第六章 特征值与特征向量

【问题解答】

1. 特征值有什么结论需要记忆?

   答：首先是定义$A\alpha=\lambda\alpha$，注意！α必须是非零向量。定义在处理矩阵方程时会起到重要作用。

   其次是关于特征值和矩阵关系的两个结论：

   ①$|A|=\lambda_1\lambda_2...\lambda_n$(重根重复计算)

   ②$\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n=tr(A)$　　(A的迹：对角线元素之和)

再然后是关于特征值的运算性质：下设λ是A的特征值，ξ是对应λ的特征向量，则有以下结论成立：

①对任意常数c，有$c\lambda$是cA的特征值，ξ是cA的相对于$c\lambda$的特征向量

λ^c是A^c的的特征值，ξ是A^c的相对于λ^c的特征向量

换句话说，对矩阵进行数乘和乘方运算时，特征值也在进行对应运算，且特征向量保持不变。进而可以得到对矩阵进行多项式运算时，对特征值也在进行多项式运算。

②如果A可逆，则λ^{-1}是A^{-1}的特征值，ξ是A^{-1}的相对于λ^{-1}的特征向量

$\lambda^{-1}|A|$是A^*的特征值，ξ是A^*的相对于$\lambda^{-1}|A|$的特征向量

以上结论均可用特征值定义证明

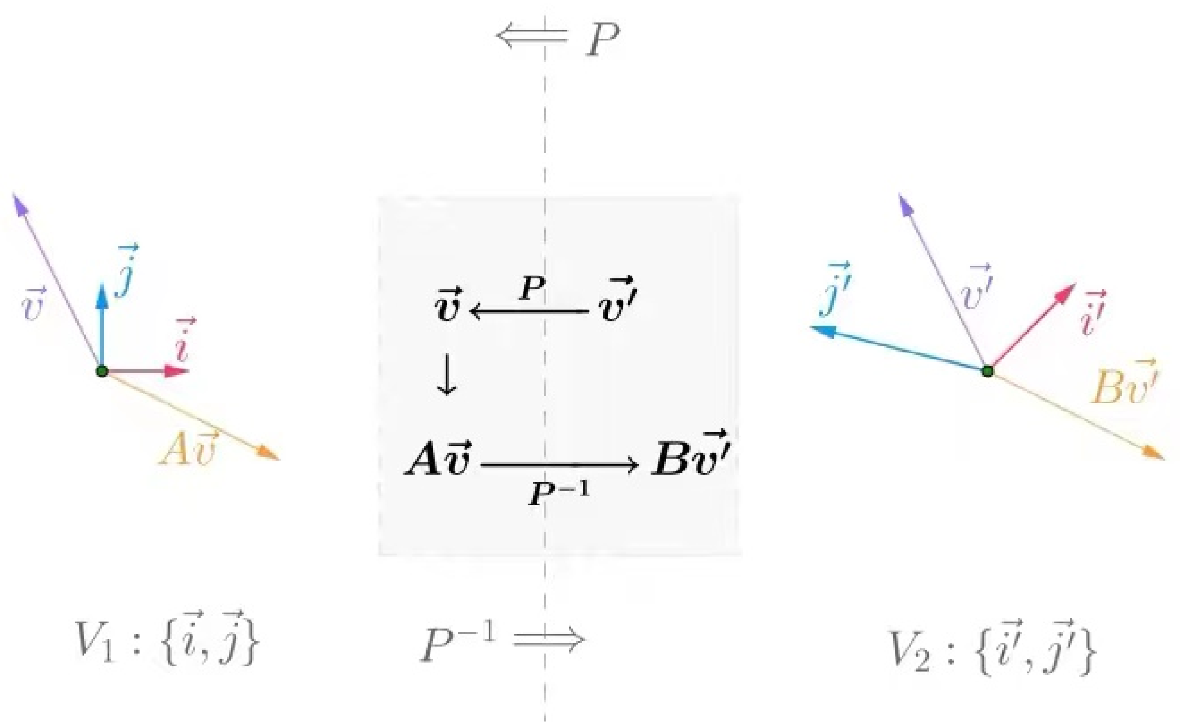
最后，对应于不同特征值的特征向量线性无关。

特别要指出的是，相同特征多项式说明特征值相同，但不代表特征向量也相同。例如A^T,A的特征多项式相同，但对同一特征值的特征方程$(\lambda E-A)X=0$的系数矩阵不同，解空间不一定相同，因此特征向量不一定相同。

2. 相似矩阵有什么直观理解吗?

答：这里贴个链接，解释的较为详细。https://zhuanlan.zhihu.com/p/31003468

首先要记住的是定义：A和B相似，则存在可逆矩阵$P, B = P^{-1}AP$，相似矩阵的秩、行列式、特征值、迹均相等（反之不一定成立）。下面我们通过一张图来解释相似矩阵为什么要这样定义：



图中的$\vec{i}, \vec{j}$是基向量，矩阵表示一种线性变换，即将一个向量α变成另一个向量β。B对空间的任意一个向量v'作用得到$Bv' = P^{-1}APv'$，我们对右边这一表达式从右边依次结合开始看。

Pv' :这是一个坐标变换。第四章中我们已经知道，若A到B的过渡矩阵为P，$\vec{v}$在A下的 坐标为X，在B下的坐标为Y,则有$Y = P^{-1}X$，或者说$X = PY$。

APv' :坐标变换到新基之后再用矩阵A对新坐标进行线性变换。

$P^{-1}APv'$:将变换后的结果再返回到原来的基上。

换句话说，相似矩阵的意思就是同一线性变换在不同基下的表示。

由此我们可以进一步谈谈为什么要对矩阵相似对角化。我们先看看对角矩阵是怎样一个线性变换：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \lambda_3 x_3 \end{bmatrix}$$

我们惊奇地发现对角矩阵做的是将坐标的每个分量乘对应的倍数，也就是对向量在各个方向做相应的延伸和缩短，而不涉及旋转等复杂操作。因此，如果我们将线性变换表示成对角矩阵的形式，对我们研究这个变换大有裨益！

3. 对角化及实对称矩阵

需掌握的定理：n阶方阵A可对角化当且仅当A有n个线性无关的特征向量

直观的理解是：对角矩阵的变换方式是对某一组基的每个向量乘上λ_i倍，因此可对角化就是能找到这样的基，而基是线性无关的，且满足$A\alpha=\lambda_i\alpha$，即为定理所描述的。

而实对称矩阵在这方面具有丰富的性质，我们需要记住以下几个：

①特征值都是实数，对应的特征向量都是实向量，且对应不同特征值的特征向量正交

②对每个特征值，对应特征方程$(\lambda E-A)X=0$的解空间维数为$n-R(\lambda E-A)$,因此可相似对角化。即==存在可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP=\Lambda,\Lambda$是由特征值构成的对角矩阵。由此可反求$A=P\Lambda P^{-1}$.容易看出，这对求A^n有极大的好处。

求解特征值和特征向量的步骤为：求特征多项式——解方程

实对称矩阵的相似对角化步骤为：算特征值——解特征值对应的方程得到n个线性无关的向量（如果题目不要求正交矩阵，可不施密特正交化和单位化），组成矩阵P即可。这也是一般矩阵的求解方法。

【典型例题】

【例1】设A为3阶矩阵，其特征值为1，-2，-1，求$|A|,A^*+3E$和$(A^{-1})^2+2E$的特征值。

解析：对特征值性质的考察。$|A|=1\times(-2)\times(-1)=2$

A^*+3E的特征值依次为$1\times2+3=5,\frac{1}{-2}\times2+3=2,\frac{1}{-1}\times2+3=1$

同样的道理可以计算得到$(A^{-1})^2+2E$的特征值为$3,\frac{9}{4},3$

这里要强调的是，关于特征值的计算要足够熟练

【例2】若n阶方阵A满足$A^2+2A-3E=0$，则矩阵A的特征值只能为（）

解析：设A的特征值为λ,可知$A^2+2A-3E$的特征值为$\lambda^2+2\lambda-3$，则有$(A^2+2A-3E)\alpha=(\lambda^2+2\lambda-3)\alpha=0$，由$\alpha$是非零向量有$\lambda^2+2\lambda-3=0$，可得到$\lambda=-3$或$1$

这里要说一下书写规范。在考试中应当这样书写（如果是解答题）

设A的特征值为λ,α是对应λ的特征向量，则有$(A^2+2A-3E)\alpha=(\lambda^2+2\lambda-3)\alpha=0$,又因为$\alpha$是非零向量，故有$\lambda^2+2\lambda-3=0$。

【例3】

(1)已知三阶矩阵A的特征值为3，2，-1，则A的行列式中主对角线上元素的代数余子式之和为__;

(2)设A为三阶矩阵，且其特征值为1，-2，-1，则$|A^2-A+E|=$_

(3)若三阶矩阵A的各行元素之和为-2，那么矩阵A必有特征值__，对应的特征向量为

解析：(1)所求实际上是$tr(A^*)$,实际上是求A^*的特征值之和。参见例1.答案为1

(2)方法不变。答案为21；

(3)条件等价于$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

因此有特征值-2，对应特征向量为$(1,1,1)^T$。

这里要指出的是第三问的条件转化，要学会将文字转换为符号！

【例4】设α,β都是n维非零向量，且$(\alpha,\beta)=3$，矩阵$A=\alpha\beta^T$，求A的所有特征值。

解析：复习一下降阶公式...

$|\lambda E-\alpha\beta^T|=\lambda^{n-1}|\lambda-\beta^T\alpha|=\lambda^{n-1}(\lambda-3)=0$，可得到全部特征值为$\lambda_1=...=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=3$

另外：设A的特征向量为ξ,考虑$A^2\xi$也是可以的。

这里要说的是：对$A=\alpha\beta^T$，我们考虑A^2可以得到$A^2=kA$。

【例5】

(1)设A为4阶实对称矩阵，$R(A)=3,R(A+2E)=2,R(A-2E)=4,$ 且$A^4+A^3-4A^2-4A=0$,那么矩阵的所有特征值为多少

(2)设A为3阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的三维列向量，已知 $A\alpha_1=\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3,A\alpha_2=-2\alpha_2+2\alpha_3,A\alpha_3=0$，那么A的所有特征值是多少

解析：**(1)0,-2,-2,-1;**

首先对方程进行化简得到$A(A+E)(A+2E)(A-2E)=0$,又$R(A-2E)=4$满秩，故可逆，两边右乘它的逆即有$A(A+E)(A+2E)=0$,从而A的特征值只可能是0，-1，-2，需要关注的是他们的重数。又A是实对称矩阵，因此每个特征值的几何重数=代数重数，即解空间维数 = 代数重数。由此，我们依次利用条件：

$R(A)=3$表明矩阵方程$AX=0$的解空间维数为$4-3=1$，故特征值0为1重，有一个线性无关的解

$R(A+2E)=2$表明矩阵方程$(A+2E)X=0$的解空间维数为$4-2=2$，故特征值-2为2重，有两个线性无关的解。

又由于实对称矩阵可对角化，应该还有一个线性无关的特征向量，故应有1重特征值-1.

这里要指出的是：满秩矩阵可逆，可以在矩阵方程中消去，实对称矩阵的性质需要熟练。

(2)1,-2,0;

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-2&0\\-3&2&0\end{bmatrix}$$

两边右乘$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}$可以看出A和右边的下三角矩阵相似，相似矩阵具有相同的特征值，并且三角矩阵的特征值为对角线上的元素，故答案为1，-2，0.

再次指出：学会熟练地将文字转换为数学符号。

【例6】设A为n阶方阵，且$A^2=2A$，证明A能对角化。

解析：重点在于找到n个线性无关的特征向量，当然我们要对特征值进行讨论，用例2类似的手法可以得到$\lambda=0$或2,因此我们考虑方程$AX=0,(2E-A)X=0$的解空间的情况。也就是要证明$n-R(A)+n-R(2E-A)=n$，也就是$R(A)+R(2E-A)=n$。因此本题主要考察秩不等式。

$$R(A)+R(2E-A)\geqslant R(A+2E-A)=n$$

又由条件得$A(A-2E)=0$,故有$R(A)+R(A-2E)\leqslant n$.从而命题得证。

[练习] n阶非零矩阵A有$A^m=0(m>1)$，证明A不能对角化。

【例7】下列矩阵在实数范围内可相似对角化的是（ ）

(A) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}3&2&0\\-2&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&4\\0&0&-2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

解析：答案选C

首先看A、C、D三个三角矩阵M，三角矩阵的特征值为对角线元素。

A.有三重特征值1,而$E-M$的秩为2,解空间维数为1,只有一个线性无关向量，不能对角化。

C.有三个互异特征值1，3，-2，必有3个线性无关的特征向量。故C可对角化

D.有特征值1，2，2.特征值2的代数重数为2，而$2E-M$的秩为2，解空间维数为1，只有一个线性无关的特征向量，不能对角化。

B.笔者没想到什么快的方法，只能算出特征值后判断解空间维数。

【例8】设A为n阶实矩阵，$AA^T=E,|A|<0$,求$(A^{-1})^*$的一个特征值

解析：条件$AA^T=E,|A|<0$可以立即得出$|A|=-1$，$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$，故只要找A的一个特征值，为此我们需要构造$\lambda E-A$的类似式子。

$\lambda E-A=\lambda AA^T-A=A(\lambda A^T-E)$,两边取行列式有$|\lambda E-A|=-|\lambda A^T-E|$，我们希望得到左边的行列式为0，为此，我们注意到$\lambda=-1$时右边的矩阵是左边的转置（A、E前的系数相同）。因此不难得到A的一个特征值为-1，从而所求可计算得1.

这里要指出的是：条件$AA^T=E,|A|<0$应引起关注，希望读者在之后做题中形成条件反射。

【例9】设$\alpha=(1,2,-1)^T,\beta=(-2,1,-2)^T,A=E-\alpha\beta^T$，求行列式$|A^2-2A+2E|$.

解析：本题参照例4可给出一种解法，这里要指出是另外一个常用结论。

首先计算得到$B=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ -4 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$,结论为，秩为1的矩阵B的特征值为$0,0,\ldots,0,tr(B)$，即B的特征值为$0,0,2$,由此可得到A的特征值为$1,1,-1$，从而得到所求矩阵特征值为$1,1,5$，进而有行列式为5

重申：秩为1的矩阵B的特征值为$0,0,\ldots,0,tr(B)$

证明如下：秩为1的矩阵可写成$\alpha\beta^T$，即列向量与行向量的乘积（原因在于，秩为1说明列向量组的极大无关组只有一个向量，其他向量都是它的常数倍。我们取这个列向量为α，而将常数组成一个行向量β^T，便可得到所要分解）。记$B=\alpha\beta^T$,则有$B^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=(\beta^T\alpha)\alpha\beta^T$，而$\beta^T\alpha$为$tr(B)$，移项不难得到B的特征值只可能是$0,tr(B)$，又所有特征值之和为$tr(B)$，因此只能有一个特征值是$tr(B)$，其它为0

【例10】已知n阶矩阵A满足$A^3=E$,证明A^2+A+2E可逆。

解析：咯咯咯特征值还能证明可逆性想不到吧...

只需证明0不是A^2+A+2E的特征值即可，设A的特征值为λ，由$A^3=E$知$\lambda=1$或$\lambda^2+\lambda+1=0$，而A^2+A+2E的特征值为$\lambda=1$或$\lambda^2+\lambda+2$，不可能为0.因此A^2+A+2E可逆。

这里要指出的是：特征值为λ说明$|\lambda E-A|=0$，即$\lambda E-A$不可逆，因此证明可逆只要证不是特征值即可。例如证明$E-A$可逆就只需证明1不是A的特征值即可。

【例11】设A=$\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量，求x和y应满足的条件

解析：$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，得$\lambda=1$是二重特征值，为满足条件，方程$(2E-A)X=0$的解空间维数为2，因此$R(2E-A)=1$,从而$2E-A$的所有2阶子式为0，找一个包含x、y的2阶子式即可，答案为$x+y=0$

【例12】设三阶实对称矩阵A的特征值为1，1，-1，并且$\alpha_1=(0,1,1)^T$是属于-1的特征向量，求A。

解析：典型的实对称矩阵性质问题。

属于二重特征值1的特征向量与$\alpha_1=(0,1,1)^T$都正交，故有$x_2+x_3=0$，因此x_1,x_3为自由未知量，取$(1,0),(0,1)$有线性无关向量$(1,0,0)^T,(0,-1,1)^T$,将三个向量组成矩阵可将A相似对角化。反求A即可。

答案为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$

这里要指出的是：$P^{-1}AP=\Lambda$不仅可以正向运用，也可反向求解A

【例13】证明：交换方阵A的第i,j两行，同时交换第i,j两列得到的矩阵B与A相似。

解析：考察相应变换的初等矩阵即可。

进一步我们有对A的第i行乘k倍，同时对第i列乘k^{-1}倍得到的矩阵B与A相似

还有将A的第i行乘k倍加到第j行，同时将A的第i列乘$-k$倍加到第j列得到的矩阵B与A相似。

————这为我们提供了用变换判定两个矩阵是否相似的思路

【例14】设A，B均为n阶方阵，若$A \sim B(\text{相似})$,求证：

(1)对任意自然数k和任意常数c，都有$cA \sim cB, A^k \sim B^k$

(2)若A，B均可逆，则有$A^{-1} \sim B^{-1}$

解析：只需用相似的定义$B = P^{-1}AP$,然后就是矩阵运算问题了

由这道题可以看出，当两个矩阵相似时，对其中一个进行多项式运算，对另一个进行同样的多项式运算仍然相似。

【例15】设A，B均为n阶方阵，若$A \sim B$，则有（）

(A)$\lambda E - A = \lambda E - B$　　(B)A, B具有相同的特征值和特征向量

(C)A, B都相似于同一个对角矩阵　　(D)对任意常数t，$tE - A \sim tE - B$

解析：答案选D

A.行列式相同，但矩阵不一定相同

B.特征值相同，特征向量不一定相同

C.不一定可以相似对角化

D.见例14

【例16】设矩阵$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$**,**$A\sim B$**,则**$R(A-2E)+R(A-E)$**是多少?**

解析：由例14可知，$A-2E\sim B-2E,A-E\sim B-E$，因此只需考察$R(B-2E)+R(B-E)$,计算得$R(B-2E)=3,R(B-E)=1$,因此答案为4.

【小结】

有关这一章的习题到这就告一段落了。对于这一章我们有要掌握的基本技能和要学会的做题技巧。基本技能包括求特征值，解方程组求特征向量，实对称矩阵的相似对角化。做题技巧在问题解答和典型例题中都有涉及。笔者更希望读者能够明白每道题所想表达的事实并从中加深对概念的理解。备考只是支线任务，理解知识并熟练运用才是我们的主要目的所在。