线性代数–习题解答

曾吉文

2022年 9 月

第一章 习题

1 （第一章习题 6 (4)）

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解.

$$D_n \xlongequal{c_n + c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} i \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad (10\text{-}1)$$

$$= (-1)^{1+n} \sum_{i=1}^{n} i \times \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+n+n-1+1+1} \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i$$

解法2，将所有列都加到第1列：$c_1 + c_i, i \geq 2$

2 （第一章习题 6 (5)）

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解答：按第一行展开

$$D_n = a^n + (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^n + (-1)^{1+2n} a^{n-2} = a^n - a^{n-2}$$

3 计算（第一章习题 6 (3)）

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$D \xlongequal{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\underline{r_i - r_1, i \geq 2} \atop = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

4 计算（第一章习题 6 (6)）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解答：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix} \frac{r_i - r_1}{i = 2, 3, ..., n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

5 （第一章习题 7 (2)）

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

解答：

$$D \xlongequal[j=2,3,4]{r_j - r_{j-1}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=3,4]{r_j - r_{j-1}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

6（第一章习题 7 (3)）

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1+a_1 & x_1^2+b_1x_1+b_2 & x_1^3+c_1x_1^2+c_2x_1+c_3 \\ 1 & x_2+a_1 & x_2^2+b_1x_2+b_2 & x_2^3+c_1x_2^2+c_2x_2+c_3 \\ 1 & x_3+a_1 & x_3^2+b_1x_3+b_2 & x_3^3+c_1x_3^2+c_2x_3+c_3 \\ 1 & x_4+a_1 & x_4^2+b_1x_4+b_2 & x_4^3+c_1x_4^2+c_2x_4+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

解答：依次按第2列，第3列，第4列，写成两个行列式的和。

7（第一章习题 9 (3)）

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n}\begin{vmatrix} a_{1p_1} & a_{1p_2} & \cdots & a_{1p_n} \\ a_{2p_1} & a_{2p_2} & \cdots & a_{2p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{np_1} & a_{np_2} & \cdots & a_{np_n} \end{vmatrix}$$

这里是对所有 $1, 2, \ldots, n$ 的排列：$p_1p_2\cdots p_n$ 求和。

解.

总共有 $n!$ 个排列。任意一个排列，总有一个排列跟它相差一个符号，所以为零。或者说： □

$$D = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} \begin{vmatrix} a_{1p_1} & a_{1p_2} & \cdots & a_{1p_n} \\ a_{2p_1} & a_{2p_2} & \cdots & a_{2p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{np_1} & a_{np_2} & \cdots & a_{np_n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{p_2 p_1 \cdots p_n} (-1) \begin{vmatrix} a_{1p_2} & a_{1p_1} & \cdots & a_{1p_n} \\ a_{2p_2} & a_{2p_1} & \cdots & a_{2p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{np_2} & a_{np_1} & \cdots & a_{np_n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \sum_{p_2 p_1 \cdots p_n} \begin{vmatrix} a_{1p_2} & a_{1p_1} & \cdots & a_{1p_n} \\ a_{2p_2} & a_{2p_1} & \cdots & a_{2p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{np_2} & a_{np_1} & \cdots & a_{np_n} \end{vmatrix} = -D$$

8 （第一章习题 10 (2)）

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

解.

$$D_5 \xlongequal[i=2,3,4,5]{r_1+r_i} \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$
\xlongequal[i=3,4,5]{r_2+r_i}\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=4,5]{r_3+r_i}\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{r_4+r_5}\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -aD_4 + (-1)^{1+5}(-1)^4 \\
&= -a\left(-aD_3 + (-1)^{1+4}(-1)^3\right) + 1 \\
&= (-a)^2 D_3 - a + 1 \\
&= (-a)^2(-aD_2 + (-1)^{1+3}(-1)^2) - a + 1 \\
&= (-a)^3 D_2 + a^2 - a + 1 \\
&= (-a)^3(-aD_1 + (-1)^{1+2}(-1)) + a^2 - a + 1 \\
&= (-a)^4 D_1 + (-a)^3 + a^2 - a + 1 \\
&= (-a)^4(1 - a) + (-a)^3 + a^2 - a + 1 \\
&= (-a)^5 + a^4 + (-a)^3 + a^2 - a + 1 \\
&= -a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1
\end{aligned}
$$

考虑更一般情况

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$D_n \xlongequal[i\geq 2]{r_1+r_i} \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

继续对第2 行，3行，一直到第$n-1$ 行，做上述行变换，

$$D_n \overset{r_i+r_j}{\underset{j\geq i, i=2,\ldots,n-1}{=}} \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -a & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= -aD_{n-1} + (-1)^{1+n}(-1)^{n-1} = -aD_{n-1} + 1$$

$$= -a(-aD_{n-2} + 1) + 1 = a^2 D_{n-2} - a + 1$$

$$= (-a)^{n-1} D_1 + (-a)^{n-2} + \cdots + a^2 - a + 1$$

$$= (-a)^n + (-a)^{n-1} + (-a)^{n-2} + \cdots + a^2 - a + 1$$

9 （第一章习题 10 (3)）

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{r_1 + r_i}{i \geq 2} \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$
= 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[i \geq 2]{r_i - r_1} 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}
$$

$$
= 2 \times 5^5
$$

10 （第一章习题 10 (4)）

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ k & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

解.

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ k & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^5 + (-1)^{t(23451)}(-1)^4 k$$

$$= \lambda^5 + (-1)^4(-1)^4 k = \lambda^5 + k$$

11.一个 n 阶行列式，满足 $a_{ij}=-a_{ji}, i,j=1,2,n$. 则当 n 为奇数时，行列式值为零。

解.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D'$$

$$=(-1)^n D = -D \Rightarrow D=0$$

12 (第一章 13（1）)

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

解.

$$D \xlongequal{r_2+xr_1} \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2+a_1x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$D \xlongequal{r_3 + x r_2} \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 + a_1 x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 + a_2 x + a_1 x^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 + a_1 x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 + a_2 x + a_1 x^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + \cdots + a_1 x^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n + a_{n-1} x + \cdots + a_1 x^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a_n + a_{n-1} x + \cdots + a_1 x^{n-1})(-1)^{1+n}(-1)^{n-1}$$

13 证明:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$= AB$$

解.

用归纳法证明：$k=1$，有：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{r1} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

归纳假设，对一般的$k-1$ 成立，考虑 k. 对行列式 D的第一行元素：$a_{11}, a_{12}, ..., a_{1k}$, 假设它们在行列式 A 中的余子式和代数余子式分别为：

$$M_{11}, M_{12}, ..., M_{1k}; A_{11}, A_{12}, ..., A_{1k}$$

□

行列式 D 按第一行展开:

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} M_{11} & & 0 & \\ & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ * & \vdots & \cdots & \vdots \\ & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} M_{12} & & 0 & \\ & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ * & \vdots & \cdots & \vdots \\ & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+a_{1i}(-1)^{1+i}\begin{vmatrix} M_{1i} & & 0 & \\ & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ * & \vdots & \cdots & \vdots \\ & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+a_{1k}(-1)^{1+k}\begin{vmatrix} M_{1k} & & 0 & \\ & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ * & \vdots & \cdots & \vdots \\ & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$D = a_{11}M_{11}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+a_{1i}(-1)^{1+i}M_{1i}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1k}A_{1k}) \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

证法2:

$$a_{k+i,j} = \begin{cases} c_{i,j}, j = 1, ..., k \\ b_{i,j-k}, j = k+1, ..., k+r \end{cases}$$

$$D = \sum_{p_1 \cdots p_k p_{k+1} \cdots p_{k+r}} (-1)^{t(p_1 \cdots p_k p_{k+1} \cdots p_{k+r})} a_{1p_1} \cdots a_{kp_k} a_{k+1,p_{k+1}} \cdots a_{k+r,p_{k+r}}$$

Note: $a_{ij} = 0, i = 1, 2, ..., k, j = k+1, ..., k+r$, 所以，列下标的排列只需考虑:

$$p_1, p_2, ..., p_k \in \{1, 2, ..., k\}$$

从而又有:

$$p_{k+1}, p_{k+2}, ..., p_{k+r} \in \{k+1, k+2, ..., k+r\}$$

$$
\begin{aligned}
(-1)^{t(p_1\cdots p_k p_{k+1}\cdots p_{k+r})} &= (-1)^{t(p_1\cdots p_k)+t(p_{k+1}\cdots p_{k+r})} \\
&+ (-1)^{t(p_1\cdots p_k)}(-1)^{t(p_{k+1}\cdots p_{k+r})}
\end{aligned}
$$

令:

$$q_i = p_{k+i} - k, i = 1, 2, ..., r; a_{k+i,p_{k+i}} = b_{iq_i}$$

则

$$q_1 q_2 ... q_r \in \{1, 2, ..., r\}$$

$$(-1)^{t(q_1 q_2 ... q_r)} = (-1)^{t(p_{k+1}\cdots p_{k+r})}$$

$$D = \sum_{p_1 \cdots p_k \in \{1,2,\ldots,k\}; p_{k+1} \cdots p_{k+r} \in \{k+1,\ldots,k+r\}} (-1)^{t(p_1 \cdots p_k)} (-1)^{t(p_{k+1} \cdots p_{k+r})} a_{1p_1} \cdots a_{kp_k} a_{k+1,p_{k+1}} \cdots a_{k+r,p_{k+r}}$$

$$D = \sum_{p_1 \cdots p_k \in \{1,2,\ldots,k\}; q_1 \cdots q_r \in \{1,\ldots,r\}} (-1)^{t(p_1 \cdots p_k)} (-1)^{t(q_1 \cdots q_r)} a_{1p_1} \cdots a_{kp_k} b_{1,q_1} \cdots b_{r,q_r}$$

$$= \sum_{p_1 \cdots p_k \in \{1,2,\ldots,k\}} (-1)^{t(p_1 \cdots p_k)} a_{1p_1} \cdots a_{kp_k} \sum_{q_1 \cdots q_r \in \{1,\ldots,r\}} (-1)^{t(q_1 \cdots q_r)} b_{1,q_1} \cdots b_{r,q_r}$$

14. 两个 n 阶行列式:$A=|a_{ij}|, B=|b_{ij}|$的乘积：$|a_{ij}||b_{ij}|=|c_{ij}|$, 这里

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

即 A 的第 i 行乘 B 的第 j 列。

解.

构造一个 $2n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

为了把行列式 D 的第一行：$a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$消去，做行变换：

1. 第 $n+1$ 行乘 a_{11}，加到第 1 行；$r_1 + a_{11}r_{n+1}$
2. 第 $n+2$ 行乘 a_{12}，加到第 1 行；$r_1 + a_{12}r_{n+2}$
3. $\cdots$
4. 第 $n+n$ 行乘 a_{1n}，加到第 1 行；$r_1 + a_{1n}r_{n+n}$

得到行列式值为

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

为了把行列式 D 的第二行：$a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$消去，做行变换：

1. 第 $n+1$ 行乘 a_{21}，加到第 2 行；$r_2 + a_{21}r_{n+1}$
2. 第 $n+2$ 行乘 a_{22}，加到第 2 行；$r_2 + a_{22}r_{n+2}$
3. $\cdots$
4. 第 $n+n$ 行乘 a_{2n}，加到第 2 行；$r_2 + a_{2n}r_{n+n}$

得到行列式值为

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

以上过程，一直继续到行列式的第 n 行，最后得到行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

对行列式再施行下列变换：

1. 第1 列和第 $n+1$ 列交换位置；
2. 第2 列和第 $n+2$ 列交换位置；
3. $\cdots$
4. 第n 列和第 $n+n$ 列交换位置；

从而得到行列式:

$$D = (-1)^n \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$D = (-1)^n \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

15. 如果一个 n 阶行列式的每一行，只有一个 1 或 -1 ，其它元素为 0 ，这个行列式的值是什么？

16. 计算n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 1 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 1 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \frac{c_n - \frac{1}{2}c_{n-1}, \cdots}{c_n - \frac{1}{n}c_1}$$

□

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n} \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{t(n\cdots 21)}(\sum_{i=2}^{n}(1-\frac{1}{i}))\prod_{1}^{n}k
$$

$$
= (-1^{\frac{n(n+1)}{2}})n!(\sum_{i=2}^{n}(1-\frac{1}{i}))
$$

17. 计算 4 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

解.

构造一个 5 阶范德蒙行列式:

$$D(a, b.c, d, x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

□

注意到 $a_{45}=x^3$ 的余子式M_{45}就是所求的行列式 D,

$$D(a,b,c,d,x)=A_{15}+xA_{25}+x^2A_{35}+x^3A_{45}+x^4A_{55}$$
$$=(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)$$
$$(c-b)(d-b)(x-b)(d-c)(x-c)(x-d)$$
$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$
$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$
$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$
$$(x^4-(a+b+c+d)x^3+\cdots)$$
$$A_{45}=-(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$
$$M_{45}=(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

18. 证明奇偶排列各占一半。

证法1：设奇偶排列的集合分别为S,T，建立一个映射：

$$S \longrightarrow T:$$

$$\forall \sigma \in S, \sigma \xrightarrow[f]{\text{交换}1,2} \mapsto \tau = f(\sigma) \in T$$

证明这是单射:

$$\sigma_1, \sigma_2 \in S, f(\sigma_1) = f(\sigma_2) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$
$$\Rightarrow |S| \leq |T|$$

类似可证：$|T| \leq |S|$

证法 2， 构造一个行列式，所有元素为 1:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}$$

$$= \text{偶排列个数} - \text{奇排列个数} = 0$$

所以奇偶排列各占一半。

19. 讨论两个排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 和排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$的逆序数关系。

解.

对于排列 $p_1p_2\cdots p_n$, 再定义一个数:

$$s(p_i) = |\{p_k|p_k < p_i, k = 1, 2, ..., i-1\}|$$

即 p_i 的左边比它小的数字的个数。因此有:

$$t(p_i) + s(p_i) = i - 1$$

对所有 i 求和:

$$\sum_{i=1}^{n} t(p_i) + \sum_{i=1}^{n} s(p_i) = \sum_{i=1}^{n} (i-1)$$

$$t(p_1p_2\cdots p_n) + t(p_np_{n-1}\cdots p_1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

20.(第一章习题13.3)

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}\right)$$

解.

$$n = 1, D_1 = a_1(1 + \frac{1}{a_1}) = 1 + a_1$$

归纳假设 $n-1$ 成立。考虑 D_n : □

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\frac{r_i - r_n}{i=1,2,...,n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + a_n D_{n-1}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \prod_{i=1}^{n-1} a_i \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_j}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{1}{a_n} + 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_j}\right) = \prod_{i=1}^{n} a_i \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}\right)$$

21. （第一章习题13.4）计算:$x \neq y$

$$\begin{vmatrix} x+y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix} = \frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}$$

解.

$$D_1 = x+y, D_2 = x^2+xy+y^2 = \frac{x^3-y^3}{x-y}$$

归纳假定本等式对 D_{n-1} 成立：考虑 D_n □

$$D_n = \begin{vmatrix} x & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}$$

$$\underline{c_2 - yc_1} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix} + yD_{n-1}$$

$$\underline{c_3 - yc_2} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix} + yD_{n-1}$$

$$
= \cdots = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} + yD_{n-1}
$$

$$
= x^n + y\frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}
$$

22. 计算:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ b & b & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

解.

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ b & b & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix} \xrightarrow[i=1,2,..,n-1]{r_i - r_{i+1}}$$

$$\begin{vmatrix} x-b & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-b & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-b & a-x \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

$$\underline{\text{take sum by colum 1}} = (x-b)D_{n-1} + b(-1)^{n+1}(a-x)^{n-1}$$

$$= (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1}$$

$$= (x-b)((x-b)D_{n-2} + b(x-a)^{n-2}) + b(x-a)^{n-1}$$

$$= (x-b)^2 D_{n-2} + b(x-a)^{n-2}(x-b) + b(x-a)^{n-1}$$

$$= (x-b)^{n-2}D_2 + b(x-a)^2(x-b)^{n-3}$$
$$+ \cdots + b(x-a)^{n-2}(x-b) + b(x-a)^{n-1}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} x & a \\ b & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-b & a-x \\ b & x \end{vmatrix} = x(x-b) - b(a-x)$$

$$D_n = (x-b)^{n-2}(x(x-b) - b(a-x)) + b(x-a)^2(x-b)^{n-3}$$
$$+ \cdots + b(x-a)^{n-2}(x-b) + b(x-a)^{n-1}$$
$$= x(x-b)^{n-1} + b(x-a)(x-b)^{n-2} + b(x-a)^2(x-b)^{n-3}$$
$$+ \cdots + b(x-a)^{n-2}(x-b) + b(x-a)^{n-1}$$

解法2:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ b & b & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-b+b & a & a & \cdots & a & a \\ 0+b & x & a & \cdots & a & a \\ 0+b & b & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0+b & b & b & \cdots & x & a \\ 0+b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-b)D_{n-1} + b \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 1 & x & a & \cdots & a & a \\ 1 & b & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & x & a \\ 1 & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

$$\frac{i \geq 2 =}{c_i + c_1(-a)}(x-b)D_{n-1} + b \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & b-a & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & b-a & b-a & \cdots & x-a & 0 \\ 1 & b-a & b-a & \cdots & b-a & x-a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_n &= (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1} \\ &= (x-b)((x-b)D_{n-2} + b(x-a)^{n-2}) + b(x-a)^{n-1} \\ &= (x-b)^2 D_{n-2} + b(x-b)(x-a)^{n-2} + b(x-a)^{n-1} \end{aligned}$$

23. 计算:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_{n-1} & a \\ b & b & b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}$$

$$D_n \xrightarrow[i=1,2,\ldots,n-1]{r_i - r_{i+1}} =$$

$$\begin{vmatrix} x_1-b & a-x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2-b & a-x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-b & a-x_n \\ b & b & b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}$$

$$= (x_1-b)D_{n-1} + b(-1)^{n+1}\prod_{i=2}^{n}(a-x_i)$$

$$D_n = (x_1-b)D_{n-1} + b\prod_{i=2}^{n}(x_i-a) \cdots\cdots (1)$$

$$D_n = D'_n = (x_1 - a)D'_{n-1} + a\prod_{i=2}^{n}(x_i - b)$$

$$D_n = (x_1 - a)D_{n-1} + a\prod_{i=2}^{n}(x_i - b)\cdots\cdots(2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow$$

$$D_{n-1}(a - b) = b\prod_{i=2}^{n}(x_i - a) - a\prod_{i=2}^{n}(x_i - b)$$

$$a \neq b \Rightarrow$$

$$D_{n-1} = \frac{1}{a-b}(b\prod_{i=2}^{n}(x_i - a) - a\prod_{i=2}^{n}(x_i - b))$$

$$a \neq b \Rightarrow$$

$$D_n = \frac{1}{a-b}(b\prod_{i=1}^{n}(x_i - a) - a\prod_{i=1}^{n}(x_i - b))$$

$$a = b \Rightarrow$$

$$D_n = (x_1 - a)D_{n-1} + a\prod_{i=2}^{n}(x_i - a)$$

$$= (x_1 - a)((x_2 - a)D_{n-2} + a\prod_{i=3}^{n}(x_i - a)) + a\prod_{i=2}^{n}(x_i - a)$$

$$= (x_1 - a)(x_2 - a)D_{n-2} + a\prod_{i\neq 2}^{n}(x_i - a) + a\prod_{i\neq 1}^{n}(x_i - a)$$

$$D_n = (x_1 - a)(x_2 - a)D_{n-2} + a\sum_{k=1}^{2}\prod_{i\neq k}^{n}(x_i - a)$$

$$= \prod_{i=1}^{2}(x_i - a)D_{n-2} + a\sum_{k=1}^{2}\prod_{i\neq k}^{n}(x_i - a)$$

$$D_n = \prod_{i=1}^{n-2}(x_i - a)D_2 + a\sum_{k=1}^{n-2}\prod_{i\neq k}^{n}(x_i - a)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} x_{n-1} - a & a - x_n \\ a & x_n \end{vmatrix} = x_n(x_{n-1} - a) + a(x_n - a)$$

$$D_n = x_n\prod_{i=1}^{n-1}(x_i - a) + a\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{i\neq k}^{n}(x_i - a)$$

$$D_n = (x_n - a + a)\prod_{i=1}^{n-1}(x_i - a) + a\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{i\neq k}^{n}(x_i - a)$$
$$= \prod_{i=1}^{n}(x_i - a) + a\sum_{k=1}^{n}\prod_{i\neq k}^{n}(x_i - a)$$

第二章习题

4. （第二章习题4）设 A, B 都是 n 阶方阵，证明：

1. 当且仅当 $AB = BA$ 时，$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$;
2. 当且仅当 $AB = BA$ 时，$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$;
3. 当且仅当 $AB = BA$ 时，

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B^{m-k}, m \geq 1,$$

其中 C_m^k 表示组合数：m 个元素选取 k 个元素的组合数。

解.

1. 直接计算：

$$(A\pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$
$$\Leftrightarrow \pm AB \pm BA = \pm 2AB$$
$$\Leftrightarrow AB = BA$$

2.

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$
$$\Leftrightarrow -AB + BA = 0 \Leftrightarrow AB = BA$$

3. 充分性，直接计算。必要性，取 $m=2$，由第一条性质得到$AB = BA$.

□

5. （第二章习题5）计算：(2). $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

归纳假设：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

(3). $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$

解.

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$n \geq 3, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = 0$$

(4). $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

解.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2a&a^2\\0&1&2a\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3a&3a^2\\0&1&3a\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3a&3a^2\\0&1&3a\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4a&6a^2\\0&1&4a\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&na&\frac{n(n-1)}{2}a^2\\0&1&na\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&na&\frac{n(n-1)}{2}a^2\\0&1&na\\0&0&1\end{pmatrix}^n$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a & \frac{(n+1)n}{2}a^2 \\ 0 & 1 & (n+1)a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^n$

解.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = 5^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}5^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 25\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{2n} = 5^n I$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{2n+1} = 5^n \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(6) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right)^n$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right)^2$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 3\left(\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\end{pmatrix}\right),\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\end{pmatrix}\right)\right)^3$$

$$= \left(\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\end{pmatrix}\right)\right)^2$$

$$= 3\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\end{pmatrix}\right)$$

$$= 3^2\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\end{pmatrix}\right)$$

归纳假设:

$$\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\end{pmatrix}\right)^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\end{pmatrix}\right)^{n+1}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\end{pmatrix}\right)^n$$

$$=3^n\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\end{pmatrix}\right)$$

6 (书中第二章习题8，6小题)求逆矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0$$

解.

let $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$, then $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}$ □

解.

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ a_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_n^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

□

7 （书中第二章习题9）求矩阵 X

$$(1)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

解.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

□

$$(2) X \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

解.

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}
\xrightarrow[c_2+c_3]{c_1+2c_3}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{c_1-2c_2}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}
\xrightarrow{c_3-\frac{1}{3}c_1}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3}
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ \cdots \end{pmatrix}
\xrightarrow[\frac{1}{3}c_3]{-1c_1}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ \cdots \end{pmatrix}
$$

$$X=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

原理：

$$\begin{pmatrix}A\\ X\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{右乘}A^{-1}]{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\ XA^{-1}\end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

(4) $A^*X=A^{-1}+2X, A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

解答：

$$|A|X=E+2AX, (|A|E-2A)X=E$$

8 （书中第二章习题10） $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，满足 $AB = A + B$，求 B.

解答：

$$\begin{aligned} AB - B = A \Rightarrow (A-E)B &= A \\ B &= (A-E)^{-1}A \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} A-E & A \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{左乘}(A-E)^{-1}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E & (A-E)^{-1}A \end{pmatrix}$$

9 （书中第二章习题11） 已知 $AP=PB$, 其中

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$$

解答：

$$A=PBP^{-1}$$
$$A^9=PB^9P^{-1}$$

10 （书中第二章习题13）Suppose that $A(E-C^{-1}B)'C'=E$, where

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

求 A

解答：

$$(E-C^{-1}B)'C'=(C-B)'=C'-B'$$

$$A=(C'-B')^{-1}$$

11（书中第二章习题14）试证：若对某个正数 k, 方阵 $A^k=0$,则

$$(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}$$

解.

$$(E+A+\cdots+A^{k-1})(E-A)=$$
$$E+A+\cdots+A^{k-1}-(A+A^2+\cdots+A^{k-1}+A^k)=E$$
$$(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}$$

□

12（书中第二章习题15）Suppose that $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B$ 为3 阶可逆矩阵，求：

1. $(A+3E)^{-1}(A^2-9E)$
2. $(BC'-E)'(AB^{-1})' + [(BA^{-1})']^{-1}$

解答： (1)

$$\begin{aligned}(A+3E)^{-1}(A^2-9E) =&(A+3E)^{-1}(A+3E)(A-3E)\\ =& A-3E\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&(BC' - E)'(AB^{-1})' + [(BA^{-1})']^{-1} \\
&= [(AB^{-1})(BC' - E)]' + [(BA^{-1})^{-1}]' \\
&= \left(AC' - AB^{-1}\right)' + \left(AB^{-1}\right)' \\
&= \left(AC' - AB^{-1} + AB^{-1}\right)' = CA'
\end{aligned}
$$

13（第二章习题16）A 为 n 阶方阵，$f(x)=x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0, a_0\neq 0$. 若 $f(A)=0$. 证明矩阵 A 可逆。

解.

$$
\begin{aligned}
f(A)=A^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_0E=0\\
A^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A=-a_0E\\
(A^{m-1}+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1E)A=-a_0E\\
|A^{m-1}+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1E||A|=(-a_0)^n\neq 0\\
\Rightarrow |A|\neq 0,
\end{aligned}
$$

A 可逆。

□

14（第二章习题17）设 A 是 $m \times n$ 矩阵，若对任意 $n \times 1$ 矩阵 X，都有 $AX = 0$，则 $A = 0$

解.

分别取列向量：

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = 0, Ae_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = 0, \ldots, Ae_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore A = 0$$

15（第二章习题18）设矩阵 A 是 n 阶实对称方阵，如果 $A^2=0$，则 $A=0$.

解.

$$A=A', A^2=0$$

$$A'A=AA'=A^2=0$$

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}, A'=\begin{pmatrix}\alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \cdots \\ \alpha_n'\end{pmatrix}, \alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj}\end{pmatrix}$$

$$A'A=\begin{pmatrix}\alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \cdots \\ \alpha_n'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}=0$$

$$A'A = \begin{pmatrix} \alpha_1'\alpha_1 & \alpha_1'\alpha_2 & \cdots & \alpha_1'\alpha_n \\ \alpha_2'\alpha_2 & \alpha_2'\alpha_2 & \cdots & \alpha_2'\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n'\alpha_1 & \alpha_n'\alpha_2 & \cdots & \alpha_n'\alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha_1'\alpha_1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2 = 0 \Rightarrow a_{i1} = 0, i = 1, 2, ..., n$$

$$\alpha_2'\alpha_2 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^2 = 0 \Rightarrow a_{i2} = 0, i = 1, 2, ..., n$$

$$\cdots$$

$$\alpha_n'\alpha_n = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{in}^2 = 0 \Rightarrow a_{in} = 0, i = 1, 2, ..., n$$

$$\therefore \ A = 0$$

16（第二章习题19）设 $A^2 = E_n$,证明：

$$R(A - E_n) + R(A + E_n) = n.$$

解.

$$A^2 = E_n \Rightarrow |A| \neq 0$$
$$(A + E_n)(A - E_n) = A^2 - E_n = 0$$
$$\Rightarrow R(A - E_n) + R(A + E_n) \leq n$$
$$R(A - E_n) + R(A + E_n)$$
$$\geq R(A - E_n + A + E_n) = R(2A) = R(A) = n$$

□

17（第二章习题20）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵。已知 $R(A)=n$，证明：

$$R(AB)=R(B).$$

解.

设有可逆矩阵 P,Q

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow PAB=PAQQ^{-1}B=\begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}Q^{-1}B$$

$$=\begin{pmatrix} Q^{-1}B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R(AB)=R(PAB)=R(Q^{-1}B)=R(B)$$

18（第二章习题21）设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵，矩阵 A 经过初等行变换化为 B. 用列向量表达这两个矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

则当 $\beta_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} k_j \beta_j$时，有$\alpha_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} k_j \alpha_j$.

解.

Let $k_i = 1$, 矩阵的列矩阵转化为下列线性组合关系：

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \alpha_j = 0, \sum_{j=1}^{n} k_j \beta_j = 0$$

我们要证明：

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \alpha_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} k_j \beta_j = 0$$

□

解.

用矩阵表达线性组合关系：

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow AX = 0, \text{求解：} k_1, k_2, ..., k_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \beta_i = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow BX = 0, \text{求解：} k_1, k_2, ..., k_n$$

□

解.

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B$$

$$\Leftrightarrow$$

$$AX = 0 \Leftrightarrow BX = 0, \text{同解方程}$$

$$A\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow B\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} k_j\alpha_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} k_j\beta_j = 0$$

解法 2： 因为矩阵 A 经过初等行变换化为B，所以存在可逆矩阵P，满足：$B = PA$，故有同解方程：

$$AX = 0 \Leftrightarrow PAX = 0 \Leftrightarrow BX = 0$$

$$A\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow B\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} k_j\alpha_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} k_j\beta_j = 0$$

19（第二章习题23）计算：

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{2n} = D$$

解答：

$$D = \begin{pmatrix} A^{2n} & 0 \\ 0 & B^{2n} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

20（第二章习题24）设 A 是 $n\times n$ 矩阵，证明 $R(A)\le 1$ 当且仅当存在两个 $n\times 1$ 矩阵 U,V，使得 $A=UV'$.

解.

只需证必要性。设 $R(A)=1$， 不妨设 $a_{11}\neq 0$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{2j} \end{vmatrix}=0, j\ge 2$$

$$a_{2j}=\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1j}=k_2a_{1j}, k_2=\frac{a_{21}}{a_{11}}, j\ge 2$$

□

解.

$$a_{2j} = k_2 a_{1j}, j = 1, 2, ..., n$$

$$\text{by the same way,} a_{3j} = k_3 a_{1j}, j = 1, 2, ..., n$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{nj} = k_n a_{1j}, j = 1, 2, ..., n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ k_2 a_{11} & k_2 a_{12} & \cdots & k_2 a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_n a_{11} & k_n a_{12} & \cdots & k_n a_{1n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

21（第二章习题25.3）设 A 是 $n\times n$ 可逆矩阵，A^* 是伴随矩阵。证明：

1. $A^*=|A|A^{-1}$
2. $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=(A^{-1})^*$
3. $(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$
4. $|A^*|=|A|^{n-1}$

解.

(1)$AA^*=|A|E\Rightarrow A^*=|A|A^{-1}.$

(2)$AA^*=|A|E\Rightarrow (A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A,$

$A^{-1}(A^{-1})^*=|A^{-1}|E\Rightarrow (A^{-1})^*=|A^{-1}|A=\frac{1}{|A|}A=(A^*)^{-1}$ □

解.

(3)

$$-A=(-a_{ij}),\text{代数余子式为：}(-1)^{n-1}A_{ij}$$

$$(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$$

$$(4).\ AA^*=|A|E\Rightarrow|A||A^*|=|A|^n$$

$$\Rightarrow|A^*|=|A|^{n-1},(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$$

$$(2).\ (A^{-1})^*=|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A|}A$$

$$\Rightarrow(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$$

□

解法2.

解.

$$\begin{aligned}(-A)^* = |-A|(-A)^{-1} &= (-1)^n|A|(-1)A^{-1} \\ &= (-1)^{n+1}|A|A^{-1} = (-1)^{n+1}A^*\end{aligned}$$

□

22（第二章习题27）4阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & X & Y & Z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta & X & Y & Z \end{pmatrix}.$$

$|A| = 4, |B| = 1,$求：$|A + B|$

解.

Let

$$A + B = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 2X & 2Y & 2Z \end{pmatrix}$$
$$|A + B| = \begin{vmatrix} \alpha & 2X & 2Y & 2Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & 2X & 2Y & 2Z \end{vmatrix}$$
$$8|A| + 8|B| = 40$$

□

23.（第二章习题28） 设 A 为 n 阶方阵，n 是奇数。若 $A'A = E_n, |A| = 1$，证明：$|E_n - A| = 0$.

解.

$$\begin{aligned} A' = A^{-1}, |E_n - A| = |E_n - A|' = |E_n - A'| \\ = |E_n - A^{-1}| = |A^{-1}||A - E_n| = |A - E_n| \\ |E_n - A| = |A - E_n| = (-1)^n |E_n - A| = -|E_n - A| \\ \Rightarrow |E_n - A| = 0 \end{aligned}$$

□

24.（第二章习题29） 设 A 为 n 阶方阵，。若对任何 $n\times 1$ 矩阵 $B, AX=B$，有解。证明：A 是可逆矩阵。

解.

取标准列向量:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$AX=e_i, i=1,2,...,n$ 的解分别记为

$X_1,X_2,...,X_n, AX_i=e_i, i=1,2,...,n$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix}X_1 & X_2 & \cdots & X_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & \cdots & e_n\end{pmatrix}=E_n$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}X_1 & X_2 & \cdots & X_n\end{pmatrix}$$

□

25.（第二章习题30） 设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n+1} & \cdots & \alpha_{n+m} \end{pmatrix}$$

是 $n+m$ 阶方阵，$|A| = a$. 求

$$|B| = \begin{vmatrix} \alpha_{n+1} & \alpha_{n+2} & \cdots & \alpha_{n+m} & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix}$$

解答：矩阵 A 的第 $n+1$ 列经过 n 次交换，到第 1 列，行列式值改变符号 $(-1)^n$. 矩阵 A 的第 $n+2$ 列经过 n 次交换，到第 2 列，行列式值改变符号 $(-1)^n$,...,矩阵 A 的第 $n+m$ 列经过 n 次交换，到第 m 列，行列式值改变符号 $(-1)^n$. 合计改变符号 $(-1)^{nm}$. 所以 $|B| = (-1)^{nm}a$.

26（第二章习题31） 设 A, B, C, D 为 n 阶方阵。若 A 可逆，$AC = CA$，有解。证明：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$

解.

$$\begin{pmatrix} E & \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A(D - CA^{-1}B| = |AD - CB|$$

□

27.（第二章习题33） 设 A 为 n 阶非奇异方阵， B 是 $n\times 1$ 矩阵， b是常数。证明：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & b \end{pmatrix} \text{可逆} \Leftrightarrow B'A^{-1}B \neq b$$

解.

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -B'A^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B' & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & b - B'A^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ B' & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & b - B'A^{-1}B \end{vmatrix} = |A|(b - B'A^{-1}B)$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B' & b \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow b - B'A^{-1}B \neq 0$$

28.（第二章习题34） 设 A 为 n 阶方阵， A^* 是伴随矩阵，证明：

$$R(A^*) = \begin{cases} n, R(A) = n \\ 1, R(A) = n-1 \\ 0, R(A) < n-1 \end{cases}$$

解.

$$R(A) = n \Rightarrow |A| \neq 0, |A^*| \neq 0 \Rightarrow R(A^*) = n$$

$$R(A) = n-1 \Rightarrow |A| = 0, AA^* = 0 \Rightarrow R(A) + R(A^*) \leq n$$

$$R(A^*) \leq 1, R(A) = n-1 \Rightarrow \exists \text{代数余子式 } A_{ij} \neq 0$$

$$\therefore R(A^*) = 1.$$

$$R(A) < n-1 \Rightarrow \text{All } A_{ij} = 0, A^* = 0$$

□

29.（第二章习题35）设矩阵 A 是 n 阶方阵。称 $\text{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 为矩阵 A 的迹。现在设矩阵 A,B 都是 n 阶方阵，证明：

1. $\text{Tr}(A+B)=\text{Tr}(A)+\text{Tr}(B)$
2. $\text{Tr}(kA)=k\text{Tr}(A)$
3. $\text{Tr}(AB)=\text{Tr}(BA)$
4. $AB-BA\neq E_n$
5. 若矩阵 A 可逆，$\text{Tr}(B)=\text{Tr}(ABA^{-1})$

性质4 根据前面三条性质，显然成立。

第5条性质：

$$\mathrm{Tr}(ABA^{-1}) = \mathrm{Tr}(BA^{-1}A) = \mathrm{Tr}(B)$$

解.

性质 1, 2明显成立。 (3). 任意 n 阶方阵 A, 考虑特征多项式: $|\lambda E - A|$, 有;

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{12} & -a_{12} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^n - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$$

$$= \lambda^n - \mathrm{Tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$$

$$\because |\lambda E - AB| = |\lambda E - BA| \Rightarrow \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

□

30.（第二章习题36） 设 A 为 n 阶方阵， $R(A)=1, \mathrm{Tr}(A)=2$,求$|\lambda E-A|$.

解.

$$R(A)=1 \Rightarrow \exists\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

$$A=\alpha\beta=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E_n-A|=|\lambda E_n-\alpha\beta|=\lambda^{n-1}|\lambda-\beta\alpha|$$

$$\lambda^n-\mathrm{Tr}(A)\lambda^{n-1}=\lambda^n-2\lambda^{n-1}$$

31. Suppose B is a $r \times r$ matrix, and C is a $r \times n$ matrix with $R(C) = r$. Prove:

1. If $BC = 0$, Then $B = 0$
2. if $BC = C$, Then $B = E$

解.

There exist inverse matrix $Q_{r\times r}, P_{n\times n}$

$$QCP = \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots (1)$$

$$\Rightarrow BC = BQ^{-1}QCPP^{-1} = \begin{pmatrix} BQ^{-1} & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \cdots\cdots (2)$$

$$BC = 0 \Rightarrow^{(2)} \begin{pmatrix} BQ^{-1} & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} BQ^{-1} & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow BQ^{-1} = 0, B = 0$$

□

解.

$$
\begin{aligned}
BC = C \Rightarrow^{(2)} \begin{pmatrix} BQ^{-1} & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = C \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} BQ^{-1} & 0 \end{pmatrix} = CP \cdots\cdots (3) \\
QCP = \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow CP = Q^{-1} \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots (4) \\
\Rightarrow^{(3)+(4)} \begin{pmatrix} BQ^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow BQ^{-1} = Q^{-1} \Rightarrow B = E
\end{aligned}
$$

□

32. 已知3×3实矩阵 $A=(a_{ij})$,满足 $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$,其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式,且 $a_{11}\neq 0$,计算行列式 $|A|$.

解.

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}=A'$$

$$|A^*A|=|A|^3, A^*=A'\Rightarrow |A|^2=|A|^3$$

$$|A|^2(|A|-1)=0$$

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\neq 0$$

$$|A|=1$$

□

33. 已知方阵 A,满足 $A^2 - A - 2E = 0$,求$A^{-1}, (A+2E)^{-1}$

解.

$$A^2 - A - 2E = 0 \Rightarrow A^2 - A = 2E \Rightarrow A\frac{1}{2}(A - E) = E$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - E)$$

$$A^2 = A + 2E \Rightarrow (A + 2E)^{-1} = (A^{-1})^2 = \frac{1}{4}(A - E)^2$$

$$= \frac{1}{4}(A^2 - 2A + E) = \frac{1}{4}(-A + 3E)$$

$$\therefore (A + 2E)^{-1} = \frac{1}{4}(-A + 3E)$$

□

34. 已知方阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,满足

$$A^*X\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=8A^{-1}X+E,$$

求X.

解.

注意公式：$AA^*=|A|E, |A||A^*|=|A|^n$

$$|A|=4,\ A^*=|A|A^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=\left|\frac{1}{2}A^*\right|\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}=\frac{1}{4}|A^*|(A^*)^{-1}$$

$$=\frac{1}{4}|A|^2|A|^{-1}A=A$$

解.

代入原来等式:

$$|A|A^{-1}XA = 8A^{-1}X + E$$

$$4A^{-1}XA = 8A^{-1}X + E \Rightarrow 4XA = 8X + A$$

$$4X(A-2E) = A \Rightarrow 4X = A(A-2E)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} A-2E \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

解.

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ A(A-2E)^{-1} \end{pmatrix}$$

□

解.

$$A(A-2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

35. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，证明：存在一个 $n\times n$ 非零矩阵 B，使 $AB=0$ 的充分必要条件是 $|A|=0$.

解.

$$
\begin{aligned}
AB=0, \text{if } |A|\neq 0 \Rightarrow A \text{ 可逆}, A^{-1}(AB)=0 \\
\Rightarrow B=0, \text{矛盾} \\
|A|=0 \Rightarrow R(A)=r<n \Rightarrow \\
\exists \text{ 可逆矩阵}, P, Q, PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{take } X, X=Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}\neq 0(\text{why}) \\
Q^{-1}X=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$PAX = PAQQ^{-1}X$$

$$= \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow PAX = 0 \Rightarrow AX = P^{-1}PAX = 0$$

$$\text{Note } X = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} \neq 0$$

36. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$.

求 A^{-1}.

解.

Let $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ a_n & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \end{pmatrix}$. □

解.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_n^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

□

37. Let $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$, find A^{-1}

解.

$$A=\begin{pmatrix}B&B\\B&-B\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}B&B&E&0\\B&-B&0&E\end{pmatrix}\xrightarrow{B^{-1}r_1}\begin{pmatrix}E&E&B^{-1}&0\\B&-B&0&E\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-Br_1}\begin{pmatrix}E&E&B^{-1}&0\\0&-2B&-E&E\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2^{-1}B^{-1}r_2}\begin{pmatrix}E&E&B^{-1}&0\\0&E&2^{-1}B^{-1}&-2^{-1}B^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} E & 0 & 2^{-1}B^{-1} & 2^{-1}B^{-1} \\ 0 & E & 2^{-1}B^{-1} & -2^{-1}B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} B^{-1} & B^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1} \end{pmatrix}, B^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} B & B \\ B & -B \end{pmatrix} = \frac{1}{4}A$$

38. 设 A 为 n× n 矩阵，证明 :如果 $A^2 = E$, 那么 rank (A + E) + rank(A - E) = n

解.

$$\begin{aligned} A^2 = E \Rightarrow (A+E)(A-E) = 0 \\ \Rightarrow R(A+E) + R(A-E) \leq n \\ R(A+E) + R(A-E) = R(A+E) + R(E-A) \\ \geq R(A+E+E-A) = R(2E) = n \\ \therefore R(A+E) + R(A-E) = n \end{aligned}$$

□

39. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, 则 A 是列满秩的充分必要条件为存在 m 级可逆阵 P 使 $PA=\begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$ 同样地, A为行满秩的充分必要条件为存在 n级可逆矩阵 $Q, AQ=\begin{pmatrix} E_m & 0 \end{pmatrix}$

解.

Suppose that

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Note that: $R(A)=n\leq m$. 因为存在 n 阶子式不为零，所以矩阵 A 的第一列存在元素 $a_{i1}\neq 0$, 不妨设 $a_{11}\neq 0$. 否则可以左乘初等矩阵 $E(1,i)$，交换第 1 行和第 i 行。

□

$$\prod_{i=2}^{m} E(i,1(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}))A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

$$E(1(\frac{1}{a_{11}}))\prod_{i=2}^{m} E(i,1(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}))A = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Let } P_1 = E(1(\frac{1}{a_{11}}))\prod_{i=2}^{m} E(i,1(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}))$$

所以得到可逆矩阵 P_1

$$P_1A = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

类似对第 2 列元素，第 3 列元素，...,第 n 列元素讨论：得到可逆矩阵：$P_2, P_3, ..., P_n$

$$P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

最后令：$P = P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1$. 则有：

$$PA = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

40. $m\times n$矩阵 A 的秩为 r, 则有 $m\times r$ 的列满秩矩阵 P 和 $r\times n$ 的行满秩 矩阵 Q, 使 $A=PQ$. (习题7的推广版)

解.

存在可逆矩阵,P_1(m阶方阵),Q_1(n阶方阵)

$$P_1AQ_1=\begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} E_r \\ 0_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=P_1^{-1}\begin{pmatrix} E_r \\ 0_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \end{pmatrix}Q_1^{-1}$$

□

解.

令

$$P_{m\times r}=P_1^{-1}\begin{pmatrix}E_r\\0_{(m-r)\times r}\end{pmatrix},Q_{r\times n}=\begin{pmatrix}E_r & 0_{r\times(n-r)}\end{pmatrix}Q_1^{-1}$$

$$A=P_{m\times r}Q_{r\times n}$$

$$R(P_{m\times r})=R\left(P_1^{-1}\begin{pmatrix}E_r\\0_{(m-r)\times r}\end{pmatrix}\right)=R\begin{pmatrix}E_r\\0_{(m-r)\times r}\end{pmatrix}=r$$

$$R(Q_{r\times n})=R\left(\begin{pmatrix}E_r & 0_{r\times(n-r)}\end{pmatrix}Q_1^{-1}\right)=R\begin{pmatrix}E_r & 0_{r\times(n-r)}\end{pmatrix}=r$$

□

解.

特别，当 $R(A)=1$,

$$P=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix}$$

□

第三章习题

23. 求过点 $M_0(2,1,3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程。

解.

第一步，求经过点 $M_0(2,1,3)$ 并且与直线 L 垂直的平面 π :

$$3(x-2)+2(y-1)-1(z-3)=0$$

即: $\pi: 3x+2y-z-5=0$ 第二步，求 π 与 直线 L 的交点: 将直线参数方程:

$$x=3t-1, y=2t+1, z=-t$$

带入平面方程:

$$3(3t-1)+2(2t+1)+t-5=0$$
$$14t=6, t=\frac{3}{7}, M_1(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$$

$M_1(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7})$为交点。所求直线由点

$$M_0(2,1,3), M_1(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7})$$

决定,所求直线为:

$$\frac{x-2}{\frac{2}{7}-2} = \frac{y-1}{\frac{13}{7}-1} = \frac{z-3}{-\frac{3}{7}-3}$$
$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-4}$$

25. 求过点 $M(-1,2,3)$,垂直于直线:

$$L:\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$$

且平行于平面:

$$\pi:7x+8y+9z+10=0$$

的直线方程。

解.

设所求直线为 L_1,方向向量为:$\mathbf{s_1}$. L_1 与 L 垂直,则有它们的方向向量垂直: $\mathbf{s_1}\perp\mathbf{s}=(4,5,6)$. L_1 与 π 平行,则有$\mathbf{s_1}\perp\mathbf{n}=(7,8,9)$ □

$$\mathbf{s_1} = \mathbf{s} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

取 L_1 的方向量：$(1,-2,1)$，则 L_1 方程为：

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

33. 求点 $M(-1,2,0)$ 在平面 $\pi: x+2y-z+1=0$ 上的投影。

解.

$M(-1,2,0)$ 在平面 $\pi: x+2y-z+1=0$ 上的投影点:经过 M 并且与平面 π垂直的直线 L,与平面 π 的交点就是投影点M_1. L 的方向向量是平面 π 的法向量:$(1,2,-1)$. 所以直线 L 为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$$

将 $x=t-1, y=2t+2, z=-t$ 代入平面 π 的方程:

$$t-1+2(2t+2)+t+1=0, t=-\frac{2}{3}$$

投影点为:$(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

□

34. 求直线L:

$$\begin{aligned} 2x - 4y + z = 0 \\ 3x - 2z - 9 = 0 \end{aligned}$$

在平面 $\pi : 4x - y + z = 1$上的投影直线。

解.

分析：找到经过直线 L 且与 π 垂直的平面π_1， 平面π_1, π 的交线即为投影线。设

$$\pi_1 : \lambda(2x - 4y + z) + \mu(3x - 2z - 9) = 0$$

其法向量为：$(2\lambda + 3\mu, -4\lambda, \lambda - 2\mu)$，与平面 π 的法向量垂直：

$$\begin{aligned} 4(2\lambda + 3\mu) + 4\lambda + \lambda - 2\mu = 0 \\ 13\lambda + 10\mu = 0, \mu = 13, \lambda = -10 \end{aligned}$$

□

$$\pi_1 : 19x + 40y - 36z - 117 = 0$$

$$\pi : 4x - y + z = 1$$

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{c} 19x + 40y - 36z - 117 = 0 \\ 4x - y + z = 1 \end{array} \right\}$$

为投影直线

35. 求点 $A(2,4,3)$ 在直线：$L: x=y=z$ 上投影点坐标，并求出点A 到该直线的距离。

解.

分析：首先求出经过点A，并且与直线 L 垂直的平面 π,然后求出平面 π 与直线 L 的交点，即为投影点。根据点法式：

$$\pi: x-2+y-4+z-3=0$$
$$x+y+z-9=0$$

将直线参数方程 $x=y=z=t$ 代入平面 π 的方程，得到$t=3$. 所以投影点为 $M(3,3,3)$.

$$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{2}$$

为距离。

求点到直线的距离用公式:

$$d = \frac{|\mathbf{s} \times \overrightarrow{OA}|}{|\mathbf{s}|}$$

$$\mathbf{s} \times \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{s} \times \overrightarrow{OA}| = \sqrt{6}$$

$$d = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

36. 设直线 L 经过点 $M(-4,-5,3)$，并且与直线 L_1 和 L_2 相交，其中：

$$L_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$$
$$L_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$$

求直线方程 L.

解.

设所求直线方程 L 为：

$$\frac{x+4}{m} = \frac{y+5}{n} = \frac{z-3}{p}$$

L 与 L_1 相交，得到：

$$\overrightarrow{MM_1} = (3,2,-1), [\mathbf{ss_1}\overrightarrow{MM_1}] = \begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4m + 12p = 0 \Rightarrow m + 3p = 0$$

L 与 L_2 相交，得到：

$$\overrightarrow{MM_2} = (6, 4, -2) = 2(3, 2, -1)$$

$$[\mathbf{ss_2}\overrightarrow{MM_2}] = \begin{vmatrix} m & n & p \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7m - 13n - 5p = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{c} m + 3p = 0 \\ 7m - 13n - 5p = 0 \end{array} \right\}, p = 1, m = -3, n = -2$$

$$L : \frac{x+4}{-3} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

解法2： 分析，点 M 分别和直线 L_1, L_2 决定平面 π_1, π_2. 这两个平面的交线 L 经过点 M,且分别与 L_1, L_2 共面，我们只需说明 L 分别与它们相交。

- M和直线 L_1 决定的平面设为 $\pi_1 : L_1$ 上取一个点 $M_1(-1, -3, 2)$.

$$\overrightarrow{MM_1} = (3, 2, -1), \mathbf{s_1} = (3, -2, -1)$$

$$\mathbf{n_1} = \mathbf{s_1} \times \overrightarrow{MM_1} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4(\mathbf{i} + 3\mathbf{k})$$

$$\pi_1 : 1(x+4) + 0(y+5) + 3(z-3) = 0$$

$$x + 3z - 5 = 0$$

1. M和直线 L_2 决定的平面设为 π_2 : L_1 上取一个点 $M_2(2,-1,1)$.

$$\overrightarrow{MM_2}=(6,4,-2)=2(3,2,-1),\mathbf{s_2}=(2,3,-5)$$

$$\mathbf{n_2}=\mathbf{s_2}\times\overrightarrow{MM_2}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 3 & -5\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=7\mathbf{i}-13\mathbf{j}-5\mathbf{k}$$

$$\pi_2:7(x-2)-13(y+1)-5(z-1)=0$$

$$7x-13y-5z-22=0$$

2. 所求直线为

$$L:\begin{Bmatrix} x+3z-5=0\\ 7x-13y-5z-22=0\end{Bmatrix}$$

L 的方向向量为：

$$\mathbf{s} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & -13 & -5 \end{vmatrix} = 13(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

可以看出：

$$\mathbf{s} \nparallel \mathbf{s_1}, \mathbf{s} \nparallel \mathbf{s_2}$$

所以直线L 与直线 L_1 和直线 L_2 都要相交。

37. 设平面 π 满足：

- 垂直于平面 $z=0$
- 经过点 $M_0(1,-1,1)$ 到直线 $L:\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$的垂线。

求平面 π 的方程。

解.

分析：平面 π 经过点 $M_0(1,-1,1)$，考虑求 π 的法向量 $\mathbf{n}$. π 垂直于平面 $z=0$, 所以有： $\mathbf{n}\perp(0,0,1)$. 设点 $M_0(1,-1,1)$ 到直线 L 垂线为 L_1, 则 $\mathbf{n}\perp\mathbf{s_1},\mathbf{s_1}$ 是L_1 方向向量。所以： $\mathbf{n}=(0,0,1)\times\mathbf{s_1}$. □

第一步：求经过点$M_0(1,-1,1)$ 并且与直线L 垂直的平面 π_1 : 注意到直线L 的方向量即为π_1的法向量：

$$\mathbf{s}=(0,1,-1)\times(1,0,0)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-(\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

$$\pi_1: y+1+z-1=y+z=0$$

第二步：求 π_1 与与直线L 的交点 M_1 :

$$\left\{\begin{matrix} y-z+1=0\\ x=0\\ y+z=0\end{matrix}\right\}, x=0, y=-\frac{1}{2}, z=\frac{1}{2}$$

$$M_1(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

第三步：L_1 的方向向量为 $\overrightarrow{M_0M_1} = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.取方向向量：

$$\mathbf{s_1} = (-2, 1, -1)$$

第四步：计算平面π 的法向量：

$$\mathbf{n} = (0, 0, 1) \times \mathbf{s_1} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

第五步：写出平面 π 的方程：

$$x - 1 + 2(y + 1) = x + 2y + 1 = 0$$

38. 求直线

$$L_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$$

和直线

$$L_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}$$

的公垂线与它们的交点，及公垂线方程。

解.

本体关键是求交点。首先设直线 L_1 的相关参数为：

$$\begin{aligned} M_1 &= & (3,0,1) \\ \mathbf{s_1} &= & (2,1,0) \\ \text{参数方程：} & & x=3+2t, y=t, z=1 \\ \text{公垂线交点：} P_1 & & (3+2t,t,1) \end{aligned}$$

经过点 P_1 与直线 L_1 垂直的平面为：

$$\begin{aligned} \pi_1: \quad & 2(x-3-2t)+y-t=0 \\ & 2x+y-5t-6=0 \end{aligned}$$

□

再设直线 L_2 的相关参数为：

$$
\begin{aligned}
M_2 &= \quad (-1,2,0) \\
\mathbf{s_2} &= \quad (1,0,1) \\
\text{参数方程：} &\quad x=u-1, y=2, z=u \\
\text{公垂线交点：} P_2 &\quad (u-1,2,u)
\end{aligned}
$$

经过点 P_2 与直线 L_2 垂直的平面为：

$$
\begin{aligned}
\pi_2: \quad & (x-u+1)+z-u=0 \\
& x+z-2u+1=0
\end{aligned}
$$

注意到点 P_2 在公垂线上，必然在平面 π_1 上，所以有：

$$2(u-1)+2-5t-6=2u-5t-6=0$$

注意到点 P_1 在公垂线上，必然在平面 π_2 上，所以有：

$$3+2t+1-2u+1=-2u+2t+5=0$$

解方程组：

$$\begin{aligned} 2u-5t&=6\\ -2u+2t&=-5\\ t=-\frac{1}{3},u&=\frac{13}{6} \end{aligned}$$

得到交点：

$$P_1(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$$
$$P_2(\frac{7}{6}, 2, \frac{13}{6})$$

解法2. 根据前面假设，公垂线与直线 L_1 的交点设为 $P_1(3+2t, t, 1)$，公垂线与直线 L_2 的交点设为 $P_2(u-1, 2, u)$. 则有：$\overrightarrow{P_1P_2}$ 平行于 $\mathbf{s_1}\times\mathbf{s_2}$，所以：

$$\mathbf{s_1}\times\mathbf{s_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (u-2t-4, 2-t, u-1)$$

$$\frac{u-2t-4}{1}=\frac{2-t}{-2}=\frac{u-1}{-1}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{2-t}{-2}=\frac{u-1}{-1}\\ \frac{u-2t-4}{1}=\frac{u-1}{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{c}2u=4-t\\ 2u=2t+5\end{array}$$

$$t=-\frac{1}{3},u=\frac{13}{6}$$

$$P_1(\frac{7}{3},-\frac{1}{3},1),P_2(\frac{7}{6},2,\frac{13}{6})$$

第四章习题

1.（书中习题3）设 A 是可逆矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$，是 k 个n 维列向量。证明：

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$$

线性无关，当且仅当

$$A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_k$$

线性无关.

Proof.

Let $B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{pmatrix}$. then

$$AB = \begin{pmatrix} A\alpha_1 & A\alpha_2 & \cdots & A\alpha_k \end{pmatrix}$$

□

Proof.

B 的列向量由向量组：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ 组成，既然$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$,是线性无关组，因此方程：

$$BX = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

$$BX = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_k\alpha_k = 0$$

只有零解。

AB 的列向量由向量组：

$$A\alpha_1, A\alpha_2, ..., A\alpha_k$$

组成，$A\alpha_1, A\alpha_2, ..., A\alpha_k$ 是否线性无关组，取决于下列方程 □

Proof.

$$ABX = \begin{pmatrix} A\alpha_1 & A\alpha_2 & \cdots & A\alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

$$ABX = x_1 A\alpha_1 + x_2 A\alpha_2 + x_k A\alpha_k = 0$$

是否有非零解。因为矩阵 A 可逆，所以方程 $BX = 0$ 与方程 $ABX = 0$ 是同解方程：

$$BX_0 = 0 \Leftrightarrow ABX_0 = 0$$

既然 $BX = 0$ 只有零解，所以 $ABX = 0$ 也只有零解，所以向量组：$A\alpha_1, A\alpha_2, ..., A\alpha_k$ 是线性无关组。 □

2. （书中第四章习题5）判断下列命题是否成立：

（1）若有常数 k_1, k_2, k_3 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关；

（2）若向量 β 不能表示为 向量 α_1, α_2 的线性组合，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 线性无关；

（3）若向量组 α_1, α_2 线性无关，向量 β 不能被 α_1, α_2 线性表示，则向量 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 线性无关.

（4）若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，则其中任何一个向量可以被其余向量线性表示；

（5）若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任意一个向量可以被其余向量线性表示，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关。

（6）若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任意两个都是线性无关，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

（7）设又一组数：k_1, k_2, k_3 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$, 且 α_3 可以由 α_1, α_2 线性表示。则 $k_3 \neq 0$.

（8）若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性相关的，则 α_1 可以被其余向量线性表示。

解.

(1) 错误。当 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 时，线性无关的三个向量也满足 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$.

(2) 错误。只要向量组 α_1, α_2 线性相关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 也是线性相关的。

(3) 对的。反证法：若 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 是线性相关的，则存在不全为零的数：k_1, k_2, k_3，满足：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\beta = 0$$

由此看出，$k_3 \neq 0$, 否则 k_1, k_2 不全为零，从而 α_1, α_2 是线性相关的，与前提矛盾。但是 $k_3 \neq 0$,又与 另外一个前提矛盾。所以，$\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 是线性无关的。

(4) 错误。应该是：存在一个向量被其余向量线性表示。 □

解.

(5) 正确。

(6) 错误。取向量组：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,任意两个线性无关，但三个向量线性相关。

(7) 错误。取 $\alpha_3 = 0$, 零向量，则 k_3 可以取零。或者，所有 k_1, k_2, k_3 都取零，等式成立，这与 α_3 被α_1, α_2 线性表示，没有任何关系，

(8) 错误。例如 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，但是 α_1 不能被 α_2, α_3 线性表示。 □

3 (书中第四章习题6) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关，向量 β 可以由它们线性表示，则线性表示的系数是唯一的。即

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

系数 $k_1, k_2, ..., k_m$ 是唯一的。

4 (书中第四章习题7) 若向量 β 可以由$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 唯一线性表示，则向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关。

解.

设

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m$$

反证法，如果：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性相关，则存在不全为零的数：$b_1, b_2, ..., b_m$，使得：

□

$$b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_m\alpha_m=0\Rightarrow$$

$$\beta=(a_1+b_1)\alpha_1+(a_2+b_2)\alpha_2+\cdots+(a_m+b_m)\alpha_m$$

$$a_1=a_1+b_1,a_2=a_2+b_2,\ldots,a_m=a_m+b_m$$

$$b_1=b_2=\cdots=b_m=0$$

与$b_1,b_2,\ldots,b_m$不全部为零矛盾。所以，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性无关。

5. (书中第四章习题8)设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，证明：

1. α_1 可由 α_2,α_3 线性表示，
2. α_4 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，

解.

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，存在不全为零的数：k_1,k_2,k_3，使得：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$$

由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，可得：α_2,α_3 线性无关。因此：$k_1\neq 0$,

$$\alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-\frac{k_3}{k_1}\alpha_3\cdots\cdots(1)$$

□

（2）反证法，假设 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，即有线性表达式：

$$\alpha_4 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \cdots\cdots (2)$$

等式（1）代入等式（2），得到：

$$\alpha_4 = a_1(-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \frac{k_3}{k_1}\alpha_3) + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$$

$$= (-a_1\frac{k_2}{k_1} + a_2)\alpha_2 + (-a_1\frac{k_3}{k_1} + a_3)\alpha_3$$

向量α_4 可由 α_2, α_3 线性表示，从而$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关，跟已知条件矛盾，所以α_4 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

7 (书中第四章习题9) 已知 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关，令

$$\beta_1 = \alpha_1 + \beta, \beta_2 = \alpha_2 + 2\beta, \beta_3 = \alpha_3 + 3\beta$$

证明： $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta$ 线性无关.

解.

Suppose that:

$$\begin{aligned} k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 + k_4\beta = 0 \Rightarrow \\ k_1(\alpha_1 + \beta) + k_2(\alpha_2 + 2\beta) + k_3(\alpha_3 + 3\beta) + k_4\beta = 0 \\ \Rightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + (k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4)\beta = 0 \end{aligned}$$

向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关, 所以

$$k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0, k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4 = 0$$

所以 $k_4 = 0$,得到$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta$ 线性无关. □

8（书中第四章习题10）设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ 线性表示。若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是线性无关组，则向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ 也是线性无关组。

解.

根据题意，有：

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{m1}\beta_m \\ \alpha_2 &= a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{m2}\beta_m \\ &\cdots\cdots \\ \alpha_m &= a_{1m}\beta_1 + a_{2m}\beta_2 + \cdots + a_{mm}\beta_m \end{aligned}$$

□

解.

利用矩阵表达，向量看作是列向量，有

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$m \leq R\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix} \leq R\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix} \leq m$$

$$\Rightarrow R\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{pmatrix} = m$$

因此，向量组 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ 是线性无关组。 □

9（书中第四章习题11）设向量 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，但不能由 α_2, α_3 线性表示。证明： α_1 可由 $\alpha, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

10（书中第四章习题12）设向量组：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 与向量组：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta$ 的秩相等，证明它们是等价向量组。

解.

It is sufficient to prove that $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 的极大无关组也是 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta$ 的极大无关组。

□

11（书中第四章习题13）确定数 a 使得向量组：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\a\\\vdots\\1\end{pmatrix},\dots,\alpha_n=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\a\end{pmatrix}$$

的秩为n.

解.

Let

$$A=\begin{pmatrix}a&1&\cdots&1\\1&a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&a\end{pmatrix},|A|=(a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

$|A|\neq 0$ 当且仅当 $a\neq 1-n,1$

12（书中第四章习题14）设矩阵 A 是 $n\times p$ 矩阵，B 是 $p\times m$ 矩阵，利用向量证明：

$$R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$$

解.

Let $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{pmatrix}$ □

Suppose that

$$AB = C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1m} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \end{pmatrix}$$

$$AB = A\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB_{11} & AB_{12} & \cdots & AB_{1m} \end{pmatrix}$$

$$C_{1j} = AB_{1j} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}$$

$$C_{1j} = b_{1j}A_{11} + b_{2j}A_{12} + \cdots + b_{pj}A_{1p}, j = 1, 2, ..., m$$

所以，矩阵 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表示，$R(C) \le R(A)$.

$$AB = C = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ \vdots \\ C_{n1} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{p1} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_{11}B \\ A_{21}B \\ \vdots \\ A_{n1}B \end{pmatrix}$$

$$C_{i1} = A_{i1}B = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \cdots \\ B_{p1} \end{pmatrix}$$

$$C_{i1} = a_{i1}B_{11} + a_{i2}B_{21} + \cdots + a_{ip}B_{p1}, i = 1, 2, ..., m$$

矩阵C的行向量组可以由矩阵 B 的行向量组线性表示，因此 $R(C) \leq R(B)$.

$$R(AB) = R(C) \leq \min\{R(A), R(B)\}$$

13（书中第四章习题15）设有向量组：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

试求：

1. 该向量组的秩；
2. 该向量组的极大无关组；
3. 用极大无关组线性表示其它向量。

构造矩阵A：初等行变换不改变矩阵列向量的线性关系

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&0&1\\2&1&1&2&1\\1&3&4&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_1,r_3-r_1]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&3&0&1\\0&-3&-5&2&-1\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+3r_3]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&0&-2&2&-1\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+\frac{1}{2}r_2]{r_1+\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&-2&2&-1\\0&1&0&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&-2&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_4=\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3$$

14（书中第四章习题16）试证：由向量：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$

解.

只需证明空间中任意一个向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，即：$\alpha \in L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

□

Let $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, then $|A| \neq 0$, we know $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。假设

$$AX = \alpha$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - r_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & 0 & b-\frac{c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{2} \end{pmatrix}$$

$$x = a - b, y = b - \frac{c}{2}, z = \frac{c}{2}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (b-\frac{c}{2})\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{c}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

所以：$\alpha \in L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \mathbf{R^3} = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

15（书中第四章习题17）由 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 生成的向量空间为 V_1. 由 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 生成的向量空间为 V_2. 证明 $V_1 = V_2$.

解.

只需证明：向量组α_1, α_2, 和向量组 β_1, β_2,线性等价,即可以互相线性表示。 □

首先证明： $\beta_1, \beta_2 \in V_1$, 等价于：

$$\beta_1 = k_{11}\alpha_1 + k_{21}\alpha_2, \beta_2 = k_{12}\alpha_1 + k_{22}\alpha_2$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2, \beta_2 = 3\alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in V_1$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 2\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2, \alpha_2 = \frac{1}{3}\beta_2, \alpha_1, \alpha_2 \in V_2$$

16（书中第四章习题18）设

$$V_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}, x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$$
$$V_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}, x_1 + x_2 + ... + x_n = 1\}$$

问：V_1 和 V_2 是不是向量空间？为什么？

解.

- if $\alpha, \beta \in V_1$, then

  $$\alpha+\beta = (x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n), x_1+y_1+x_2+y_2+...+x_n+y_n = 0$$

  hence $\alpha + \beta \in V_1$.

- $$k\alpha = (kx_1, kx_2, ..., kx_n), kx_1 + kx_2 + ... + kx_n = 0, k\alpha \in V_1$$

V_1 是一个向量空间。 □

- V_2 不是向量空间，因为对加法和数乘不封闭：

$$\alpha, \beta \in V_2$$
$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$
$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots + x_n + y_n = 2$$
$$\Rightarrow \alpha + \beta \notin V_2$$

17（书中第四章习题19）设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

证明：

1. 这两组向量都是 $\mathbf{R}^3$ 的基；
2. 求第一个基到第二个基的过渡矩阵；
3. 求向量 $(0, -2, 3)$ 分别在这两组基下的坐标；

解.

(1) 只需证明这两组向量都是线性无关组。Let $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} |A| \neq 0, |B| \neq 0.$ 所以它们都是线性无关组，都可以作为 $\mathbf{R}^3$ 的基底.

(2) 设（1）到（2）的过渡矩阵为P,则有：

$$B = AP, P = A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

□

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -7 & -11 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

(3). 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,分别以下列方程求坐标:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 29\alpha_1 - 7\alpha_2 - 5\alpha_3$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -10 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -7 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 37 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{71}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{37}{4} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{71}{4}\beta_1 - \frac{25}{2}\beta_2 + \frac{3}{4}$$

18（书中第四章习题20）设$a_1, a_2, \ldots, a_k$ 是$k, k \leq n$ 个互不相同的数，证明：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} \end{pmatrix}, \ldots, \alpha_k = \begin{pmatrix} 1 \\ a_k \\ \vdots \\ a_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

线性无关。

解.

令：

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1^{k-1} \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_1^{k-1} \end{pmatrix}, \ldots, \beta_k = \begin{pmatrix} 1 \\ a_k \\ \vdots \\ a_1^{k-1} \end{pmatrix}$$

根据克莱姆法则，$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{k-1} & a_k^{k-1} & \cdots & a_k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0$，所以：$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$，线性无关，增加分量变为：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$，还是线性无关。

19（书中第四章习题21）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$,与向量组$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s$,的秩相等，且$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$,可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s$,线性表示，证明这两个向量组等价。

解.

只需证明： $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s$, 也可以被 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$,线性表示。设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$,的极大无关组为

$$\Omega_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_d\},d=R(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r)$$

设$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s$,的极大无关组为

$$\Omega_2=\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_d\},d=R(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s)$$

根据线性表示的传递性，Ω_1 可以由 Ω_2 线性表示： □

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_d \end{pmatrix} A$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}, R(A) \geq R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) = d$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_d \end{pmatrix} A^{-1}$$

所以， $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$, 也可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$,线性表示。从而 Ω_1 与 Ω_2 等价，导出两个向量组等价。

20（书中第四章习题22）设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_m$,的秩为 s, 向量组：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 的秩是 t. 证明：$t \geq r + s - m$.

解.

Let

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha_{r+1} & \alpha_{r+2} & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix}$$

and let $C = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$. 所以有：

$$s = R(C) = R\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leq R(A) + R(B)$$

But $R(A) = t, R(B) \leq m - r$. Therefore:

$$s \leq t + m - r \Rightarrow t \geq s + r - m$$

□

21（书中第四章习题23）设有 n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$和 n 维列向量组 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$. 设：

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_t \end{pmatrix}$$

证明： $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$可以由 n 维列向量组 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$ 线性表示的充分必要条件是：存在矩阵 C, 满足：$A = BC$

解.

$$C = (c_{ij})_{t\times s}, A = BC$$

$$\Leftrightarrow \alpha_j = c_{1j}\beta_1 + c_{2j}\beta_2 + ... + c_{tj}\beta_t = A\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{tj} \end{pmatrix}$$

$$j = 1, 2, ..., s$$

22（书中第四章习题24）设矩阵 A 经过初等列变换化为矩阵 B, 证明 A 的列向量组与 B 的列向量组等价。

解.

$$A \xrightarrow[\text{右乘可逆矩阵P}]{\text{初等列变换}} B = AC$$

根据上一题，B 的列向量由 A 的列向量线性表示. 注意到 C 是可逆矩阵，$A = BC^{-1}, A$ 的列向量也可以由B 的列向量线性表示。 □

23（书中第四章习题25）设有列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$和列向量组 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$,满足：

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \end{pmatrix} K$$

K为 $s \times r$矩阵。且$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$线性无关，证明 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$线性无关的条件是$R(K) = r$.

解.

必要性：if $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$线性无关, then $R\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_r \end{pmatrix} = r$. Hence $r \leq R(K) \leq r, R(K) = r$. 充分性：if $R(K) = r$, then

$$\begin{aligned} R(\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \end{pmatrix} K) \geq R\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \end{pmatrix} + R(K) - s \\ R\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_r \end{pmatrix} \geq R(K) = r \\ R\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_r \end{pmatrix} = r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r \end{aligned}$$

线性无关。 □

24（书中第四章习题26）设 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 是一组 n 维向量。证明该向量组线性无关的充分必要条件是：任意n 维向量可以由它们线性表示。

Proof.

必要性：根据 $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ 维数为 n，若$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$线性无关，则为基底，任意向量可以被它们线性表示；充分性：考虑到标准单位向量都可以被它们线性表示，故它们自身就是极大无关组，因而是线性无关向量。 □

25（书中第四章习题27）设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 是$\mathbf{R}^\mathbf{n}$的一个基，$\alpha \in \mathbf{R}^\mathbf{n}$. 若 $(\alpha, \alpha_i) = 0, i = 1, 2, ..., n$, then $\alpha = 0$.

解.

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i, (\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} k_i(\alpha, \alpha_i) = 0$$

Hence $\alpha = 0$ □

26（书中第四章习题28）设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 是 $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$的一个规范正交基，

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n, \beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + ... + y_n\alpha_n,$$

Prove: $(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

解.

Note that:

$$(\alpha_i,\alpha_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

□

27（书中第四章习题30）将向量组：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

规范正交化。

解.

第一步，逐步正交化：

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\beta_1 - \frac{4}{5}\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

其次，规范化

$$\gamma_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{|\beta_2|}\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{|\beta_3|}\beta_3 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

28（书中第四章习题31）设矩阵 A, B 都是n 阶正交矩阵，证明：

1. A^{-1} 是正交矩阵；
2. AB 是正交矩阵；

Proof.

1. 已知$A'A = E$，所以$A^{-1} = A', (A^{-1})'A^{-1} = (A')'A^{-1} = AA^{-1} = E$
2. $(AB)'AB = B'A'AB = E$

所以 A^{-1}, AB 都是正交矩阵。 □

29（书中第四章习题32）设矩阵 P 是 $\mathbf{R}^n$ 中规范正交基 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$，到 $\mathbf{R}^n$ 中规范正交基 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ 的过渡矩阵。证明：P 是正交矩阵。

Proof.

根据已知条件，有：

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} P$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}, A = BP$$

$$P = B^{-1}A, A, B \text{ 是正交矩阵}$$

$$B^{-1}, A \text{ 是正交矩阵}, P = B^{-1}A$$

是正交矩阵. □

第六章习题

1 证明下面两个矩阵相似：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

解法1：取矩阵：

$$T=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

则有：$T=T^{-1}$ 而且

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

解法2： 设有基底：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 和线性变换，满足：

$$f\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} A$$

because $\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ is also another bases, we have

$$\begin{matrix} f\alpha_4 = 4\alpha_4 \\ f\alpha_3 = 3\alpha_3 \\ f\alpha_2 = 2\alpha_2 \\ f\alpha_1 = 1\alpha_1 \end{matrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hence the matrix A is similar to B.

谢 谢！