = \mathbf{0}$ 有非零解，当且仅当 $|A| = 0$.

**推论 2.4**

若系数矩阵$A$ 是 $m \times n, m < n$ 矩阵，则 $AX = \mathbf{0}$ 有非零解。即方程个数小于未知量的个数，则线性方程组一定有非零解。

## Example 1

求方程组的基础解系和通解:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=0 \\ x_1+3x_2+x_3+x_4=0 \end{array}\right\}$$

## 解.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R(A)=2$$

□

$$x_1 = -x_3 + 2x_4$$
$$x_2 = -x_4$$

得到自由未知量：$x_3, x_4$. 分别取：$x_3 = 1, x_4 = 0; x_3 = 0, x_4 = 1;$ 得到基础解系：

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\xi = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# 5.2.2 非齐次线性方程组解的结构

非齐次线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \cdots\cdots(9)$$

$$A=(a_{ij})_{m\times n}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, AX=\beta, \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

以上均为非齐次线性方程组的等价表达形式。

与上述非齐次线性方程组（9）对应，相同系数矩阵 $A$ 的齐次线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots(10)$$

$$AX=\mathbf{0},\quad \text{矩阵表达式}$$

称为（9）的导出组。

## Theorem 2.5

（书中定理 5.3，P146） 设齐次线性方程组与其导出组的矩阵形式为：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$AX=\beta\cdots\cdots(9)$$

$$AX=\mathbf{0}\cdots\cdots(10)$$

1. 若解向量 $\eta_1,\eta_2$ 都是（9）的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是（10）的解；
2. 若解向量 $\eta$ 是（9）的解，$\xi$ 是（10）的解，则 $X=\eta+\xi$ 是（9）的解。

**Proof.**

- $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=\beta-\beta=\mathbf{0}$,满足（10）.
- $AX=A(\eta+\xi)=A\eta+A\xi=\beta+\mathbf{0}=\beta$，满足（9）。

□

由此可以判断：在（9）有解的情况下，

1. （9）的解唯一，则其导出齐次方程组（10）只有零解（唯一解）；
2. 若导出方程组（10）只有零解（唯一解），则方程组（9）的解唯一。

**推论 2.6**

*若线性方程组（9）有解，则它的解唯一，当且仅当其导出齐次方程组（10）只有零解。*

## 推论 2.7

(书中推论5.3, P146)

1. 方程(9)有解且唯一解，当且仅当 $R(A) = R(B) = n$。
2. 方程(9)有解且无穷解，当且仅当 $R(A) = R(B) < n$。
3. 当$R(A) = R(B) = r < n, n$是未知量个数。设 $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-r}$ 是导出组(10)的一个基础解系，再设(9)有一个特解：$\eta^*$，则(9)的通解为

$$\eta = \eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} \cdots\cdots (11)$$

这里 $k_1, k_2, ..., k_{n-r}$ 为任意常数。

## Proof.

1. 必要性，即设非齐次线性方程组有唯一解。首先有解，即得到结论 $R(A) = R(B)$. 根据前面定理，（9）的解唯一，导出（10）的解唯一，因而$R(A) = n$. 从而 $R(A) = R(B) = n$. 充分性，如果有 $R(A) = R(B) = n$. 得到非线性方程组（9）有解，而且$R(A) = n$，所以（10）的解唯一。于是对于（9）的任意两个解：

$$
\begin{aligned}
\eta_1, \eta_2, A\eta_1 = A\eta_2 = \beta \\
\Rightarrow A(\eta_1 - \eta_2) = 0 \\
\Rightarrow \eta_1 = \eta_2
\end{aligned}
$$

□

## Proof.

1.

2. 必要性， 假设非线性方程（9）有无穷解。有解必然是 $R(A) = R(B)$. (9)有无穷解，导出（10）有非零解。从而根据齐次线性方程组的结论：$R(A) < n$. 从而有：$R(A) = R(B) < n$.
   充分性，即有：$R(A) = R(B) < n$. 于是非齐次线性方程组（9）一定有解， 而且$R(A) < n$，所以（10）的解有无穷个。这样，根据前面定理5.3，（9）有无穷解。

3. 容易验证，形如（11）的表达式是（9）的解。反之任给（9）的一个解：$\eta$,

$$A(\eta - \eta^*) = \beta - \beta = 0$$

$$\exists k_1, k_2, ..., k_{n-r} \in \mathbf{F}$$

$$\eta - \eta^* = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$$

$$\eta = \eta^* + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$$

## Example 2

讨论下面方程组解的结构:

$$\begin{aligned} ax_1+(a-1)x_2+x_3&=1\\ ax_1+ax_2+x_3&=2\\ 2ax_1+2(a-1)x_2+ax_3&=2 \end{aligned}$$

## 解.

利用增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a & a-1 & 1 & 1\\ a & a & 1 & 2\\ 2a & 2(a-1) & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} a & a-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}$$

□

1. $a=0$, 则有：

$$B \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, R(A)=2, R(B)=3, \text{无解}$$

2. $a=1$,

$$B \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, R(B)=R(A)=3, \text{解唯一}$$

3. $a=2$,

$$B \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R(B)=R(A)=2, \text{解无穷}$$

1.
2.
3.
4. $a \neq, 0, 1, 2$

$$B \to \begin{pmatrix} a & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}, R(A) = R(B) = 3, \text{解唯一}$$

$a=0$, 无解；$a=2$, 无穷解；$a$ 为其它数，解唯一。

此题有解法 2，参见数中例2（P147页）。

## Example 3

设 $A$ 是 4 阶方阵，且$R(A)=2$. 再设非齐次线性方程 $AX=\beta$ 有解：$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$，而且满足：

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}2\\4\\0\\8\end{pmatrix},2\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}3\\0\\3\\3\end{pmatrix},3\eta_3+\eta_4=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

试求方程 $AX=\beta$ 的通解。

## 解.

$$A(\eta_1+\eta_2)=A\begin{pmatrix}2\\4\\0\\8\end{pmatrix}\rightarrow\beta=A\begin{pmatrix}1\\2\\0\\4\end{pmatrix}\cdots\cdots(1)$$

**解.**

$$A(2\eta_2+\eta_3)=A\begin{pmatrix}3\\0\\3\\3\end{pmatrix}\rightarrow \beta=A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\cdots\cdots(2)$$

$$A(3\eta_3+\eta_4)=A\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\rightarrow 4\beta=A\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\cdots\cdots(3)$$

$$(1)-(2)=A\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\3\end{pmatrix}=0,4(2)-(3)=A\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\3\end{pmatrix}=0$$

$\because R(A)=2\therefore AX=0$基础解系有两个向量

**解.**

根据前面式子（2），$AX=\beta$ 有特解：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\eta^*, A\eta^*=\beta$$

$AX=0$ 有线性无关的两个解：

$$\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\3\end{pmatrix}=\xi_1, \begin{pmatrix}2\\-1\\4\\3\end{pmatrix}=\xi_2, A\xi_1=A\xi_2=0$$

□

**解.**

因此:

$$\eta=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\3\end{pmatrix}$$

为 $AX=\beta$ 的通解。 □

## Example 4

已知某线性方程组 (I) 的通解为：

$$\xi = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in \mathbf{F}$$

再设线性方程组 (II) 为：

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\ \ x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - \quad x_4 &= 0 \end{aligned}$$

求线性方程组（I）和（II）的公共解。

**解.**

线性方程组（II）的矩阵表达为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

将 I 的通解代入上式：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_1 + 2k_2 \\ k_1 + 2k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-k_2 + k_2 = 0$$
$$-k_2 + 2(k_1 + 2k_2) - k_2 = 0$$
$$\Rightarrow k_1 + k_2 = 0$$

因此，公共解为：

$$\xi = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\xi = k_2(-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$k \in \mathbf{F}$, 常数

# 5.3 初等行变换解线性方程组

利用矩阵初等行变换，解齐次和非齐次线性方程组的原理：

初等行变换不改变矩阵列向量的线性关系。

$$AX=0 \Leftrightarrow PAX=0, P\text{可逆矩阵}$$

$$A\xrightarrow{\text{初等行变换}}A_1=PA, P\text{可逆矩阵}$$

$$AX=\beta \Leftrightarrow PAX=P\beta, P\text{可逆矩阵}$$

$$B=\begin{pmatrix} A & \beta \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}PB=\begin{pmatrix} PA & P\beta \end{pmatrix}$$

## Example 5

求线性方程组的基础解系和通解:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & =0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -3x_4 & =0 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \end{array}$$

## 解.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1,r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2,-1r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到等价的含自由变量的线性方程组：

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3 + 2x_4 \\ x_2 &= -x_4 \end{aligned}$$

分别取 $(x_3 = 1, x_4 = 0); (x_3 = 0, x_4 = 1)$

基础解系为： $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

通解为: $\xi = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Example 6

求解线性方程组：

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +3x_2 & +x_3 & & =0 \\ 2x_1 & +6x_2 & +3x_3 & -2x_4 & =0 \\ -2x_1 & -6x_2 & & -4x_4 & =0 \end{array}$$

## 解.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

得到等价的含自由变量的线性方程组：

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 2x_4 \\ x_3 &= 2x_4 \end{aligned}$$

$$x_2 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_3 = 0$$

$$x_2 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = -2, x_3 = 2$$

基础解系：$\xi_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

通解：$\xi = k_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Example 7

求解非齐次线性方程组：

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & =4 \\ 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & +2x_4 & =2 \\ & 5x_2 & +7x_3 & +3x_4 & =-2 \\ 2x_1 & -3x_2 & -5x_3 & -x_4 & =4 \end{array}$$

## 解.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

□

$$\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & -10 \\ 0 & 5 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 12 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[4^{-1}r_3,5^{-1}r_2]{r_4+2^{-1}r_3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+3^{-1}r_3]{r_1+3^{-1}r_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2}{3}x_4 + 1 \\ x_2 &= \frac{1}{3}x_4 + 1 \\ x_3 &= -\frac{2}{3}x_4 - 1 \end{aligned}$$

这个方程与原来的非线性方程组等价，取$x_4 = 0$,得到 $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$, 这是原线性方程的一个特解:

$$\eta^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

由导出组：
$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2}{3}x_4 \\ x_2 &= \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 &= -\frac{2}{3}x_4 \end{aligned}$$

$$x_4 = 1, \Rightarrow, x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = -\frac{2}{3}$$

$$\text{基础解系：}\ \xi = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{通解:}\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

也可以直接令：

$$x_4 = k, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}k+1 \\ \frac{1}{3}k+1 \\ -\frac{2}{3}k-1 \\ k \end{pmatrix}$$

$$= k\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= k\xi + \eta^*$$

为原非齐次线性方程组的通解。

## Example 8

求解线性方程组：

$$\begin{array}{ccccl} 2x_1 & +4x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 9 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = 6 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 7 \\ 2x_1 & +4x_2 & +x_3 & +x_4 & = 11 \end{array}$$

## 解.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_2]{r_1 - 2r_2, r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

□

**解.**

$$\xrightarrow[r_4+r_3]{r_1+3r_3,\, r_2-r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到等价含自由未知量方程:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - x_4 + 5 \\ x_3 &= x_4 + 1 \end{aligned}$$

$$x_2 = k_1, x_4 = k_2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k_1 - k_2 + 5 \\ k_1 \\ k_2 + 1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

□

**解.**

$$= k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由此可以得到特解和基础解系：

$$\eta^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

## Example 9

设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}$$

求数 $a$, 使得向量 $\beta$ 可以由向量 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性表示。

## 解.

设有线性表达式

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\beta$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}$$

□

**解.**

写出增广矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\2&2&a\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_2,\,r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&4&a\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$$

$$a=2\Leftrightarrow R(A)=R(B)=2=\text{未知量个数}$$

方程有唯一解:

$$x_1=x_2=\frac{1}{2},\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2=\beta.$$

## Example 10

设有齐次线性方程组

1.
$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & =0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & =0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n & =0 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{lllll} b_{11}x_1 & +b_{12}x_2 & +\cdots & +b_{1n}x_n & =0 \\ b_{21}x_1 & +b_{22}x_2 & +\cdots & +b_{2n}x_n & =0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1}x_1 & +b_{s2}x_2 & +\cdots & +b_{sn}x_n & =0 \end{array}$$

试证：（1）的解都是（2）的解，充要条件是：$R(A_1) = R\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$其中，$A_1$ 和 $A_2$ 分别是（1）和（2）的系数矩阵。

## Proof.

用矩阵表达齐次线性方程组：

$$A_1X=0\cdots\cdots(1),A_2X=0\cdots\cdots(2),$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} A_1X \\ A_2X \end{pmatrix}=0\cdots\cdots(3)$$

必要性，如果（1）的解都是（2）的解，则（1）的解也是（3）的解。从而（1）的解向量空间 $N(A_1)$是（3）的解向量空间 $N\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ 的子空间。因此有：

$$n-R(A_1)\leq n-R\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R(A_1)\geq R\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}\geq R(A_1),\therefore R(A_1)=R\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

## Proof.

充分性：假定矩阵的秩

$$R(A_1) = R\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

因为（3）的解必然是（1）的解，所以（3）的解空间$N\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$是（1）的解空间 $N(A_1)$ 的子空间。但是它们的维数相等：

$$n - R\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = n - R(A_1)$$

从而有

$$N(A_1) = N\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

□

**Proof.**

即（1）的解空间与（3）的解空间完全一样，或者（1）的解向量也是（3）的解向量。于是：

$$A_1X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}X=0$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}A_1X\\A_2X\end{pmatrix}=0\Rightarrow A_2X=0$$

所以（1）的解也是（2）的解。 □

## Example 11

已知齐次线性方程组：

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 0 \\
ax_1 & & +a^2x_3 & & = 0 \\
 & ax_2 & & +a^2x_4 & = 0
\end{array}
$$

的解满足 $x_1+x_2+x_3=0$, 求 $a$和方程组的通解。

## 解.

原方程记为 $AX=0, A$ 为系数矩阵。根据前面例子 10，应该有：

$$
R(A)=R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\a&0&a^2&0\\0&a&0&a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-a&a^2&-a\\0&a&0&a^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-a&a^2&-a\\0&0&a^2&a^2-a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-a&0&-a^2\\0&0&a^2&a^2-a\end{pmatrix}$$

$$a=0,R(A)=1;a\neq 0,R(A)=3$$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\a&0&a^2&0\\0&a&0&a^2\\1&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-ar_1}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-a&a^2&-a\\0&a&0&a^2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-a&a^2&-a\\0&0&a^2&a^2-a\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-a^2r_4]{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-a&0&-a^2\\0&0&0&2a^2-a\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-a&0&-a^2\\0&0&1&-1\\0&0&0&2a^2-a\end{pmatrix}$$

$$a=0,R(B)=2;a=\frac{1}{2},R(B)=3;a\neq 0,\frac{1}{2},R(B)=4$$

$$|B| = a^2(2a-1)$$

1. $a \neq 0, \frac{1}{2}, R(B) = 4 > R(A)$,不符合要求;
2. $a = 0, R(A) = 1 < R(B) = 2$,不符合要求;
3. $a = \frac{1}{2}, R(A) = R(B) = 3$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

因此有

$$\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{1}{2}x_4 \\ x_2 &= -\tfrac{1}{2}x_4 \\ x_3 &= x_4 \end{aligned}$$

$$\xi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

为基础解系，通解为：$X = k\xi$.

## Example 12

已知非齐次线性方程组：

1.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11 \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1 \end{cases}$$

问参数 $m, n, t$ 取何值时，两个方程同解。

## 解.

分别以矩阵形式表达这两个非齐次线性方程组：

$$A_1X = \beta_1, A_2X = \beta_2$$

## 解.

首先它们的导出齐次线性方程组也是同解，根据例10的结论，有：

$$R(A_1) = R\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = R(A_2)$$

为此，需要分别计算初等行变换：

$$\begin{pmatrix} A_1 & \beta_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} A_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} A_1 & \beta_1 \\ A_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

确定 $R(A_1), R(A_2), R(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix})$

我们统一在一个式子里，

$$\begin{pmatrix} A_1 & \beta_1 \\ A_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

前三行独立进行行变换，确定 $A_1$ 的秩 $R(A_1)$,后三行独立进行行变换，确定 $A_2$ 的秩 $R(A_2)$。与此同时，也可以得到各自的阶梯型同解方程。

**解.**

注意：前三行和后三行，各自独立进行行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & m & -1 & -1 & -5 \\ 0 & n & -1 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -t+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 7 & 25 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \\ 1 & m & 0 & -3 & -t-4 \\ 0 & n & 0 & -4 & -t-10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -t+1 \end{pmatrix}$$

□

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \\ 1 & m & 0 & -3 & -t-4 \\ 0 & n & 0 & -4 & -t-10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -t+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & m & 0 & -3 & -t-4 \\ 0 & n & 0 & -4 & -t-10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -t+1 \end{pmatrix}$$

由此可以看出，$R(A_1) = R(A_2) = 3$,因而必须有:

$$R\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & m & 0 & -3 \\ 0 & n & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & m & 0 & -2 \\ 0 & n & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2+m \\ 0 & 0 & 0 & -4+n \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2+m \\ 0 & 0 & 0 & -4+n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\because R\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 3, \therefore m = 2, n = 4$$

根据第一个非线性方程组的等价方程：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= x_4 - 2 \\ x_2 &= x_4 - 4 \\ x_3 &= 2x_4 - 5 \end{aligned}$$

得到方程（1）的通解（也是方程（2）的通解）：

$$x_4 = k, \eta = \begin{pmatrix} k-2 \\ k-4 \\ 2k-5 \\ k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

将（1）的特解，$m = 2, n = 4$带入方程组（2），求 $t$:

$$\begin{array}{ccccl} x_1 & +mx_2 & 0 & -3x_4 & = -t-4 \\ 0 & nx_2 & 0 & -4x_4 & = -t-10 \\ 0 & 0 & x_3 & -2x_4 & = -t+1 \end{array}$$

$$-2+2\times(-4) = -t-4$$

$$4\times(-4) = -t-10$$

$$-5 = -t+1 \Rightarrow t = 6$$

这样 $m=2, n=4, t=6$, 则两个非齐次线性方程组同解。

## Example 13

三个平面方程的解与平面位置关系：

$$\begin{aligned} L_1 &: a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + d_1 = 0 \\ L_2 &: a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + d_2 = 0 \\ L_3 &: a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + d_3 = 0 \end{aligned}$$

**解.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{pmatrix}$$

(1). $R(A) = 1$, 三个平面是平行平面。

1. $R(B) = 1$,三个平面重合，解无穷；
2. $R(B) = 2$,其中两个平面平行不重合，无解;
3. $R(B) = 3$, 不存在。

(2) $R(A)=2$, 其中有两个平面相交于一条直线，

1. $R(B)=2$, 三个平面相交于一条直线，解无穷
2. $R(B)=3$, 第三个平面平行于其中一个平面，三个平面交于两条平行直线，或者三个平面交于三条平行直线（三条直线两两在一个平面上），无解

(3) $R(A)=3 \Rightarrow R(B)=3$, 三个平面交于一个点，利用克莱姆法则求出一个唯一解。

## Example 14

求直线$L$ : $\begin{matrix} 2x+y+3=0 \\ 4x+y-z+5=0 \end{matrix}$ 的参数方程，并求直线 $L$ 与平面：$\pi : x+4y-z-4=0$的交点。

## 解.

求直线 $L$ 的参数方程，等价于求两个平面方程的公共解：

$$\begin{matrix} 2x+y=-3 \\ 4x+y-z=-5 \end{matrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}z - 1 \\ y = -z - 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - 1 \\ -t - 1 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

代入平面方程：$\pi : x + 4y - z - 4 = 0$

$$\frac{1}{2}z - 1 + 4(-z-1) - z - 4 = 0$$

$$z - 2 + 8(-z-1) - 2z - 8 = 0, -9z - 18 = 0, z = -2$$

$$x = -2, y = 1, M(-2, 1, -2)$$

为交点。

解法2：直接求三个平面方程的解：

$$\begin{array}{r} 2x+y=-3 \\ 4x+y-z=-5 \\ x+4y-z=4 \end{array}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -7 & 2 & -11 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & -18 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M(-2,1,-2)$$

为交点。

## Example 15

Suppose that:

$$AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是通解方程，求矩阵 $A$

分析：矩阵 $A$ 应该是 3 阶方阵，它的解空间的维数为 2, 所以秩为 1。

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A$的第一列应当为：$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. 又因为有：$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, $A$的第二列应该为：$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. 同理：$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, $A$的第三列应该为：$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 因此有：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Example 16**

Suppose that $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&2&1\\0&4&2\end{pmatrix}$分别求矩阵 $B$ 的解空间和列空间的基底和维数。

**解.**

Let $B=PA$, where

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&2&1\\0&4&2\end{pmatrix}$$

the matrix $P$ is invertible, hence $N(B)=N(A)$. Since $R(A)=2$, $\mathrm{Dim}(N(A))=1$. We have $\mathrm{Dim}(N(B))=1$ □

Let $B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}, V = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Then

$$\mathrm{Dim}(V) = R(B) = R(A) = 2$$

The invertible $P$ keep the same linear combination of column vectors of the matrix $B$ and $A$. The first and second column vectors of $A$ is linear independent, hence we choose the same column vectors of $B$ as basis:

$$\alpha_1 = P\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = P\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix},$$

**Example 17**

设矩阵 $A \neq 0$ 是一个方阵，是否存在一个非零向量 $\alpha$，同时在 $A$ 的解空间和行向量空间里？

**Example 18**

设矩阵 $A$ 是一个$5 \times 3$ 矩阵，秩为 3, 问 转置矩阵 $A'$ 的解空间的维数是多少？

## Example 19

Problem: 设矩阵 $A$ 经过一系列初等变换，化为矩阵$B$ 矩阵，它们的秩相等，问 它们的列向量组是否等价（即相互线性表示）？

分析：分初等行变换和初等列变换考虑：

1. 设矩阵 $A$ 经过初等行变换化为矩阵 $B$ ，它们的关系应该是：$B=PA$ 其中 $P$ 可逆。因为有：方程等价关系：

$$AX=0 \Leftrightarrow BX=PAX=0$$

所以 它们的列向量组都有相同的线性关系,秩就相等。但是矩阵 $B$ 的列向量组是 $P$ 的列向量组的线性组合，或者被 $P$ 的列向量组线性表示，不是被 $A$ 的列向量组线性表示.

2.

- 设矩阵 $A$ 经过初等列变换化为矩阵 $B$，它们的关系应该是：$B = AP$ 其中 $P$ 可逆. 此时，矩阵 $B$ 的列向量组是 $A$ 的列向量组的线性组合; 但是，又有$BP^{-1} = A$，所以矩阵 $A$ 的列向量组是 $B$ 的列向量组的线性组合; 两个矩阵的列向量组确实等价。

情况1 的反例：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E(1,4)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

结论：经过初等行变换，列向量组不一定等价；经过初等列变换，则列向量组等价。

谢 谢！