线性代数–习题解答

曾吉文

2022年 5 月

第一章 填空题

1 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA' = E, |A| < 0$, 则 $|A + E| =$

解.

$$
\begin{aligned}
|A+E| = |A+AA'| = |A||E+A'| &= |A||E+A| \\
|AA'| = |E| = 1, |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| &= -1 \\
|A+E| = -|A+E| \Rightarrow |A+E| &= 0
\end{aligned}
$$

□

2 若 4 阶行列式 D 的某一行的所有元素及其余子式都相等，则 $D=$

解.

设为第i 行:

$$a_{i1}=M_{i1}=a_{i2}=M_{i2}=a_{i3}=M_{i3}=a_{i4}=M_{i4}=a$$

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+a_{i4}A_{i4}=$$

$$a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}+a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2}+a_{i3}(-1)^{i+3}M_{i3}+a_{i4}(-1)^{i+4}M_{i4}$$

$$=a^2((-1)^{i+1}+(-1)^{i+2}+(-1)^{i+3}+(-1)^{i+4})=0$$

□

3 在一个 n 阶行列式中，如果等于零的元素多于 n^2-n 个，则这个行列式 $D=$

解.

设零元素个数为 s个，非零元素个数为 t 个，

$$s+t=n^2, s>n^2-n \Rightarrow n^2=s+t>n^2-n+t$$
$$n^2>n^2-n+t \Rightarrow t<n$$

把这 $t<n$ 个非零元素分配到每一行(n 行)，至少一行分不到非零元素，故全为零元素，所以$D=0$ □

或者考虑通项:

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

这个乘积有 n 项相乘，来自不同行列的元素，既然只有 $t(<n)$ 个非零元素，所以至少有一个零元，因此:

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=0$$

4 若 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵。如果 $m>n$，则 $|AB|=$

解.

$$AB: m\times m, \text{矩阵}, R(AB)\le R(A)\le n$$
$$m>n\ge R(AB)\Rightarrow |AB|=0$$

$\square$

5 若n阶方阵 A, B 满足 $AB = B, |A - E| \neq 0$, 则 $B =$

解.

$$AB = B \Rightarrow (A - E)B = 0, |A - E| \neq 0$$
$$\exists (A - E)^{-1} \Rightarrow B = 0$$

$\square$

6. 若n阶方阵 A, B 满足 $A + AB = E$, 则 $A + BA =$

解.

$$A + AB = E \Rightarrow A(E + B) = E$$
$$\Rightarrow (E + B)A = E \Rightarrow A + BA = E$$

□

7 若n 阶方阵 A, B, C 满足 $ABC = E$，则 $B'A'C' =$

解.

$$\begin{aligned} ABC = E \Rightarrow CAB &= E \\ B'A'C' &= E \end{aligned}$$

□

8 若 A, B 都是 n 阶方阵， $|A| = 1, |B| = -3$，则 $|3A^*B^{-1}| =$

解.

$$AA^* = |A|E \Rightarrow |A||A^*| = |A|^n \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1} = 1$$

$$|3A^*B^{-1}| = 3^n|A^*||B^{-1}| = 3^n \times \frac{1}{-3} = -3^{n-1}$$

□

9.若 n阶矩阵 A 满足： $|A|=0, A^*\neq 0$， 则 $R(A)=$

解.

$$\begin{aligned} |A|=0 &\Rightarrow R(A)<n \\ A^*\neq 0 &\Rightarrow \exists n-1 \text{ 阶代数余子式 } A_{ij}\neq 0 \\ R(A) &= n-1 \end{aligned}$$

□

10. 若 A, B 都是 n 阶方阵，$|A+B|=1, |A-B|=-2$，则
$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$

解.

$$\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=|A+B||A-B(A+B)^{-1}(B+A)|=-2$$

□

(P64,Example 16)

11. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则$(A^*)^{-1} =$

解.

$$|A| = 6, A^* = |A|A^{-1} \Rightarrow$$

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

□

12 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，如果 $|A|=a, |B|=b$，则 $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} =$

解.

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{vmatrix} \frac{r_{m+i}\text{往上移动}m\text{次}}{i=1,2,\dots,n} \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}, \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}ab$$

$\square$

13. 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$, 则 $(A-E)^{-1}=$

解.

$$A^2+A-4E=0 \Rightarrow A^2-2A+E+3A-5E=0$$

$$(A-E)^2+3(A-E)=2E \Rightarrow (A-E)(A+2E)=2E$$

$$(A-E)=2(A+2E)^{-1} \Rightarrow (A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E)$$

□

14. 设 A 为 3 阶方阵，A 的特征值为：$3,-1,2,\ |A^2+E|=$

解.

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow PA^2P^{-1}=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$P(A^2+E)P^{-1}=PA^2P^{-1}+E=\begin{pmatrix}10&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

$$|A^2+E|=100$$

□

15. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

则 $R(A)=$

解.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[i=1,2,3,4]{r_5+r_i}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+4 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_6+c_3,\, c_2+c_3,\, c_6+c_2,\, c_1+c_2]{c_6+c_5,\, c_4+c_5,\, c_6+c_4,\, c_3+c_4} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+4 \end{pmatrix}$$

$$R(A) = \begin{cases} 5, a \neq -4 \\ 4, a = -4 \end{cases}$$

16 已知 n 阶方阵 A 各行元素之和都是 0, 且 $R(A)=n-1$, 则 $AX=0$ 的通解为:

解.

$AX=0$ 的解向量为 n 维向量,根据已知条件

$$X_0=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}, AX_0=0.$$

$$R(A)=n-1, \text{基础解系含1个解向量}$$
$$X=kX_0(AX=0)$$

为通解方程。 □

17. 矩阵 $A_{m\times n}$ 满足 $m<n, |AA'|\neq 0$, 则 $AX=0$ 的基础解系一定由 ( ) 个线性无关的解向量组成。

解.

$$m=R(AA')\leq R(A)\leq m\Rightarrow R(A)=m$$

$$\mathrm{Dim}(N(A))=n-m, N(A)=\left\{X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\middle|AX=0\right\}$$

$n-m$ 个线性无关的向量构成基础解系。 □

18. 若矩阵 A 满足 $A^3 = A$，则矩阵 A 的特征值只能是 ( )

解.

$$f(\lambda) = |\lambda E - A|$$

$$A^3 = A \Rightarrow \lambda^3 = \lambda$$

$$\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$f(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 0, 1, -1$$

19. 如果 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是方阵：$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量，则$a = \underline{(\ )}, b = \underline{(\ )}$。

解.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$k = -1, 5 + a - 3 = k, -1 + b + 2 = -k$$

$$a = -3, b = 0$$

□

20.已知矩阵 A 与 B 相似，且 $B=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}$，则 $|\lambda A^2-A|=$ ( )

解.

$$PAP^{-1}=B, PA^2P^{-1}=B^2$$

$$P(\lambda A^2-A)P^{-1}=\lambda B^2-B=\lambda\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\lambda-1&0\\2\lambda&\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9\lambda-3&0\\8\lambda-2&\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda A^2-A|=3(\lambda-1)(3\lambda-1)$$

21. 已知 方阵$A_{3\times 3}$ 的特征值为 $1,2,3$，则$|A^{-1}+A^{*}|=$( )

解.

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},PA^{-1}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{-1}&0\\0&0&3^{-1}\end{pmatrix}$$

$$A^{*}=|A|A^{-1},PA^{*}P^{-1}=|A|PA^{-1}P^{-1}=|A|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{-1}&0\\0&0&3^{-1}\end{pmatrix}$$

$$PA^{*}P^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix},|A|=6$$

□

$$P(A^{-1}+A^*)P^{-1}=PA^{-1}P^{-1}+PA^*P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{-1}&0\\0&0&3^{-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&2^{-1}+3&0\\0&0&3^{-1}+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&\frac{7}{2}&0\\0&0&\frac{7}{3}\end{pmatrix}$$

$$|A^{-1}+A^*|=\frac{7^3}{6}$$

22. 已知 2 是矩阵 A 的一个特征值，则 $|A^2+A-6E| = \underline{(\ \ )}$

解.

$$A^2+A-6E=(A+3E)(A-2E)\Rightarrow$$
$$|A^2+A-6E|=|(A+3E)||(A-2E)|=0$$

$\square$

23. 设 α, β是 n 维列向量，$\beta'\alpha = 0$. 则 $\alpha\beta'$ 的特征值为：$\underline{(\ )}$

解.

根据第二章第8节，例17，矩阵行列式的降阶公式：

$$|\lambda E - \alpha\beta'| = \lambda^{n-1}|\lambda - \beta'\alpha| = \lambda^n$$

$\alpha\beta'$ 的特征值为：$\underline{(0)}$ □

24. 若n 阶方阵 A 的列向量组线性相关，则 $\underline{(\ )}$ 一定是A 的特征值。

解.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, R(A) < n$$

$$\exists K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \neq 0, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

$$AK = 0, AK = 0K,$$

0 一定是A 的特征值。 □

25. 直线$\left\{\begin{array}{c} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}$的单位方向向量为：

解.

$$\mathbf{s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 10 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=8j+8k=8(j+k),\mathbf{s_1}=(0,1,1)$$

$$\mathbf{s_0}=\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$$

为单位方向向量。 □

26. 已知

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \\ 8 & 1 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}$ 是第 4 行的代数余子式，则$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \underline{(\ \ )}$。

解.

第一章定理1.2，1.3，

$$a_{21}A_{41}+a_{22}A_{42}+a_{23}A_{43}+a_{24}A_{44} = 0 \Rightarrow 4(A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}) = 0$$

$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \underline{(0\ \ )}$。 □

27. 设A 是 3 阶方阵，X 是 3 维列向量，使得 X, AX, A^2X 线性无关：且 $A^3X = 3AX - 2A^2X$，记：$P = \begin{pmatrix} X & AX & A^2X \end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP = \underline{(\ )}$

解.

$$AP = \begin{pmatrix} AX & A^2X & A^3X \end{pmatrix}$$
$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} P^{-1}X & P^{-1}AX & P^{-1}A^2X \end{pmatrix} = E$$
$$P^{-1}X = e_1, P^{-1}AX = e_2, P^{-1}A^2X = e_3$$

$\square$

解.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} P^{-1}AX & P^{-1}A^2X & P^{-1}A^3X \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A^3X = 3P^{-1}AX - 2P^{-1}A^2X = 3e_2 - 2e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\square$

28. 若两个非零向量 α,β 满足 $|\alpha+\beta|=|\alpha-\beta|$，则 α 与 β 的夹角 $\theta=$ _( )_

解.

$$|\alpha+\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}=|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta,\alpha-\beta)}$$
$$(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha-\beta,\alpha-\beta)$$
$$2(\alpha,\beta)=-2(\alpha,\beta)\Rightarrow(\alpha,\beta)=0$$
$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

□

29 直线$L:\begin{cases} x+2y-z-6=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$的参数方程为:

解.

$$s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=i-3j-5k,(0,7,8)$$

$$\frac{x}{1}=\frac{y-7}{-3}=\frac{z-8}{-5}\Rightarrow,x=t,y=7-3t,z=8-5t$$

□

30. 圆：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0 \\ 2x+2y+z+1=0 \end{cases}$ 的半径是：R

解.

球面的标准方程为：

$$\begin{aligned} & x^2-12x+y^2+4y+z^2-6z+24 \\ =& (x-6)^2+(y+2)^2+(z-3)^2+24-36-4-9=0 \\ & (x-6)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25 \end{aligned}$$

经过球心$M_0(6,-2,3)$与平面垂直的直线 L，与平面$\pi:2x+2y+z+1=0$的交点$M(x,y,z)$为圆心，所以需要求出点M.

$$L:\frac{x-6}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{1}$$

$$L:x=2t+6,y=2t-2,z=t+3$$

解.

将上述直线参数方程代入平面L方程：

$$2(2t+6)+2(2t-2)+t+3+1=0$$
$$9t+12=0, t=-\frac{4}{3}$$
$$M: x=-\frac{8}{3}+6=\frac{10}{3}, y=-\frac{8}{3}-2=-\frac{14}{3}, z=-\frac{4}{3}+3=\frac{5}{3}$$
$$M(\frac{10}{3},-\frac{14}{3},\frac{5}{3}), \overrightarrow{MM_0}=(6-\frac{10}{3},-2+\frac{14}{3},3-\frac{5}{3})$$
$$\overrightarrow{MM_0}=(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4}{3})$$

设圆半径应该为r：则有

$$r^2+|\overrightarrow{MM_0}|^2=25$$

$$r^2 = 25 - ((\frac{8}{3})^2 + (\frac{8}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2)$$
$$= 25 - (\frac{128}{9} + \frac{16}{9}) = 25 - \frac{144}{9} = 25 - 16 = 9$$
$$r = 3$$

圆的半径为 3.

第二 选择题

1. 设n 元齐次线性方程组 $AX = 0$ 的系数矩阵 A 的秩$R(A) = r$, 则 $AX = 0$ 有非零解的充分必要条件是:

1. $r = n$
2. A 的行向量组线性无关;
3. A 的列向量组线性相关;
4. A 的列向量组线性无关;

解.

let $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0, AX_0 = 0 \Leftrightarrow x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

选择C □

2. A 是 $m \times n$ 矩阵，$AX=0$ 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是：

1. 若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=\beta$ 有唯一解;
2. 若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=\beta$ 有无穷多解;
3. 若 $AX=\beta$ 有无穷多解，则 $AX=0$ 有非零解，
4. $AX=\beta$ 的任何两个解的和，还是 $AX=\beta$ 的解。

解.

选择（3）.

(1) 错，$AX=\beta$ 未必有解；（2）错，$AX=\beta$ 未必有解；（3）对，两个解的差是$AX=0$ 的非零解；（4）错

□

关于（1），举例说明一下：取矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $AX=0$只有零解。取 $\beta=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $AX=\beta$ 无解。

注意：线性方程组有解，导出组有解，是两件事情，不能相互导出。

3. 设非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的系数矩阵的行列式值 $|A|$ 为零，则

1. 方程组有无穷多解；
2. 方程组无解；
3. 若方程组有解，方程组必有无穷多解；
4. 方程组有唯一解

解.

选择（3）.

$|A|=0 \Rightarrow AX=0$ 有无穷解，若 $AX=\beta$ 有解，必有无穷多解；

选择 C。 □

4. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，对于线性方程组 $AX = \beta$ ，下列结论正确的是：

1. 若A 的秩:$R(A) = m$, 则方程组有解；
2. 若A 的秩$R(A) < n$, 则方程组有无穷多解；
3. 若A 的秩$R(A) = n$, 则方程组有唯一解；
4. 若 $m > n$ 则方程组无解。

解.

(1)对的。设 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$，关键是判断：$\beta$ 可否由A的列向量组线性表示。因为 $R(A) = m \Rightarrow m \leq n$, 从而列向量组的秩等于 m, 所以 $R^m = L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ，故$\beta \in R^m$ 可以被他们线性表示，即 $AX = \beta$ 有解。
其它情况的反例，考虑 $m = 3, n = 2$ 即可。 □

5. 设 5 阶方阵 A 的秩是 3 ，则其伴随矩阵 A^*的秩是

1. 3
2. 4
3. 0
4. 2

解.

选择 （3）.
A 的秩是 3 ,所有4阶子式为零， A^*的秩是 0.
注意： A^* 的元素是 A 的 $n-1$ 阶代数余子式。 □

6. 设 A 是 n 阶方阵，$n > 2, A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则下列结论正确的是：

1. $AA^* = |A|$
2. 若 $|A| \neq 0$，则 $|A^*| \neq 0$
3. $A^* = \frac{1}{|A|}A^{-1}$
4. $R(A) = R(A^*)$

选择 B

解.

$$AA^* = |A|E \Rightarrow |AA^*| = |A|^n, |A| \neq 0, |A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$$

□

7.设 A, B 是 n 阶方阵,且 $A \neq 0, AB = 0$，则必有：

1. $B = 0$
2. $BA = 0$
3. $(A + B)^2 = A^2 + B^2$
4. $|B| = 0$

解.

选择（4）.

$$|B| = 0, \text{否则，} \exists B^{-1}, AB = 0 \Rightarrow A = 0$$

□

8. 设有两个平面方程:

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

如果$R\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$,则

1. π_1 与 π_2 平行;
2. π_1 与 π_2 垂直;
3. π_1 与 π_2 重合;
4. π_1 与 π_2 相交。

解.

排除平行，重合，只能是相交或垂直，但垂直包含在相交情况，所以选择D。 $\square$

9. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，λ 是A的一个特征值，则A的伴随矩阵 A^*的一个特征值是：

1. λ^{n-1}
2. $\lambda|A|$
3. λ
4. $\lambda^{-1}|A|$

解.

$$|\lambda E-A|=0,|A|\neq 0,\lambda\neq 0$$

$$0=|\lambda AA^{-1}-A|=|\lambda A||A^{-1}-\lambda^{-1}E|,|A^{-1}-\lambda^{-1}E|=0$$

$$|A^*-\lambda^{-1}|A|E|=||A|A^{-1}-\lambda^{-1}|A|E|=|A|^n|A^{-1}-\lambda^{-1}E|=0$$

$$|\lambda^{-1}|A|E-A^*|=(-1)^n|A^*-\lambda^{-1}|A|E|=0$$

$\lambda^{-1}|A|$是 A^* 的特征值，选择（4）

解法2：A 可逆，特征值 $\lambda \neq 0$, λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值。根据：$A^* = |A|A^{-1}$, 得到 $\lambda^{-1}|A|$ 是 A^* 的特征值。 选择 （4）.

10. n阶方阵 A 有 n 个不相同的特征值，是 A 与对角矩阵相似的：

1. 充分必要条件；
2. 充分而非必要条件；
3. 必要而非充分条件；
4. 既非充分条件也非必要条件；

选择（2）。其它情况的反例：对角矩阵的对角线元素可以相同，构成该对角矩阵的特征值。

11. 已知n 阶方阵 A 与某对角矩阵相似,则:

1. A有 n 个不同的特征值;
2. A是 n 阶实对称矩阵;
3. A有 n 个线性无关的特征向量;
4. A 的属于不同特征值的特征向量一定正交。

解.

选择 C。 相似的定义:$P^{-1}AP = D$是对角矩阵,只能说明 D 是对称的。注意:矩阵 P 的 n 个列向量就是 A 的n 个线性无关的特征向量。 $\square$

12. 下列说法正确的是:

1. 若有全不为零的数: $k_1, k_2, ..., k_m$, 使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_m\alpha_m = 0$,则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$线性无关;
2. 若有一组不全为零的数: $k_1, k_2, ..., k_m$, 使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_m\alpha_m = 0$,则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$线性无关;
3. 若存在一组数: $k_1, k_2, ..., k_m$, 使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_m\alpha_m = 0$,则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$线性无关;
4. 任意4个3维几何向量一定线性相关。

解.

1.说明线性相关; 2. 说明线性相关; 3.说明不了什么; 选择D □

13. 设矩阵 A, B 是 n 阶方阵。若对任意 n 维向量 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ，有 $X'AX = X'BX$ ，则下列结论正确的是：

1. 若$R(A) = R(B)$, 则$A = B$
2. 若$A' = A$, 则 $B' = B$
3. 若$B' = B$, 则 $A = B$
4. 若 $A' = A$, $B' = B$, 则 $A = B$

解答：

$$X_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, X_n = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ae_j = A\text{的第}j\text{列}, e_iA = A\text{的第}i\text{行}, e_iAe_j = a_{ij}$$
$$\Rightarrow X_i'AX_i = X_i'BX_i \Rightarrow a_{ii} = b_{ii}, i = 1, 2, ..., n$$
$$\text{take} : X_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_{12}'AX_{12} =$$
$$\begin{pmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \cdots & a_{1,n-1}+a_{2,n-1} & a_{1n}+a_{2n} \end{pmatrix} X_{12}$$
$$X_{12}'AX_{12} = a_{11} + a_{21} + a_{12} + a_{22}$$
$$X_{12}'BX_{12} = b_{11} + b_{21} + b_{12} + b_{22}$$
$$A = A', B = B', \Rightarrow a_{12} = b_{12} = a_{21} = b_{21}$$

$$\text{In general, take:} X_{ij} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, X'_{ij}AX_{ij} = a_{ii} + a_{ij} + a_{jj} + a_{ji}$$

$$X'_{ij}BX_{ij} = b_{ii} + b_{ij} + b_{jj} + b_{ji}, A = A', B = B'$$

$$\Rightarrow a_{ij} = b_{ij} = a_{ji} = b_{ji}, A = B$$

正确答案是 D。

14. 设矩阵 A, B 均为 n 阶正定矩阵，则必有：

1. AB 正定；
2. A^2+B 正定；
3. $A-B$ 正定；
4. kA 正定。

解.

2 正确。注意：正定矩阵为实对称矩阵。$AB, A-B$，不一定对称。$AB=BA$时，AB 对称，此时，1也是正确的

$$\exists P, P'P=E, P'AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}, \lambda_i>0, i=1,2,\dots,n$$

□

$$P'A^2P=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2\end{pmatrix},\lambda_i>0,i=1,2,...,n$$

$$X\neq 0,X'A^2X>0,X'BX>0$$

$$\Rightarrow X'(A^2+B)X=X'A^2X+X'BX>0$$

$$A^2+B\text{ 是正定矩阵}$$

$$P'P=E\Rightarrow PP'=E,P'ABP=P'APP'BP$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P'BP$$

$$B \text{ 正定} \Rightarrow P'BP = C = (c_{ij}) \text{ 正定}$$

$$P'ABP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} C$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_1 c_{12} & \cdots & \lambda_1 c_{1n} \\ \lambda_2 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & \cdots & \lambda_2 c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n c_{n1} & \lambda_n c_{n2} & \cdots & \lambda_n c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 c_{11} > 0, \begin{vmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_1 c_{12} \\ \lambda_2 c_{21} & \lambda_2 c_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots,$$

$$D_i = \begin{vmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_1 c_{12} & \cdots & \lambda_1 c_{1i} \\ \lambda_2 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & \cdots & \lambda_2 c_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i c_{i1} & \lambda_i c_{i2} & \cdots & \lambda_i c_{ii} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=1,2,...,i} \lambda_k \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1i} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ii} \end{vmatrix} > 0, i = 1, 2, ..., n$$

$$(AB)' = B'A' = BA = AB, \text{正定矩阵}$$

关于（1）反例：取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$,都是正定矩阵，但是

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}\neq(AB)'=BA=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$$

15. 设 A 是 n 阶方阵，$A^2 = E$, 则：

1. A为正定矩阵；
2. A 为正交矩阵；
3. $(A^*)^2 = E$
4. $\mathrm{Tr}A = n^2$

解.

注意：正交矩阵是实的方矩阵：$P'P = E$

$$A^* = |A|A^{-1}, (A^*)^2 = |A|^2A^{-2} = E$$

3 正确。 □

16. A, B 是 n 阶方阵，下列结论中错误的是：

1. 若 A, B 都可逆，则 $A'B^*$ 也可逆；
2. 若 A, B 都是实对称正定矩阵，则 $A+B^{-1}$ 也是实对称正定矩阵;
3. 若A, B都是正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵；
4. 若A, B都是实对称矩阵, 则 AB 也是实对称矩阵；

解.

4 错误

$$A = A', B = B', (AB)' = B'A' = BA \neq AB$$

□

其它情况解答：

1. 若 A, B 都可逆，则 $|A| \neq 0, |B| \neq 0, |A'B^*| = |A||B|^{n-1} \neq 0$, $A'B^*$ 也可逆；
2. 若 A, B 都是实对称正定矩阵，则 B^{-1}是实对称正定矩阵，于是$A + B^{-1}$ 也是实对称正定矩阵;
3. 若A, B都是正交矩阵, 则 $(AB)'AB = B'A'AB = E$, AB 也是正交矩阵；

17. A, B 是 n 阶方阵，下列结论中错误的是：

1. 若 A 经过列的初等变换化为 B，则 $R(A) = R(B)$ ；
2. 若 可逆矩阵A 经过行的初等变换化为 B，则 $A^{-1} = B^{-1}$;
3. 若 矩阵A 经过行的初等变换化为 B，则 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解;
4. 若A经过列的初等变换化为 B, 则 A 的列向量组与B 的列向量组等价;

解.

1正确，因为初等变换不改变矩阵的秩。

2.错误

3.正确，因为初等行变换不改变方程的解。

$$4.B = AC, |C| \neq 0 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, B = AC$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \sum_{k=1,\dots,n} c_{k1}\alpha_k,$$

$$\beta_2 = \sum_{k=1,\dots,n} c_{k2}\alpha_k$$

$$\cdots\cdots$$

$$\beta_n = \sum_{k=1,\dots,n} c_{kn}\alpha_k$$

由此得到：B 的列向量可以由 A 的列向量线性表示；

$$B = AC \Rightarrow A = BC^{-1}$$

同理可得，A 的列向量可以由 B 的列向量线性表示；则 A 的列向量组与B 的列向量组等价；4 是正确答案。

注意：矩阵 AC 的列是矩阵 A 的列的线性组合，组合系数来自于矩阵 C 的列元素。

18. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$$

和

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

则必有

1. $AP_1P_2=B$;
2. $AP_2P_1=B$;
3. $P_1P_2A=B$;
4. $P_2P_1A=B$;

解答：3 正确。本题考察矩阵 A 经过什么样的初等变换，变成矩阵 B。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \frac{r_3+r_1}{P_2A=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$$

$$\frac{r_1 \leftrightarrow r_2}{P_1P_2A=} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix} = B$$

19. 若矩阵 A 与 B 相似，则有

1. $\lambda E - A = \lambda E - B$
2. $|\lambda E + A| = |\lambda E + B|$
3. $A^* = B^*$
4. $A^{-1} = B^{-1}$

解.

2 正确。

直接计算：

$$\begin{aligned} B = P^{-1}AP \Rightarrow |\lambda E + B| &= |\lambda E + P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(\lambda E + A)P| = |\lambda E + A| \end{aligned}$$

$\square$

20. 若 $A^2=E$ ，则：

1. $A+E$ 可逆；
2. $A-E$ 可逆；
3. $A+E=0$ 或者 $A-E=0$;
4. 当$A\neq E$, 则 $A+E$ 不可逆；

解.

$$A^2=E\Rightarrow(A-E)(A+E)=0$$
$$A-E\neq 0\Rightarrow A+E\ \text{不可逆}$$

4 正确。

21. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 A 与 B

1. 合同且相似;
2. 合同不相似;
3. 不合同但相似;
4. 不合同且不相似;

解.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

解.

$$
= \begin{vmatrix} \lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4 \\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (\lambda-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (\lambda-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda-4)
$$

$$
|\lambda E - A| = |\lambda E - B| = \lambda^3(\lambda-4)
$$

存在正交矩阵P

$$\lambda = 4, 0, 0, 0;$$

$$P'P = E, P'AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

选择1，合同且相似。

22. 实二次型 $f = X'AX$ 为正定二次型的充分必要条件是：

1. f 的负惯性指数为 0；
2. 存在正交矩阵 $P, A = P'P$
3. 存在实可逆矩阵 $T, A = T'T$
4. 存在矩阵 $B, A = B'B$

解.

1. 错误。标准型的系数有正，负和零，不为零的系数为矩阵的秩 $R(A) \leq n$. 4. 不准确。 2. 不对，此时$A = P'P = E$。3. 对。解释如下：

$$P'P = E, P'AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$\lambda_i > 0, i = 1, 2, ..., n$$

$$P'AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = CC'$$

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$A = PCC'P' = PC(PC)', T = (PC)'$$

$$A = T'T$$

23. 设 B 是 $m\times n$ 实矩阵，$A=B'B$， 下列结论中错误的是：

1. 线性方程组 $BX=0$ 只有零解,当且仅当 A 正定;
2. $R(A)=R(B)$;
3. A 的特征值大于等于零;
4. $R(B)=m\Leftrightarrow A$ 正定。

解答：对于 1：

$$\begin{aligned} BX=0\text{ 只有零解}&\Leftrightarrow X\neq 0, BX\neq 0\\ f(X)\text{ 正定 }&\Leftrightarrow X\neq 0, f(X)>0\\ X\neq 0, f(X)=X'AX=X'B'BX=(BX)'BX>0&\\ &\Leftrightarrow X\neq 0, BX\neq 0 \end{aligned}$$

所以 1 是对的。

对于2，我们说明 $AX=0, BX=0$ 是同解方程：

$$
\begin{aligned}
A=B'B, AX=0 \Rightarrow B'BX=0, X'B'BX=0 \\
\Rightarrow (BX)'BX=0 \Rightarrow BX=0 \\
BX=0 \Rightarrow B'BX=0, AX=0 \\
\therefore AX=0 \Leftrightarrow BX=0 \\
n-R(A)=n-R(B) \Rightarrow R(A)=R(B)
\end{aligned}
$$

2 是对的

对于3:

$$f(X) = X'B'BX = (BX)'BX \geq 0$$
$$\Leftrightarrow A \text{ 的特征值大于等于零}$$

3 是对的。

4 是错误答案。反例：取

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, A = B'B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$f(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2$$

非正定。

24. 设 A 是 n 阶方阵，若 $|A| = a \neq 0$ ，则 $|A^*A^{-1}| = \underline{()}$

1. a
2. $\frac{1}{a}$
3. a^{n-2}
4. a^n

解.

$$A^* = |A|A^{-1} \Rightarrow |A^*A^{-1}| = |aA^{-1}A^{-1}| = a^n|A|^{-2} = a^{n-2}$$

选择 3. □

25 设 A, B 是 n 阶矩阵，则必有 $\underline{()}$

1. $|A+B^{-1}| = |A| + |B^{-1}|$
2. $(A+B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$
3. $(AB)^2 = B^2A^2$
4. $|A'B| = |BA|$

解.

$$|A'B| = |A'||B| = |A||B| = |B||A| = |BA|$$

□

选择 4.

26. 已知 η_1, η_2 是线性方程组 $AX=\beta$的两个特解，ξ_1, ξ_2 是对应齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系。设 k_1, k_2 是任意两个常数，则线性方程组$AX=\beta$ 的通解是:

1. $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\frac{\eta_1-\eta_2}{2}$
2. $k_1\xi_1+k_2(\xi_1+\xi_2)+\frac{\eta_1+\eta_2}{2}$
3. $k_1\xi_1+k_2(\eta_1-\eta_2)+\eta_1$
4. $k_1\xi_1+k_2(\eta_1-\eta_2)+\eta_1+\eta_2$

解.

$$A(\xi_1+\xi_2)=0, \xi_1, \xi_1+\xi_2 \text{ 线性无关}$$

$$A(\frac{\eta_1+\eta_2}{2})=\frac{A\eta_1+A\eta_2}{2}=\frac{\beta+\beta}{2}=\beta$$

选择 2. □

27 设有直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 和 $L_2: \begin{cases} x - y = 6 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$，则 L_1, L_2 的夹角为 $\underline{()}$

1. $\frac{\pi}{6}$
2. $\frac{\pi}{4}$
3. $\frac{\pi}{3}$
4. $\frac{\pi}{2}$

解.

$$s_1 = (1, -2, 1), s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -i - j + 2k$$

$$\cos\theta = \frac{(s_1, s_2)}{|s_1||s_2|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$$

28. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是 4 维列向量,

$$|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1| = m, |\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3| = n$$

则四阶行列式 $|\alpha_3\alpha_2\alpha_1(\beta_1+\beta_2)| = ()$

1. $m+n$
2. $-(m+n)$
3. $m-n$
4. $-m+n$

解.

选择（4）

$$\begin{aligned}|\alpha_3\alpha_2\alpha_1(\beta_1+\beta_2)| &= |\alpha_3\alpha_2\alpha_1\beta_1| + |\alpha_3\alpha_2\alpha_1\beta_2| \\ &= -|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1| - |\alpha_3\alpha_2\beta_2\alpha_1| \\ &= -|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1| + |\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3| = n-m\end{aligned}$$

29. 设 A 为 $n>2$ 阶矩阵，则

1. $(A^*)^* = |A|^{n-1}A$
2. $(A^*)^* = |A|^{n+1}A$
3. $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$
4. $(A^*)^* = |A|^{n+2}A$

解答：3 正确。

$$AA^* = |A|E, A^*(A^*)^* = |A^*|E$$

- A 可逆，

$$A^* = |A|A^{-1}, (A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A^*||A|^{-1}A = |A|^{n-2}A$$

- $R(A) \leq n-1, |A| = 0, AA^* = 0 \Rightarrow R(A) + R(A^*) \leq n$

$$R(A)=n-1 \Rightarrow R(A^*)\leq 1 \Rightarrow (A^*)^*=0$$
$$R(A)<n-1 \Rightarrow A^*=0 \Rightarrow (A^*)^*=0$$

30 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 的秩为 3, 则直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$

1. 相交于一点;
2. 重合
3. 平行不重合
4. 异面

解答:

$$s_1=(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$$
$$s_1=(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)$$
$$\overrightarrow{M_1M_2}=(a_3-a_1,b_3-b_1,c_3-c_1)$$

解答：

$$\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

s_1, s_2 不平行，B，C 不对

$$[s_1 s_2 \overrightarrow{M_1M_2}] = \begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix} = 0$$

两条直线共面，交于一点。正确答案为 A。

三. 计算题

1 Suppose that $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 A^5 及 $|A|^{10}$.

解.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda+1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda+1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

解.

$$=\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & \lambda+1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda+1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda+1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda+1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda+2 & 2 \\ 2 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2((\lambda+2)^2-4) = \lambda^3(\lambda+4)$$

$$\lambda_1 = 0, m_0 = 3; \lambda_2 = -4, m_{-4} = 1$$

以下求正交矩阵 P，使得 $P'AP$ 为对角矩阵。 □

$$\lambda = 0, (\lambda E - A)X = -AX = 0, AX = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_2 + x_3 - x_4$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\eta_1 = \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \xi_2 - \frac{(\xi_2, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)}\eta_1$$

$$\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\eta_3 = \xi_3 - \frac{(\xi_3, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)}\eta_1 - \frac{(\xi_3, \eta_2)}{(\eta_2, \eta_2)}\eta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

解.

$$P_1=\frac{\eta_1}{|\eta_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},P_2=\frac{\eta_2}{|\eta_2|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \sqrt{\frac{2}{3}}\\ 0\end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$\lambda=-4,(\lambda E-A)X=0,(4E+A)X=0$$

$$4E+A=\begin{pmatrix}3&1&1&-1\\1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\-1&1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&4&4&8\\0&4&0&4\\0&0&4&4\\-1&1&1&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0&1&1&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\-1&1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\-1&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

解.

$$x_1 = x_4, x_2 = -x_4, x_3 = -x_4, \xi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{pmatrix}, P'P = E, P'AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P' =$$

解.

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P'$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}^5 P'$$

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-4)^5 \end{pmatrix} P'$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (-4)^5 P_4 \end{pmatrix} P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (-4)^5 P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{pmatrix}$$

$$= (-4)^5 P_4 P_4' = (-4)^5 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= (-4)^4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

解.

$$= (-4)^4 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = 2^8 A, |A|^{10} = 0$$

□

2.设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 问:

1. a,b,c 满足什么条件时, A 的秩是 3;
2. a,b,c 取何值时, A 是对称矩阵;
3. a,b,c 取一组值, 使得 A 是正交矩阵;

解.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=-(\frac{a}{2}-bc)$$

$$R(A)=3\Leftrightarrow|A|\neq 0\Leftrightarrow\frac{a}{2}-bc\neq 0$$

$$a=1,b=0,c=0,A\text{ 对称。}$$

解.

$$ac+\frac{b}{2}=0, a^2+b^2=1, c^2+\frac{1}{4}=1$$

$$c=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow, a\sqrt{3}+b=0, a^2+3a^2=1, \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\xi_1=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A=P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{是正交矩阵。}$$

□

3. 设有三维列向量:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$$

问 λ 取何值时,

1. β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示;
2. β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,不唯一;
3. β 不可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示;

解.

构造一个系数矩阵$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$，考虑方程解：$AX=\beta$

$$B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}\lambda & 0 & -\lambda & -\lambda^2\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & -\lambda & -2\lambda-\lambda^2 & -\lambda^2-\lambda^3\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0 & 0 & -3\lambda-\lambda^2 & \lambda-2\lambda^2-\lambda^3\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & \lambda(1-2\lambda-\lambda^2)\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{pmatrix}$$

解.

$$1.\ \lambda \neq 0, -3, R(B) = R(A) = 3$$

$$AX = \beta \Leftrightarrow \text{解唯一，可以唯一线性表示}\beta$$

$$2.\ \lambda = 0, R(A) = R(B) = 1$$

$$AX = \beta \Leftrightarrow \text{解无穷，不唯一，可以线性表示}\beta$$

$$3.\ \lambda = -3, R(A) = 2 < R(B) = 3,$$

$$\Leftrightarrow \text{无解，不可以线性表示}\beta$$

□

4. 设3 阶矩阵 A 的特征值分别为 $1,2,3$, 对应的特征向量分别为:

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$$

$$\beta=2\xi_1-2\xi_2+\xi_3$$

求 $A^n\beta$.

解.

$$A\xi_1=\xi_1, A^2\xi_1=A(A\xi_1)=A\xi_1=\xi_1,\dots,A^n\xi_1=\xi_1$$
$$A\xi_2=2\xi_2, A^2\xi_2=2^2\xi_2,\dots,A^n\xi_2=2^n\xi_2$$
$$A^n\xi_3=3^n\xi_3, A^n\beta=2A^n\xi_1-2A^n\xi_2+A^n\xi_3$$
$$=2\xi_1-2^{n+1}\xi_2+3^n\xi_3$$

5. 设：

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

1. 求A 的特征值
2. 求$E+A^{-1}$的特征值。

解答：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda+1 & 2\\ -2 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\\ -2 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ -2 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

解.

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 \\ -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda-1 \\ -2 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda+5)$$

$$\lambda = 1, 1, -5 \text{是} A \text{ 的特征值}$$

$$\lambda = 1, 1, -\frac{1}{5} \text{是} A^{-1} \text{ 的特征值}$$

$$\lambda = 2, 2, \frac{4}{5} \text{是} E + A^{-1} \text{ 的特征值}$$

□

6. 已知$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \end{pmatrix}'$，是$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，求 k 的特征值。

解.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1)^2$$

A^{-1} 的特征值为$1, 1, \frac{1}{4}$.

1. $\lambda = 1, A^{-1}\alpha = \alpha \Rightarrow A\alpha = \alpha, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = 0, 1 + k + 1 = 0, k = -2$$

2. $\lambda = \frac{1}{4}, A^{-1}\alpha = \frac{1}{4}\alpha \Rightarrow A\alpha = 4\alpha, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$

解.

(2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = 0, -2+k+1=0, k=1$ □

7. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, 线性方程 $AX=\beta$ 有无穷多解。试求：

1. a 的值
2. 正交矩阵P, $P'AP$ 为对角矩阵。

解.

$$B=\begin{pmatrix}A & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&1-a&1-a^2&-2-a\end{pmatrix}$$

解.

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -2-a \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (a+2)(a-1) & (2+a) \end{pmatrix}$$

$$a=1, R(A)=1<R(B)=2; a=-2, R(A)=R(B)=2<3$$

所以 $a=-2$。此时有：$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ □

解.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-3)(\lambda+3), \lambda = 0, 3, -3$$

$$\lambda = 0, (0 - A)X = 0, AX = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

解.

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$\lambda=3,(3E-A)X=0,3E-A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&5&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0&9&0\\-1&5&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

□

解.

$$\lambda=-3,(-3E-A)X=0,3E+A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&1&1\\-2&1&4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0&-3&-6\\1&1&1\\0&3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}P_1&P_2&P_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$P'P = E, P'AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

8. 已知线性方程组：设 (1) $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=0 \end{cases}$ 一个基础解系为：$\xi_1=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \\ b_{24} \end{pmatrix}$ 试求线性方程组(2) $\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4=0 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3+b_{24}x_4=0 \end{cases}$ 的通解。

解.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, AX=0$$

$$\mathrm{Dim}(N(A))=4-R(A)=2 \Rightarrow R(A)=2$$

$\square$

解.

$$B=\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2\end{pmatrix}, AB=\begin{pmatrix}A\xi_1 & A\xi_2\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow B'A'=0, \begin{pmatrix}\xi_1'\\ \xi_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\\ a_{13} & a_{23}\\ a_{14} & a_{24}\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}\xi_1'\\ \xi_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{12}\\ a_{13}\\ a_{14}\end{pmatrix}=0, \begin{pmatrix}\xi_1'\\ \xi_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{21}\\ a_{22}\\ a_{23}\\ a_{24}\end{pmatrix}=0$$

$\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{12}\\ a_{13}\\ a_{14}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a_{21}\\ a_{22}\\ a_{23}\\ a_{24}\end{pmatrix}$ 是线性方程组（2）的基础解系。

解.

$$\xi = k_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \end{pmatrix}$$

为（2）的通解。 □

9. 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$ 有 3 个线性无关的解向量，求 a,b 的值及通解。

解.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ a & 0 & 4 & b-5 & 4 \end{pmatrix}$$

□

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 4-2a & b-5+4a & 4-2a \end{pmatrix}$$

$1.a \neq 2, R(A) = 3 = R(B)$;对应基础解系有1个解向量

$2.a = 2, b \neq -3, R(A) = 3 = R(B)$; 同上

$3.a = 2, b = -3, R(A) = 2 = R(B)$;对应基础解系有2个解向量

设 η_1, η_2, η_3 是线性方程组的3个线性无关解。则 $\eta_1 - \eta_2, \eta_1 - \eta_3$是对应齐次线性方程组的解，而且是线性无关的解：反证，如果线性相关，则有

$$\eta_1 - \eta_2 = k(\eta_1 - \eta_3) \Rightarrow (1-k)\eta_1 - \eta_2 + k\eta_3 = 0$$

$1-k, -1, k$ 不全为零，从而η_1, η_2, η_3 是线性相关的，矛盾。因此，只能是：$a = 2, b = -3, R(A) = 2 = R(B)$

解.

原方程化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 + 4x_4 + 2 \\ x_3 - 5x_4 - 3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

10. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$，问 k 取何值时，存在可逆矩阵P, $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并求矩阵 P 和对角矩阵 $P^{-1}AP$。

解.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 2 \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & \lambda+1 & 0 \\ -4 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

解.

$$|\lambda E - A| = (\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

$$\lambda = -1, m_{-1} = 2, (-E-A)X = 0, (E+A)X = 0$$

$$\mathrm{Dim}(V_{-1}) = 2 \Rightarrow R(E+A) = 1, E+A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -k & 0 & k \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -k & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, k = 0$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, k = 0, x_3 = 2x_1 + x_2$$

$\square$

解.

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1, m_1 = 1, (E - A)X = 0$$

$$E - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ k & 2 & -k \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. 已知$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,矩阵 B满足 $AB+E=A^2+B$,求 B.

解.

$$AB+E=A^2+B \Rightarrow (A-E)B=A^2-E$$
$$\Rightarrow (A-E)B=(A-E)(A+E)$$
$$A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, |A-E|=-1$$
$$B=(A+E)$$

□

33. 已知把三阶可逆矩阵 A的第二行的 2倍加到第三行得到矩阵B,求AB^{-1}.

解.

$$A\xrightarrow{r_3+2r_2}B,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}A=B$$

$$AB^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

13. 设有线性方程组： $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 = 0 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 = 0 \\ bx_1 + bx_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$，

1. a, b 为何值时，方程组有非零解；
2. 写出相应的基础解系和通解；
3. 解空间的维数。

解.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 0 & b-a \\ 0 & a-b & b-a \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & b-a \\ 0 & a-b & b-a \\ a+2b & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^2(a+2b),$$

解.

$$a=b,-2b,\text{有非零解},$$

$$1.a=b\neq 0,A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1=-x_2-x_3,\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\text{为通解}$$

□

解.

$$2.a=-2b\neq 0, A=\begin{pmatrix}-2b & b & b\\ b & -2b & b\\ b & b & -2b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ b & -2b & b\\ 0 & 3b & -3b\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}, \xi=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\xi=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\text{为通解方程}$$

以上解空间的维数分别为 2 维和 1 维。 □

14. 二次型$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$，经正交变换 $X=PY$ 化为：$f=y_2^2+2y_3^2$. 求 a,b,P。

解.

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix},f=X'AX$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-1 & -b\\ -1 & -b & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$\lambda=1,\begin{vmatrix}0 & -a & -1\\ -a & 0 & -b\\ -1 & -b & 0\end{vmatrix}=0$$

解.

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -1 \\ 0 & ab & -b \\ -1 & -b & 0 \end{vmatrix} = ab + ab = 0, 2ab = 0$$

$$\lambda = 0, \begin{vmatrix} -1 & -a & -1 \\ -a & -1 & -b \\ -1 & -b & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -a & -1 \\ 0 & -1+a^2 & -b+a \\ 0 & -b+a & 0 \end{vmatrix} = (a-b)^2 = 0$$

$$a = b, ab = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

$\square$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0, (\lambda E - A)X = -AX = 0, AX = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_2 = 0, x_1 + x_2 = 0$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1, (\lambda E - A)X = (E - A)X = 0$$

解.

$$E-A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_1=x_3=0, x_2=1$$

$$\xi_2=P_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda=2, (\lambda E-A)X=(2E-A)X=0$$

$$2E-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_1=x_3, x_2=0.$$

$$\xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

解.

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, P'AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = PY, f(X) = f(Y) = y_2^2 + 2y_3^2$$

□

15. 求直线

$$L_1:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$$

与直线

$$L_2:\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$$

的公垂线方程。

解.

第一步，求公垂线 L 方向向量 s:

$$s_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-j-k, s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=6i-3j,$$

$$s=(0,1,1)\times(2,-1,0)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=i+2j-2k$$

第二步，分别求公垂线 L 和直线 L_1, L_2 决定的平面：π_1, π_2,法向量分别设为：n_1, n_2

$$n_1 = n \times s_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4i - j + k$$

$$M_1 = (1,0,0) \in L_1$$

$$\pi_1 : 4(x-1) - (y-0) + (z-0) = 0, 4x - y + z - 4 = 0$$

$$n_2 = n \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2i - 4j - 5k$$

$$M_2 = (0,0,-2) \in L_2$$

$$\pi_2 : 2(x-0) + 4(y-0) + 5(z+2) = 0, 2x + 4y + 5z + 10 = 0$$

公垂线方程为：

解.

$$\begin{cases} 4x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + 4y + 5z + 10 = 0 \end{cases}$$

□

16. 求直线 $L:\left\{\begin{array}{c}2x-y+z-1=0\\ x+y-z+1=0\end{array}\right\}$ 在平面 $\pi:x+2y-z=0$ 的投影方程。

解.

设经过直线 L 且与平面 π 垂直相交的平面为 π_1, 则 π_1 与 π 的交线即为投影线。设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}$ ，平面π 的法向量为：$\vec{n}$。平面π_1 的法向量为：$\vec{n_1}$, 则有：

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=3j+3k, \vec{n}=(1,2,-1)$$

$$\vec{n_1}=\vec{s}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-3i+j-k$$

$$M(0,0,1)\in L\subseteq\pi_1$$

$$\pi_1 : -3(x-0)+y-0-(z-1)=0, -3x+y-z+1=0$$

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{c} x+2y-z=0 \\ -3x+y-z+1=0 \end{array} \right.$$ L在平面 π 上投影线方程

17. 设矩阵 A 与矩阵 B 相似，且

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$

1. 求 a, b 的值；
2. 求可逆矩阵P，满足$P^{-1}AP=B$

解.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-b)$$

$\lambda_1=2, m_2=2; \lambda_2=b, m_b=1;$ □

$$\lambda=2, R(\lambda E-A)=R(2E-A)=1$$

$$2E-A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & 2-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 2-a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2-a+3\end{pmatrix}, 2-a+3=0, a=5$$

$$\lambda=b, |\lambda E-A|=|bE-A|=0$$

$$|bE-A|=\begin{vmatrix}b-1 & 1 & -1\\ -2 & b-4 & 2\\ 3 & 3 & b-5\end{vmatrix}=0$$

解.

$$|bE-A| = \begin{vmatrix} b-1 & 0 & -1 \\ -2 & b-2 & 2 \\ 3 & b-2 & b-5 \end{vmatrix} = (b-2)\begin{vmatrix} b-1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & b-5 \end{vmatrix}$$

$$= (b-2)\begin{vmatrix} b-1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & b-7 \end{vmatrix} = (b-2)\begin{vmatrix} b-2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ b-2 & 0 & b-7 \end{vmatrix}$$

$$= (b-2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & b-7 \end{vmatrix} = (b-2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & b-6 \end{vmatrix}$$

$$= (b-2)^2(b-6)$$

$\square$

解.

$$b=2, R(2E-A)=R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}=1,$$

$$b=6, R(6E-A)=R\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=R\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}=2, \because R(bE-A)=2, \therefore b=6$$

$$\therefore a=5, b=6$$

接下来，求可逆矩阵 $P, P^{-1}AP=B$. □

解.

$$\lambda = 2, (2E-A)X = 0, 2E - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2E - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = b = 6, (6E-A)X = 0, 6E - A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

解.

$$6E-A=\begin{pmatrix}5&1&-1\\8&4&0\\8&4&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, x_3=3x_1, x_2=-2x_1$$

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}\xi_1&\xi_2&\xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}, X=PY,$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

18. 已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为：

$$3, 2, -2, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

分别是对应前面两个特征值的特征向量。

1. 求属于-2 的特征向量；
2. 求正交矩阵P和正交变换 $X = PY$, 使得 $f(X) = X'AX = f(Y)$ 为标准型。

解.

设$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$为属于$-2$ 的特征向量，则有

□

$$\left\{\begin{array}{c} x_2=0 \\ \sqrt{3}x_1+x_3=0 \end{array}\right\}, A\xi=-2\xi$$

$$\xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, P_3=\frac{\xi}{|\xi|}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix}$$

$$P'P=E, X=PY, P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

19. 已知二次型$f=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为 2,求$c$及二次型对应的特征值，指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 代表几何空间中什么图形。

解.

$$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix},|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-c\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\0&3\lambda-12&\lambda-c+9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1-(\lambda-5)^2&-3-3(\lambda-5)\\1&\lambda-5&3\\0&3\lambda-12&\lambda-c+9\end{vmatrix}$$

□

$$
= \begin{vmatrix} (\lambda-5)^2-1 & 3(1+\lambda-5) \\ 3(\lambda-4) & \lambda-c+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\lambda-4)(\lambda-6) & 3(\lambda-4) \\ 3(\lambda-4) & \lambda-c+9 \end{vmatrix}
$$

$$
= (\lambda-4) \begin{vmatrix} (\lambda-6) & 3(\lambda-4) \\ 3 & \lambda-c+9 \end{vmatrix}
$$

$$
= (\lambda-4)(\lambda^2+(-6-c+9)\lambda+6c-54-9\lambda+36)
$$

$$
= (\lambda-4)(\lambda^2-(6+c)\lambda-18+6c)
$$

$$
R(A)=2, \Rightarrow \lambda=0, -18+6c=0, c=3
$$

$$
|\lambda E-A| = (\lambda-4)(\lambda^2-9\lambda) = \lambda(\lambda-4)(\lambda-9)
$$

下一步，求特征向量和正交矩阵

解.

$$\lambda=0,(\lambda E-A)X=0,AX=0,$$

$$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&24&-12\\-1&5&-3\\0&12&-6\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&5&-3\\0&2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&-1\\0&2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&-1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$x_1=-x_2,x_3=2x_2,\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},P_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

□

解.

$$\lambda = 4, (\lambda E - A)X = 0, (4E - A)X = 0,$$

$$4E - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_1 = x_2, x_3 = 0, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 9, (\lambda E - A)X = 0, (9E - A)X = 0,$$

$$9E - A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -15 & -15 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 15 & 15 \end{pmatrix}$$

□

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, x_1 = x_3, x_2 = -x_3$$

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$X = PY, f = X'AX = Y'P'APY = Y' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} Y$$

解.

$$f = 4y_2^2 + 9y_3^2, f = 1$$

$$4y_2^2 + 9y_3^2 = 1, \frac{y_2^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y_3^2}{\frac{1}{9}} = 1$$

这是一个椭圆柱面方程。

第四部分，证明题

1.证明

$$D_n = \begin{vmatrix} 6 & 9 & & & & \\ 1 & 6 & 9 & & & \\ & 1 & 6 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 6 & 9 \\ & & & & 1 & 6 \end{vmatrix} = (n+1)3^n$$

解.

按第一行的代数余子式展开:

$$D_n = 6D_{n-1} - 9 \begin{vmatrix} 1 & 9 & & & & \\ 0 & 6 & 9 & & & \\ 0 & 1 & 6 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 6D_{n-1} - 9D_{n-2}$$

解.

归纳法假定：

$$D_{n-1} = (n)3^{n-1}, D_{n-2} = (n-1)3^{n-2}$$

$$D_n = 6D_{n-1} - 9D_{n-2} = 6n3^{n-1} - 9(n-1)3^{n-2}$$
$$= 3^n(2n - n + 1) = (n+1)3^n$$

$\square$

2. 设 A 为 2 阶方阵。若存在大于或等于 2 的数 m 使得 $A^m=0$ 则 $A^2=0$

Proof.

设 $m\geq 2, A^m=0$,则有 $|A|=0, R(A)\leq 1. R(A)=0$,显然成立。

$$R(A)=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}=(a+kb)A$$

$$A^3=A^2A=(a+kb)AA=(a+kb)^2A,\ldots,$$

$$A^{m-1}=(a+kb)^{m-2}A$$

$$A^m=A^{m-1}A=(a+kb)^{m-2}AA=(a+kb)^{m-1}A=0$$

$$a(a+kb)^{m-1}=b(a+kb)^{m-1}=0$$

$$\left\{\begin{array}{c} a+kb=0 \\ a+kb\neq 0, a=b=0 \end{array}\right.$$

$$a+kb=0 \Rightarrow A^2=(a+kb)A=0,$$

$$a+kb\neq 0 \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow A=0$$

$$\Rightarrow A^2=0$$

3. 设矩阵 A 是 n 阶幂等矩阵：$A^2 = A$. 试证：

1. A 的特征值只能是 1 或 0.
2. $R(A) + R(A-E) = n$
3. A 可以相似对角化；
4. $R(A) = Tr(A)$.

Proof.

Suppose A has 特征值 λ, then

$$\begin{aligned} A^2 = E \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1, 0 \\ A(A-E) = 0 \Rightarrow R(A) + R(A-E) \leq n \\ R(A) + R(A-E) = R(A) + R(E-A) \\ \geq R(A+E-A) = R(E) = n \\ \therefore R(A) + R(A-E) = n \end{aligned}$$

$$A(A-E)=0$$

可以看出：$A-E$ 的列向量是方程 $AX=0$ 的解向量，从而是 A 的特征 0 的特征向量。 $AX=0$ 的解空间维数等于 $n-R(A)=R(A-E)$, 即 A 的特征值 0 的特征向量空间维数等于 $R(A-E)$.

$$(E-A)A=0$$

可以看出：A 的列向量是方程 $(E-A)X=0$ 的解向量，从而是 A 的特征 1 的特征向量。 $(E-A)X=0$ 的解空间维数等于 $n-R(E-A)=R(A)$, 即 A 的特征值 1 的特征向量空间维数等于 $R(A)$.

解.

由此可知， 矩阵 A 的两个特征值 $0, 1$的特征向量子空间：V_0, V_1 满足：

$$R(V_0) + R(V_1) = n$$

所以 A 相似于对角矩阵。再设 特征值 $0, 1$ 的重数分别为 m_0, m_1. 则有：

$$R(A) = m_1 = Tr(A)$$

□

4. 设 A, B 都是n 阶正定矩阵，证明AB 的特征值全大于零。

解.

注意：$(AB)' = B'A' = BA \neq AB$ 所以 AB 未必是对称矩阵。

$$\exists P, P'P = E, P'AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i > 0, i = 1, 2, ..., n$$

$$= DD', D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$A = PDD'P' = PD(PD)' = A_1 A_1'$$

$$\text{同理}: B = B_1B_1'$$
$$AB = A_1A_1'B_1B_1' = A_1A_1'B_1B_1'A_1A_1^{-1}$$
$$= A_1(A_1'B_1)(B_1'A_1)A_1^{-1}$$
$$= A_1(A_1'B_1)(A_1'B_1)'A_1^{-1}$$
$$= A_1CC'A_1^{-1}, C = A_1'B_1$$
$$|\lambda E - AB| = |\lambda E - CC'|$$
$$R(CC') = R(C) = n, f(X) = X'CC'X = (C'X)'(C'X)$$
$$X \neq 0 \Rightarrow C'X \neq 0 \Rightarrow f(X) > 0$$
$$CC' \text{ 是正定矩阵，特征值大于零}$$

因此AB 的特征值大于零

5.设 A 为 n 阶方阵，证明：

1. 若$A^{k+1}\alpha=0, A^k\alpha\neq 0$, 则 $A^k\alpha, A^{k-1}\alpha, ..., A\alpha, \alpha$ 线性无关；
2. 线性方程 $A^{n+1}X=0$ 的解，一定是方程 $A^nX=0$ 的解；
3. $R(A^{n+1})=R(A^n)$

Proof.

反证法，若它们线性相关，设有不全为零的数：$a_0, a_1, ..., a_k$

$$a_kA^k\alpha+a_{k-1}A^{k-1}\alpha+\cdots+a_1A\alpha+a_0\alpha=0$$
$$\text{if}\ \ a_0\neq 0\Rightarrow a_0A^k\alpha=0, A^k\alpha\neq 0\Rightarrow a_0=0$$
$$\therefore a_0=0, a_kA^k\alpha+a_{k-1}A^{k-1}\alpha+\cdots+a_1A\alpha=0$$
$$\text{同理可证：}\ \ a_1=0, a_2=0, ..., a_k=0,\ \text{矛盾}$$

（1）得到证明。再考察（2）：

□

解.

若$A^nX\neq 0$, 由（1），

$$A^n\alpha, A^{n-1}\alpha, ..., A\alpha, \alpha$$

线性无关。$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关，矛盾。所以：

$$A^{n+1}X=0\Rightarrow A^nX=0$$

由（2）知， $A^{n+1}X=0$ 与 $A^nX=0$ 是同解方程，即解空间相等，所以：$R(A^{n+1})=R(A^n)$ □

6. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关，证明下列向量组

$$\beta_1 = \alpha_1 + k_1\alpha_m, \beta_2 = \alpha_2 + k_2\alpha_m, \ldots,$$
$$\beta_{m-1} = \alpha_{m-1} + k_{m-1}\alpha_m, \beta_m = \alpha_m$$

线性无关。

Proof.

设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{m-1} & \alpha_m \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{m-1} & \beta_m \end{pmatrix}$$

对矩阵 A 进行初等列变换，可以化为矩阵 B. 证明如下：

□

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{m-1} & \alpha_m \end{pmatrix} \xrightarrow[i=1,2,...,m-1]{c_i + k_i c_m}$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + k_1\alpha_m & \alpha_2 + k_2\alpha_m & \cdots & \alpha_{m-1} + k_{m-1}\alpha_m & \alpha_m \end{pmatrix}$$
$$= B \Leftrightarrow AP = B, |P| \neq 0$$
$$\Rightarrow m = R(A) = R(B)$$

B的列向量线性无关。

7. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关，m 为奇数。证明

$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, ..., \beta_{m-1} = \alpha_{m-1} + \alpha_m, \beta_m = \alpha_m + \alpha_1,$

线性无关。

Proof.

反证法，设有不全为零的数：

$$\begin{aligned} k_1, k_2, ..., k_m \\ k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_{m-1}\beta_{m-1} + k_m\beta_m = 0 \\ (k_1 + k_m)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + \cdots \\ +(k_{m-2} + k_{m-1})\alpha_{m-1} + (k_{m-1} + k_m)\alpha_m = 0 \end{aligned}$$

□

$$\begin{array}{cccccc}
k_1 & & & & + & k_m = 0 \\
k_1 & +k_2 & & & & = 0 \\
 & k_2 & +k_3 & & & = 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & k_{m-2} & +k_{m-1} & = 0 \\
 & & & & k_{m-1} & +k_m = 0
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & 1 \\
1 & 1 & & & & 0 \\
0 & 1 & 1 & & & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_{m-1} \\ k_m
\end{pmatrix} = 0$$

系数矩阵 A 的行列式：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 + 1(-1)^{1+m}$$
$$= 2$$

$$AX = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$$

与前提矛盾。所以 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ 线性无关。

8. 设 n 阶矩阵 A 的n 个列向量为：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$。再设 n 阶矩阵 B 的 n 个列向量为：

$$\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, ..., \alpha_{n-1}+\alpha_n, \alpha_n+\alpha_1, R(A)=n$$

问方程 $BX=0$ 是否有非零解。

Proof.

$$BX=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3 & \cdots & \alpha_{n-1}+\alpha_n & \alpha_n+\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

□

Proof.

$$(x_1+x_n)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+\cdots$$
$$+(x_{n-2}+x_{n-1})\alpha_{n-1}+(x_{n-1}+x_n)\alpha_n=0$$

$$\begin{array}{cccccc}
x_1 & & & & + & x_n=0 \\
x_1 & +x_2 & & & & =0 \\
 & x_2 & +x_3 & & & =0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & x_{n-2} & +x_{n-1} & =0 \\
 & & & & x_{n-1} & +x_n=0
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & 1 \\
1 & 1 & & & & 0 \\
0 & 1 & 1 & & & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & & 1 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n
\end{pmatrix}=0$$

Proof.

系数矩阵的行列式

$$|D| = 1 + (-1)^{1+n} = \begin{cases} 0, n = 2m \\ 2, n = 2m+1 \end{cases}$$

n 为奇数，只有零解。n 为偶数，有非零解。

□

9. 设 $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ 是 A 的属于不同特征值的特征向量，再设 $\alpha=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$，证明 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, ..., A^{n-1}\alpha$ 线性无关。

Proof.

设它们分别属于n 个不同的特征值：$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$

$$\alpha=\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}A\alpha=A\xi_1+A\xi_2+\cdots+A\xi_n&=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_n\\&=\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$A^2\alpha = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \\ \vdots \\ \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\cdots$$

$$A^{n-1}\alpha = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} \\ \lambda_2^{n-1} \\ \vdots \\ \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & A\alpha & \cdots & A^{n-1}\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0, \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \text{可逆}$$

$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$

$\alpha, A\alpha, A^2\alpha, ..., A^{n-1}\alpha$ 线性无关

10. 设 A, B 是两个实对称矩阵，证明 A 与 B 相似的充分必要条件是它们的特征多项式相等。

解.

必要性显然。下面证明充分性：如果A 与 B 的特征多项式相等，则它们的特征值相等，对应重数相等，适当选取正交矩阵，有：

$$P, P'P = E, Q, Q'Q = E$$

$$P'AP = Q'BQ$$

$$QP'APQ' = B, QP' = (PQ')' = (PQ')^{-1}$$

A 与 B 相似。 $\square$

11. 设矩阵 A 是 n 阶实矩阵，证明 $B=kE+A'A, k>0$ 是正定矩阵。

解.

注意 B 是实对称矩阵。

$$\begin{aligned} f(X)=X'BX &= X'(kE+A'A)X \\ &= kX'X+X'A'AX \\ &= kX'X+(AX)'AX \end{aligned}$$

$$\geq kX'X>0, X\neq 0$$

B 是正定矩阵。

□

12. 设矩阵 A 是 $m\times n$ 实矩阵，证明： $R(A'A)=R(AA')=R(A)$. 举例说明，对于复数矩阵不成立。

Proof.

设X 是 n 维实向量。

$$AX=0\Rightarrow A'AX=0\Rightarrow X'A'AX=(AX)'AX=0\Rightarrow AX=0$$

即有

$$AX=0\Leftrightarrow A'AX=0$$

所以$R(A'A)=R(A)$. 同理可证： $R(AA')=R(A')=R(A)$

复数矩阵： $A=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\end{pmatrix}, A'=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{-1}\end{pmatrix}, A'A=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{-1}\\ \sqrt{-1} & -1\end{pmatrix}, AA'=0$ □

13. 若任意非零向量都是矩阵A 的特征向量，证明：A 是标量矩阵（数乘矩阵）

解.

设标准单位向量$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为 A 的特征向量，分别属于特征值：$k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得：

$$A\varepsilon_i = k_i\varepsilon_i, i = 1, 2, ..., n$$

因此有：

$$A\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & k_n \end{pmatrix}$$

□

所以

$$A=\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & k_n \end{pmatrix}$$

又因为：$\varepsilon_1+\varepsilon_i\neq 0, i>1$

$$A(\varepsilon_1+\varepsilon_i)=k(\varepsilon_1+\varepsilon_i)=k_1\varepsilon_1+k_i\varepsilon_i$$

$$(k-k_1)\varepsilon_1+(k-k_i)\varepsilon_i=0$$

$$k-k_1=0, k-k_i=0, \Rightarrow k_1=k_i=k, i=1,2,...,n$$

$$\therefore A=kE$$

14. 设 A 是 n 阶正定矩阵，证明：存在正定矩阵 B,使得 $A=B^2$

解.

Suppose that:

$$P'P=E,\lambda_i>0,i=1,2,...,n,A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}P'$$

$$=P'\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&&\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&&\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P$$

$$=P'DDP=P'DPP'DP=B^2,B=P'DP,\text{为正定矩阵}$$

15.设 α 是 n 维实非零列向量，证明矩阵：$E-\frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'$ 为正交矩阵。

解.

根据题意，有：

$$B=E-\frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha', B'=B$$

$$\begin{aligned}B'B=B^2&=(E-\frac{2}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha')^2\\&=E-\frac{4}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'+\frac{4}{(\alpha'\alpha)^2}\alpha\alpha'\alpha\alpha'\\&=E-\frac{4}{\alpha'\alpha}\alpha\alpha'+\frac{4}{(\alpha'\alpha)}\alpha\alpha'=E\end{aligned}$$

所以矩阵 B 是正交矩阵. □

16. 设方程组 $AX=0$ 的解都是方程组 $BX=0$ 的解，且 $R(A)=R(B)$，证明：这两个方程组为同解方程。

解.

$AX=0$的解空间，记为 $N(A)$. $BX=0$的解空间，记为 $N(B)$.则有

$$
\begin{aligned}
N(A) &\leq N(B) \\
\mathrm{Dim}(N(A)) = n - R(A), \mathrm{Dim}(N(B)) &= n - R(B) \\
R(A) = R(B) \Rightarrow \mathrm{Dim}(N(A)) &= \mathrm{Dim}(N(B)) \\
\Rightarrow N(A) &= N(B)
\end{aligned}
$$

解空间相等，所以是同解方程。 □

17设 A是n 阶方阵，$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 是 n 维列向量。$B = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix}$,若 $R(A) = R(B)$, 则方程 $AX = \beta$ 有解。

Proof.

$AX = \beta$ 有解, 当且仅当 $R(A) = R(A, \beta)$.因为

$$R(A) \leq R\begin{pmatrix} A & \beta \end{pmatrix} \leq R(B), R(A) = R(B)$$

所以，$R(A) = R(A, \beta)$

□

18. 设向量 $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}, i = 1, 2, ..., r < n$ 是 r 个线性无关的 n 维实向量。$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 是线性方程组:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{gathered}$$

的实非零解向量。证明：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, \beta$线性无关。

解.

线性方程组的解，可以看作是向量的内积：

$$
\begin{aligned}
a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}b_n=0 &\Leftrightarrow (\alpha_1,\beta)=0\\
a_{21}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{2n}b_n=0 &\Leftrightarrow (\alpha_2,\beta)=0\\
&\cdots\\
a_{r1}b_1+a_{r2}b_2+\cdots+a_{rn}b_n=0 &\Leftrightarrow (\alpha_r,\beta)=0
\end{aligned}
$$

if we have $k_1,k_2,\ldots,k_r,k_{r+1}$满足

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta=0$$

用 β 内积作用上式：

$$k_{r+1}(\beta,\beta)=0,\beta\neq 0\Rightarrow k_{r+1}=0$$

□

then we have

解.

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$$

但是：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ 线性无关，所以：

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

所以：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, \beta$ 线性无关. □

19. 设矩阵 A, B 都是 n 阶正定矩阵，若 A 的特征向量都是 B 的特征向量，则 AB 也是正定矩阵。

Proof.

设 A 的特征值为：$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$，有正交矩阵 P

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix}, AP = \begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \cdots & AP_n \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1 & \lambda_2 P_2 & \cdots & \lambda_n P_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

由已知，$BP = \begin{pmatrix} BP_1 & BP_2 & \cdots & BP_n \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \mu_1 P_1 & \mu_2 P_2 & \cdots & \mu_n P_n \end{pmatrix}$$

□

$$BP = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$$

$$ABP = AP \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$$

$$= P \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & & \\ & \lambda_2\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

$$P'ABP = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & & \\ & \lambda_2\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix},$$

$\lambda_i\mu_i > 0, i = 1, 2, ..., n, AB$ 是正定矩阵。

20设向量组：

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$$

是方程 $AX = 0$ 的基础解系，向量 β不是 $AX = 0$ 的解，证明：$\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, ..., \beta + \alpha_t$线性无关。

Proof.

反证法，设有不全部为零的数：$k_0, k_1, k_2, ..., k_t$,满足：

$$\begin{aligned} k_0\beta + k_1(\beta + \alpha_1) + k_2(\beta + \alpha_2) + ... + k_t(\beta + \alpha_t) &= 0 \\ k_0A\beta + k_1A(\beta + \alpha_1) + k_2A(\beta + \alpha_2) + ... + k_tA(\beta + \alpha_t) &= 0 \\ (k_0 + k_1 + k_2 + ... + k_t)A\beta &= 0 \\ k_0 + k_1 + k_2 + ... + k_t &= 0 \end{aligned}$$

□

代入前面第一个式子，得到:

$$
\begin{aligned}
k_0\beta + k_1(\beta+\alpha_1) + k_2(\beta+\alpha_2) + \ldots + k_t(\beta+\alpha_t) \\
= k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_t\alpha_t = 0 \\
\alpha_1, \ldots, \alpha_t \text{线性无关} \Rightarrow k_1 = k_2 = \cdots = k_t = 0 \\
k_0 + k_1 + k_2 + \ldots + k_t = 0 \Rightarrow k_0 = 0
\end{aligned}
$$

矛盾。所以 $\beta, \beta+\alpha_1, \beta+\alpha_2, \ldots, \beta+\alpha_t$线性无关。

谢 谢！