线性代数
广义可逆矩阵

曾吉文
哈尔滨工业大学数学科学学院

2022年 9 月

主要内容：对于一个 n 阶（方）矩阵 A, 可以定义可逆矩阵。若有n 阶（方）矩阵 B, 满足：$AB = BA = E$,单位矩阵，则称矩阵 A 可逆，且逆矩阵唯一，记为：A^{-1}. 若矩阵 A 不是方阵，如何定义或讨论 A 的逆矩阵。

1. 广义逆矩阵的定义
2. 广义逆矩阵的相关性质与判断
3. 广义逆矩阵的唯一性问题
4. 广义逆矩阵的求解与应用
   - 利用对称矩阵求解右逆矩阵
   - 右可逆矩阵与正定性质

1 广义逆矩阵的定义

给定一个$n\times m$ 矩阵 A

定义 1.1

若存在$m\times n$ 矩阵 B 满足： $AB=E_n$, 单位矩阵，称矩阵 A 右可逆。矩阵 B 称为 A 的右逆矩阵。

注意：若矩阵 A 有右逆矩阵，则：$n=R(E_n)\leq R(A)\leq m$, 所以矩阵 的行数小于列数，形象的称为矮矩阵。

给定一个$n \times m$ 矩阵 A

定义 1.2

若存在$m \times n$ 矩阵 B 满足： $BA = E_m$，单位矩阵，称矩阵 A 左可逆。矩阵 B 称为 A 的左逆矩阵。

注意：若矩阵 A 有左逆矩阵，则：$m = R(E_m) \leq R(A) \leq n$，所以矩阵 的列数小于行数，形象的称为高矩阵。

2 广义逆矩阵的相关性质与判断

若一个 $n \times m$矩阵 A, 同时有右逆矩阵和左逆矩阵，根据上面的定义，我们有下列性质：

Theorem 2.1

若一个 $n \times m$矩阵 A, 同时有右逆矩阵和左逆矩阵，则矩阵 A 为方阵，且左右逆矩阵相等，即为 A 的逆矩阵 A^{-1}.

$$AB = E_n, CA = E_m \Rightarrow n = m, B = C = A^{-1}$$

Theorem 2.2

给定一个 $n \times m$矩阵 A，A有右逆矩阵，当且仅当 A 是行满秩的，即 $R(A) = n$.

Proof.

必要性，即已知矩阵 A 有右逆矩阵 B,

$$
\begin{aligned}
AB &= E_n \\
n &= R(E_n) \leq R(A) \leq n \\
\Rightarrow \quad R(A) = n
\end{aligned}
$$

所以矩阵 A 是行满秩的。

□

Proof.

充分性，即已知矩阵 A 是行满秩的：$R(A)=n$,设

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\mathbb{R}^n$$

于是，对于标准单位向量：

$$\begin{aligned} e_1,e_2,...,e_n \\ \exists, b_{1j},b_{2j},...,b_{mj}\in\mathbb{R} \\ \alpha_1 b_{1j}+\alpha_2 b_{2j}+\cdots+\alpha_m b_{mj}=e_j \\ A\begin{pmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{mj}\end{pmatrix}=e_j, j=1,2,...,n \end{aligned}$$

令

$$B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}, AB_j = e_j, j = 1, 2, ..., n$$

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \cdots & AB_n \end{pmatrix} = E_n$$

所以矩阵 A 有右逆矩阵B.

类似可证，

Theorem 2.3

对于一个 $n \times m$ 矩阵 A,A 有左逆矩阵，当且仅当矩阵 A 是列满秩的。

Proof.

考虑矩阵 A 的转置矩阵 A' 即可:A 是列满秩 当且仅当 A' 是行满秩的。 $\square$

3. 广义逆矩阵的唯一性问题

对于一个方阵 A，只要有左（或右）逆矩阵，则 A 的左逆矩阵等于右逆矩阵，即为逆矩阵，且是唯一的，即为 A^{-1}. 现在要问，一个非方阵 $A, n\times m$, 若有右逆矩阵，则右逆矩阵唯一吗？回答是否认的，即右逆矩阵不唯一。

分析：

$$AB = E_n, n < m$$

考察线性方程： $AX = 0$, 有非零解：$X_0 \neq 0, AX_0 = 0$. 取矩阵 $C = \begin{pmatrix} X_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \neq 0$

$$A(B+C) = AB + AC = AB = E_n, B + C \neq B$$

总结如下：

Theorem 3.1

- 一个非方阵，若只有右逆矩阵，则右逆矩阵不唯一；
- 一个非方阵，若只有左逆矩阵，则左逆矩阵不唯一；
- 一个非方阵，若同时有右逆矩阵和左逆矩阵，则矩阵为方阵，并且左右逆矩阵相等，且为唯一的逆矩阵；

4. 广义逆矩阵的求解与应用

4.1 利用对称矩阵求解右逆矩阵

设有 $n\times m$ 矩阵 A，满足 $R(A)=n$, 根据前面结论，矩阵 A 有右逆矩阵 $B: AB=E_n$ ，如何求取这个矩阵 B? 注意到一个一般性结论（习题）：$\forall A_{n\times m}, R(A)=R(AA')=R(A'A)$

考虑n 阶对称方阵：

$$\begin{aligned} AA', R(AA') &= R(A)=n \\ |AA'|\neq 0, (AA')(AA')^{-1} &= E_n \\ A(A'(AA')^{-1}) = E_n, B &= A'(AA')^{-1} \\ AB = E_n, B &= A'(AA')^{-1} \end{aligned}$$

是矩阵 A 的一个右逆矩阵。

4.2 右可逆矩阵与正定性质

Theorem 4.1

Suppose that A is a $n \times m$ matrix. Then AA' 是正定矩阵，当且仅当 A 是右可逆矩阵，或$R(A) = n$.

Proof.

必要性：即已知 AA' 是正定矩阵。

$$\begin{aligned} \forall X \neq 0, f = X'AA'X > 0 \\ \Rightarrow A'X \neq 0 \Rightarrow R(A') = n \\ R(A) = n \end{aligned}$$

$\square$

Proof.

充分性：即已知 $R(A)=n$

$$R(A)=n=R(A'),X\neq 0,A'X\neq 0$$
$$f=X'AA'X=(A'X)'(A'X)>0,AA'$$

是正定的。 □

谢 谢！